

Tangramy oraz różne geometryczne zabawy

Autor: Lilianna Żukowska, kl. 6

Kategoria: szkoły podstawowe kl. 4-6

Szkoła Podstawowa Zakonu Pijarów
ul. Dzielskiego 1
31-465 Kraków

Telefon: 12 413 66 44
e-mail: sekretariat.sp@pijarzy.pl

1. Tangramy

Tangramem nazywamy matematyczno-logiczną łamigłówkę. Pochodzi z Chin i powstał około 3000 lat temu. Prawdopodobnie wymyślili ją tybetańscy mnisi. Klasyczny tangram składa się z 7 elementów, powstałych po rozcięciu kwadratu. Dzięki swojej specyfice łamigłówka ta łączy ludzi o innych zainteresowaniach i wykształceniu, a dla matematyków stanowi niewyczerpane źródło informacji geometrycznych. Każda z siedmiu części to „tan”. Oryginalna nazwa tangramu to „chi-chiao-tu”, co oznacza „siedem sprytnych części” lub „pomysłowa łamigłówka figurowa z siedmiu części”. Zwykle tangram był wykonywany z drewna, choć bogatsze tangramy również z kości słoniowej. Tangramy były często bogato zdobione. Do Europy tangram dotarł dopiero w XVIII wieku i stał się znany pod różnymi nazwami np. „yum-yum”. Największą popularnością cieszył się w XIX wieku. Wśród pasjonatów tej łamigłówki możemy wyróżnić samego Napoleona Bonaparte.

W Stanach Zjednoczonych łamigłówka ta uzyskała wielką popularność dzięki matematykowi Sam’owi Loyd’owi, który przez wiele lat gromadził swoje projekty na wzory do układania, następnie w 1903 roku wydał książkę „The 8th Book of Tan” czyli „Ósma Księga Tanów”, w której zawarł wszystkie projekty. Książka zawiera ponad 700 projektów pogrupowanych w różne kategorie takie jak m.in. stworzenie świata, ewolucja człowieka, historia architektury, czy czarna magia.

Jednak tangram najbardziej popularny jest w swojej ojczyźnie. W Chinach organizowane są zawody polegające na ułożeniu w jak najkrótszym czasie jak największej liczby figur!

Na stronie

http://matematykainnegowymiaru.pl/open/zadania_interaktywne.php?mode=pokaz&id=44

znajdziemy interaktywny tangram z możliwością przesuwania tanów myszką. Przy zabawie tym tangramem należy zwracać uwagę na ułożenie rombu, ponieważ na dole strony znajdziemy funkcję obrotu go. Inaczej nie wszystkie figury się tam da ułożyć. Jest tam także możliwość kliknięcia po lewej stronie ekranu w opcję „kot” lub „królik” itp. i wtedy komputer wyświetli nam obrazem jak powinno to wyglądać, ale obrazek będzie jednokolorowy i bez rozmieszczenia poszczególnych tanów. Gdy natomiast damy „królik - rozwiązanie”, wówczas pokaże się nam, jak powinno to zostać ułożone. Pomocne także jest to, że tany są kolorowe i wygodnie się układa.

Geometria to z greckiego – geo= ziemia, metria = mierzenie czyli geometria to dosłownie znaczy „mierzenie ziemi”.

Mam tangram, który dostałam za udział w Międzynarodowym Konkursie Kangur Matematyczny. Tamten tangram ma jedynie 4 elementy. Jest podpisany tangram, mimo że tangram ma siedem lub więcej elementów.

Poniżej przedstawiony jest tangram z Kangurka oraz instrukcja, która była do niego dołączona. Na kartce z instrukcją jest przedstawionych 100 pomysłów na figurę, którą da się ułożyć za pomocą tego tangramu. Jest także średni czas układania, z którym ja się po części nie zgodzę, ponieważ figurę, na którą średnio przeznaczają pięć minut da się ułożyć w mniej niż minutę. Do ułożenia niektórych figur jeszcze nie doszłam, chociaż liczę, że za niedługo dojdę. Tu jest instrukcja:





Figura nr 1 w instrukcji

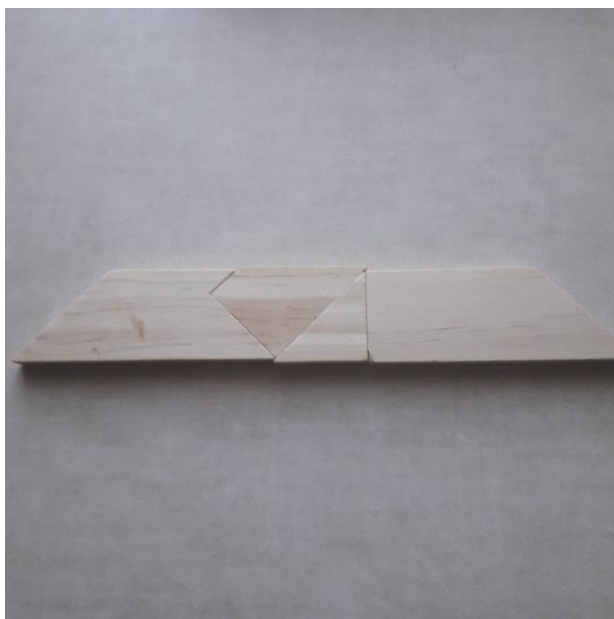


Figura nr 2 w instrukcji



Figura nr 59 w instrukcji

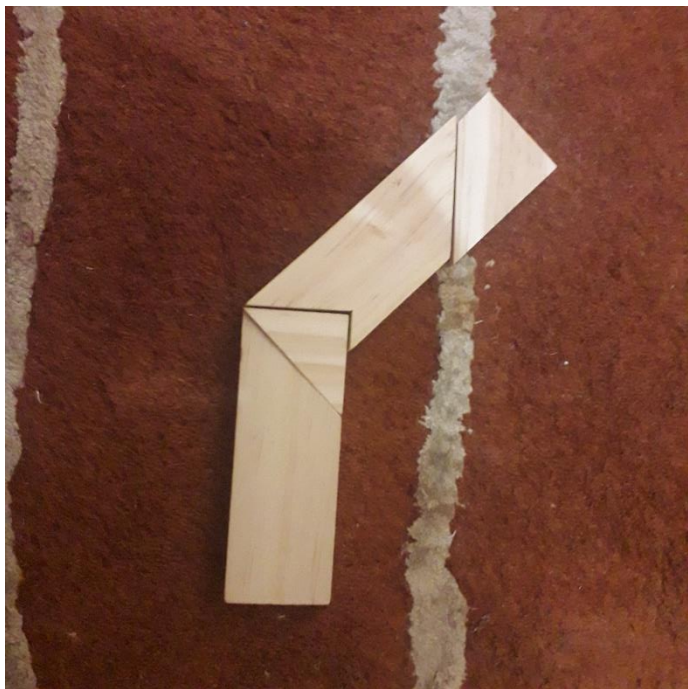


Figura nr 5 w instrukcji

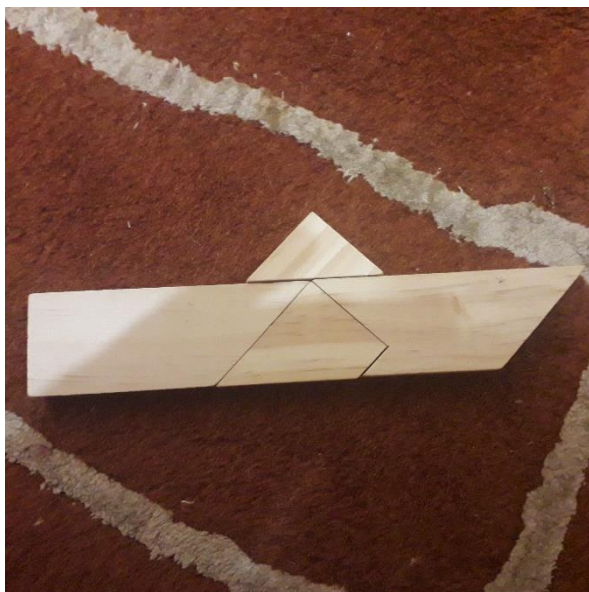


Figura nr 14 w instrukcji (nieco zniekształcona, zniekształcenie polega na tym, że powinienam odwrócić tę prostą linię do góry nogami i by wyszło).

Powyżej przedstawiłam także niektóre figury, które ułożyłam za pomocą tego tangramu.

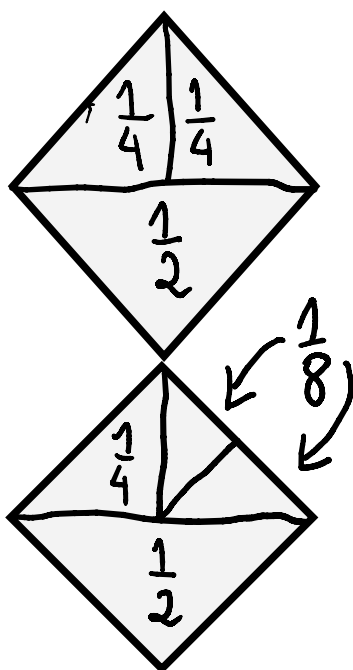
Jak łatwo zauważyć, w instrukcji jest podany przybliżony czas na wykonanie figury. Do odsłony 1 jest podane „5 minut na figurę”, ale ja uważam, że większość figur tej odsłony da się ułożyć w krótszym czasie, np. do ułożenia figury 1 doszłam w ciągu 2 minut gdy pierwszy raz otworzyłam ten tangram.

Cel tangramu

Głównym celem tangramu jest odtworzenie wszystkich elementów tak, aby ułożyły się w kwadrat, a także wymyślanie własnych wzorów.

Za pomocą tangramu można ułożyć tysiące obrazów.

Za pomocą tangramu można pokazać również ułamki: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, ciekawym odkryciem może być pokazanie $\frac{2}{4}$.



Wykorzystując klocki P_4 oraz P_2 możemy zaprezentować ułamki $\frac{1}{2}$ oraz $\frac{1}{4}$.

Wykorzystując klocki P_1 , P_2 , i P_4 możemy pokazać ułamki $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, oraz $\frac{1}{8}$.

Reguły:

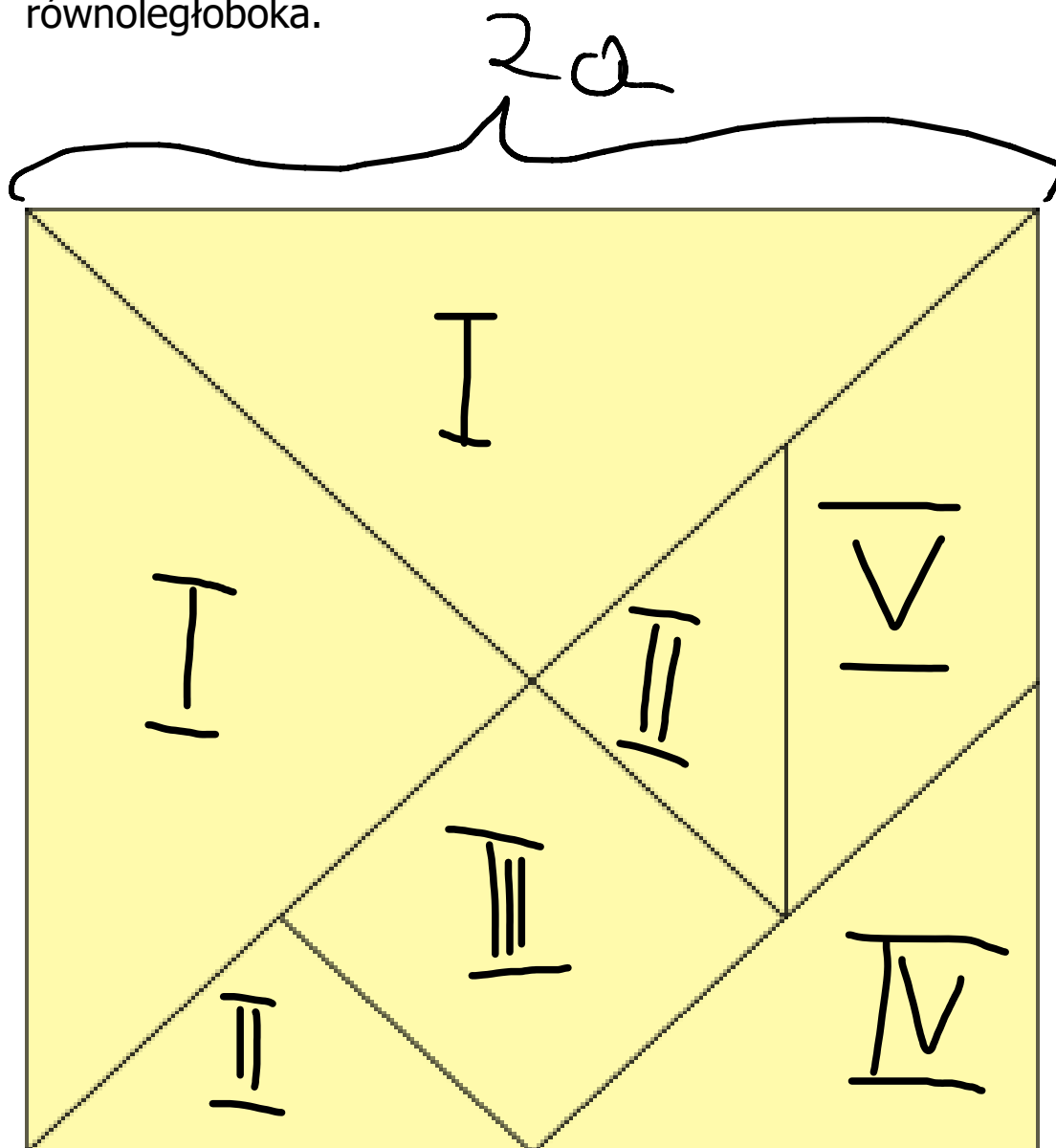
- w przypadku układania każdego obrazka należy wykorzystać wszystkie elementy,
- żaden element nie może nachodzić na inny,
- element w kształcie równoległoboku można odwracać na drugą stronę.

Istnieje także możliwość zrobienia tangramu samemu!

Należy wziąć tekturę, papier, sklejkę itp. i pociąć ją na siedem części składających się w kwadrat. Taki materiał, z którego robimy tangram musi być w kształcie kwadratu! Musi być pocięty na części, które są odmierzone i spełniają warunki takie, że później będziemy mogli złożyć z tego kwadrat:

- dłuższy bok równoległoboku musi być tej samej długości co bok średniego trójkąta,

- obydwie duże jak i obydwie małe trójkąty muszą mieć takie same wymiary (duże muszą być większe od średnich i od małych!),
- kwadrat musi mieć bok równy krótszemu bokowi równoległoboka.



Powyżej przedstawiłam zdjęcie tangramu złożonego w kwadrat. (www.wikipedia.org)

Na stronie <https://www.domnaglowie.pl/tangram-wzory-i-rozwiazania-pdf/> znajdziemy gotowe wzory tangramu do ułożenia takie jak ryba, drzewo, foka itp. Wraz z rozwiązaniami, które są opisane jak do wydruku.

Przy tym tangramie obliczyłam pola powierzchni poszczególnych tanów oraz pole całego kwadratu:

Pole całego kwadratu: $2a \cdot 2a = 4a^2$

$$P_1 = \frac{1}{2} a \cdot 2 \cdot a = a \cdot a = a^2$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$$

$$P_3 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{a^2}{2}$$

$$P_4 = \frac{1}{2} a \cdot a = \frac{1}{2} a^2$$

$$P_5 = a \cdot \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} a^2$$

Spr.

$$2 P_1 + 2 P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 4a^2$$

$$2a^2 + 2 \cdot \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2} a^2 \cdot 2 = 4a^2$$

$$2a^2 + a^2 + a^2 = 4a^2$$

$$4a^2 = 4a^2$$

Zauważmy, że pole średniego trójkąta P_4 i pole równoległoboku P_5 są równe!

Warto wspomnieć w tej pracy o paradoksach związanych z tangramem:

- Paradoks wędrowca
- Paradoks zbitego wazonu

Widząc dwie bardzo podobne figury, zastanawiamy się, dlaczego one są tak podobne, jak wiemy, że są złożone z tych samych części. Otóż wiele części może zoostać na tym samym miejscu tylko jak jeden, czy dwa tany przesuniemy może wyjść obraz podobny, ale z pewnymi różnicami.

Ciekawe jest to, że tangram pozwala zobrazować twierdzenie Pitagorasa, aczkolwiek tylko dla trójkąta równoramiennego. W tym celu trzeba wykorzystać dwie, czasami trzy układanki.

Ciekawostka:

W 1942 roku dwaj chińscy matematycy Fu Tsiang Wang i Chuan-Chich Hsiung wykazali, że z elementów tangramu można złożyć tylko 13 figur wypukłych! Rezultat swoich badań opublikowali w 49. Tomie American Mathematical Monthly.

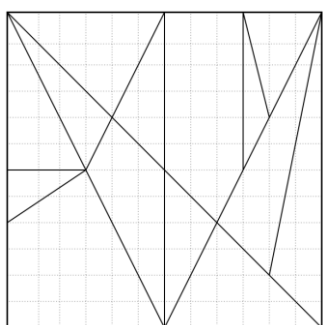
Tangram łatwo można ułożyć w Geogebra.

Poza tradycyjnym tangramem powstałym z rozcięcia kwadratu na siedem części istnieje także wiele odmian opartych na wersji starochińskiej. Figurami wyjściowymi mogą być: kwadrat, prostokąt, koło, które są podzielone na siedem, lub więcej części (dziewięć, dziesięć, a niektóre nawet piętnaście).

2. Stomachiony

Stomachion jest podobną łamigłówką do tangramu, ale pochodzi ze starożytnej Grecji i składa się z aż 14 elementów. Układając stomachion także należy układać kwadrat lub inne figury, jak w tangramie. Stomachion nazywamy także „loculus Archimedeus”, co po łacinie oznacza „**pudełko Archimedesa**”. Legenda głosi, że pierwszym człowiekiem, który odkrył wszystkie sposoby na

ułożenie stomachionu był właśnie Archimedes. Obecnie znamy **536** sposobów na ułożenie stomachionu w kwadrat, które podał Bill Cutler w 2003 roku.



Oto stomachion znaleziony w internecie.

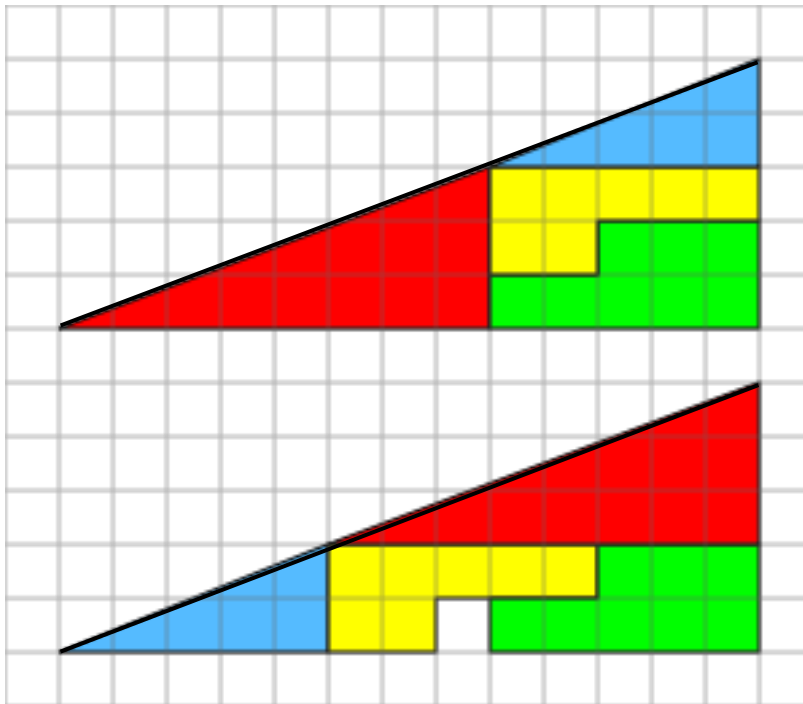
3. Brakujący kawałek

Jest to układanka składająca się z 17 kawałków, z których należy ułożyć duży kwadrat, następnie zabrać jeden z kawałków i spróbować ułożyć taki sam kwadrat, od którego zaczynaliśmy zabawę. A jak takie coś ułożyć?

Ten kwadrat nie może być dokładnie taki sam, gdyż składa się z innej liczby kawałków. Może ten początkowy „kwadrat” wcale nie jest kwadratem...

Obie figury przypominają kwadrat, ale tak naprawdę żadna z nich nie jest idealnym kwadratem! I w dodatku nie mogą być takie same! Mówi nam o tym pole powierzchni... przecież skoro zabraliśmy jeden z kawałków to musieliśmy zmniejszyć powierzchnię całej figury. Ta pierwsza na środku lekko wyrzusza się na zewnątrz, a ta druga do wewnątrz.

Mamy także wersję tej łamigłówki z trójkątem.



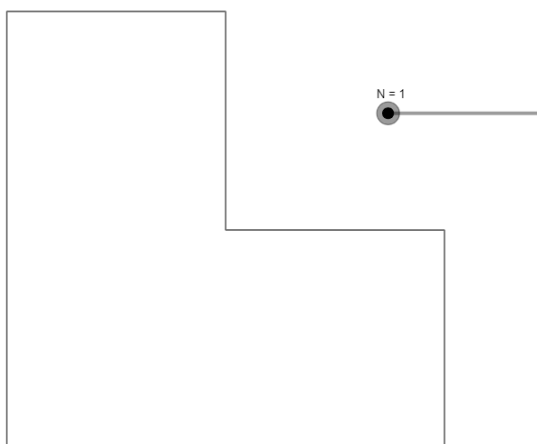
Te figury wydają się być równe, bo są złożone z jednakowych kawałków. Jednak, gdy sobie to dobrze powiększymy i przyłożymy linijkę lub gdy komputerowo narysujemy prostą linię okaże się, że pierwsza figura jest nieco wklęsła, a druga nieco wypukła. Tę wypukłość jest ciężko zauważyć gołym okiem, ponieważ jest tak niewielka, a robi wielką różnicę, bo niby trójkąt złożyliśmy z tych samych kawałków, a jednak powstaje ten brakujący kawałek. Kąty w tych figurach (w trójkątach czerwonym i niebieskim) są różne, dlatego powstaje nam łamana, która do złudzenia przypomina nam linię prostą. Gdybyśmy chcieli powiększyć czerwony trójkąt dwukrotnie, obie przyprostokątne mnożymy razy 2, lecz w tym przypadku ten sposób się nie sprawdza, bo nie jest to idealny trójkąt.

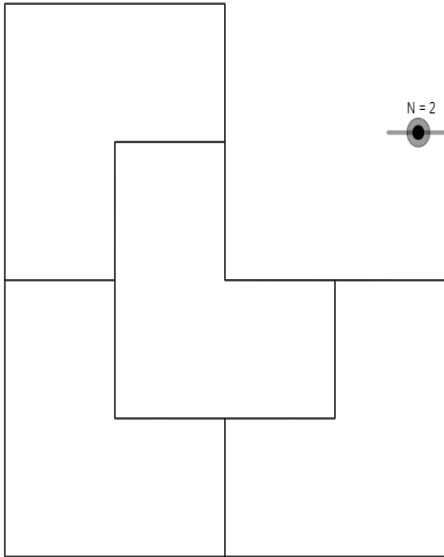
4. Samopowtarzające się wielokąty

Samopowtarzający się wielokąt, brzmi ciekawie... jest to po prostu figura na płaszczyźnie, którą można podzielić na kilka identycznych jej kopii, tylko mniejszych. Te figury mogą

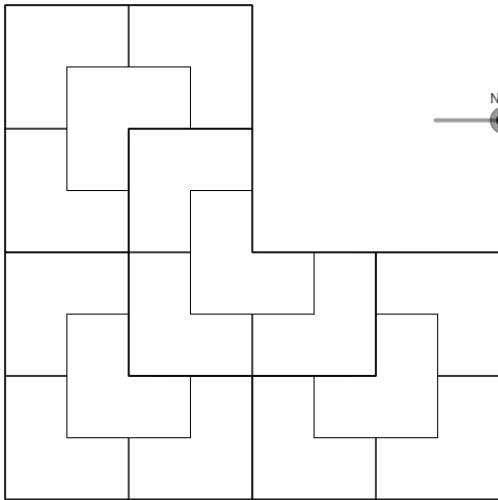
mieć wspólne granice, ale nie mogą na siebie nachodzić! Jeśli wielokąt ma s -boków i dzieli się na c -kopií to nazywamy go c -powtarzalnym s -kątem. Znamy kilka różnych czworobocznych figur (czworokątów). Większość jest 4-powtarzalna, ale istnieją także k -powtarzalne dla każdego k . Każdy trójkąt jest 4-powtarzalny. Niektóre przypadki są 3-powtarzalne lub 5-powtarzalne. Na razie odkryto jeden samopowtarzający się pięciokąt: sfinksa, składa się z czterech kopii. Znany jest tylko jeden 5-powtarzalny trójkąt i dokładnie trzy 4-powtarzalne sześciokąty. Istnieje także kilka samopowtarzających się figur, które rozciągają nazwę „wielokąt” do granic możliwości! Niektóre wręcz tę granicę przekraczają, bo mają nieskończenie wiele boków!

Przykłady samopowtarzających się wielokątów pobrane ze strony <https://www.geogebra.org/m/McDjmWbc>

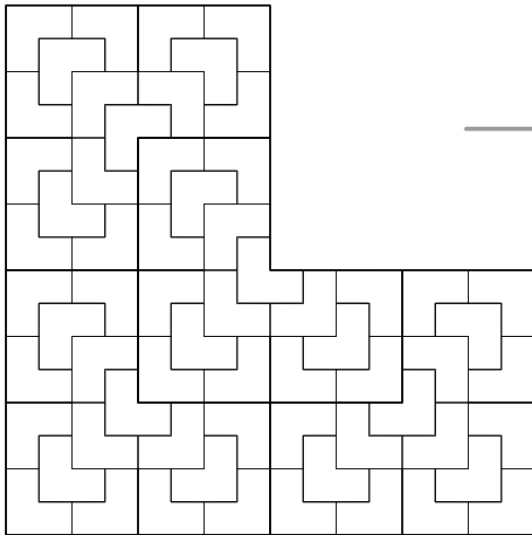




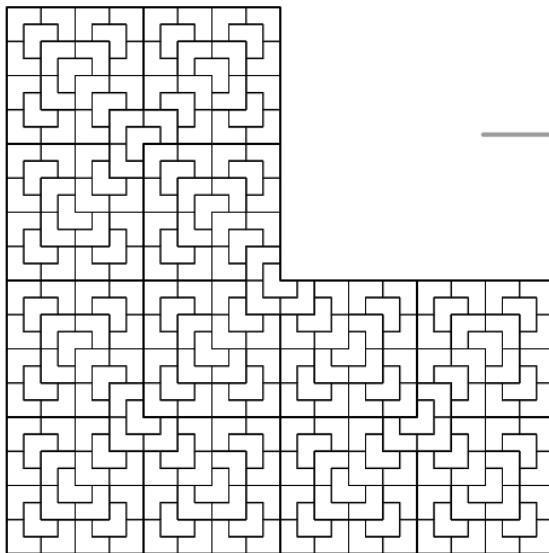
N = 2



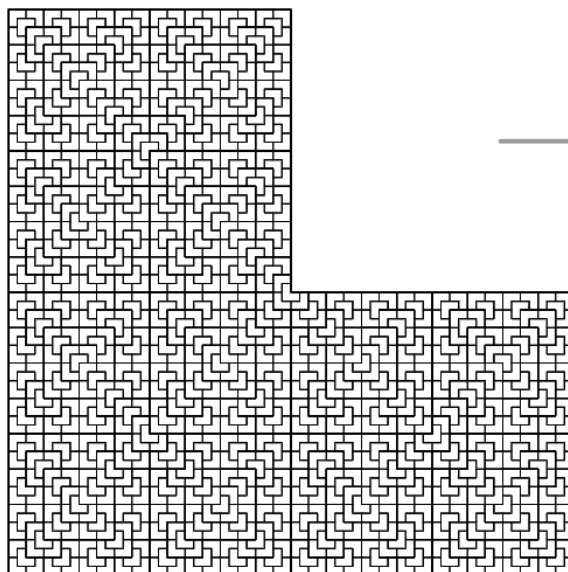
N = 3



N = 4



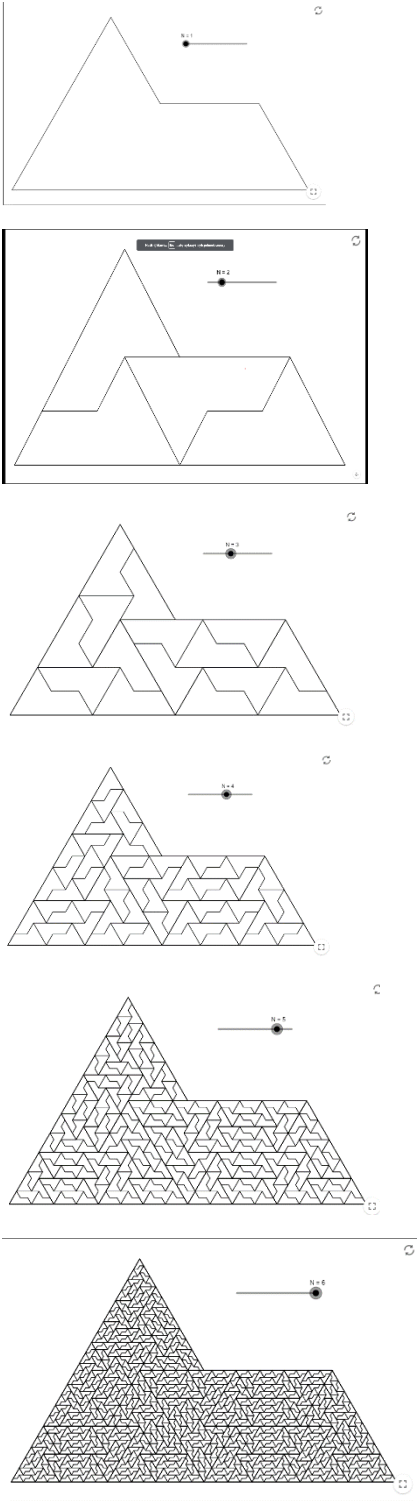
N = 5



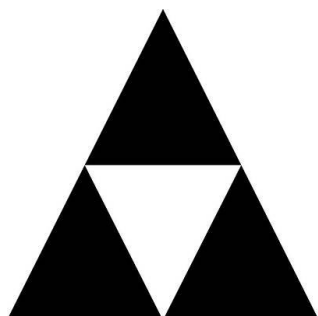
N = 6

Poniżej przykłady samopowraczających się figur:

Sfinks



Przykłady pokazujące, że każdy trójkąt jest 4-powtarzalny:



Na geogebra można znaleźć jeszcze kilka innych samopowtarzających się figur takich jak trapezy równoramienne.

Zadałam sobie pytanie, jakie będzie pole poszczególnych wielokątów.

Założmy, że pole 1. figury wynosi X .

Pole 2. $X:4$

Pole 3. $X:16$

Pole 4. $X:4^3$

Pole 5. $X:4^4$

Pole 6. $X:4^5$

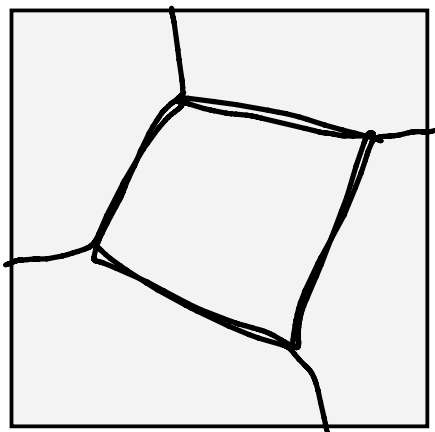
Pole n. $X:4^{n-1}$

5. Origami

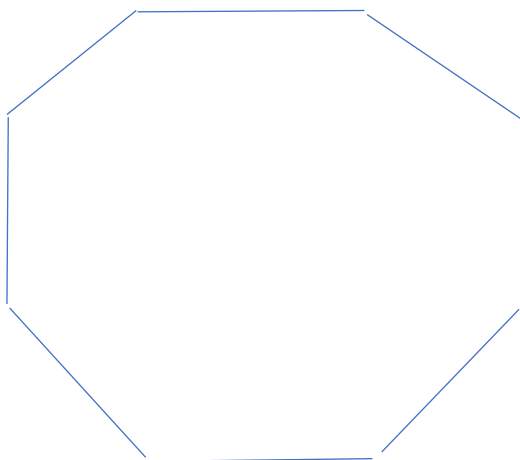
Jest to japońska łamigłówka bazująca na kwadratowym arkuszu papieru, który trzeba zaginać (bez klejenia! i bez rozcinalania!) tak aby powstały ryby, ptaki, czy co tam chcemy. Dzisiejsze zasady origami wprowadziły możliwość układania figur z prostokątnej kartki papieru. Jednym chyba z najbardziej znanych przykładów origami jest żaglówka lub pudełeczko.

6. Jak z kwadratu złożyć ośmiokąt?

Ciekawą łamigłówką jest, jak z kwadratu złożyć ośmiokąt. Otóż, trzeba podzielić go na pięć części:



W taki oto sposób możemy potem zauważyć, że z tych części można złożyć ośmiokąt:



Ten oto ośmiokąt złożyłam z części tamtego kwadratu.

Bibliografia:

Zdjęcie tangramu złożonego w kwadrat:

www.wikipedia.org

Zdjęcia tangramu po Kangurku oraz instrukcji do tego tangramu:
archiwum prywatne

Zdjęcia samopowtarzających się wielokątów:

<https://www.geogebra.org/m/McDjmWbc>

Zdjęcie brakującego kawałka oraz stomachionu:

https://pl.wikipedia.org/wiki/Zagadka_brakuj%C4%85cego_kwadratu

<https://pl.wikipedia.org/wiki/Stomachion>

Informacje:

www.wikipedia.org

<http://matematykainnegowymiaru.pl/open/lekcje.php?mode=pokaz&id=75>

www.wmie.uz.zgora.pl/pracownia/?p=194

www.domnaglowie.pl/tangram-wzory-i-rozwiazania-pdf

Książki:

Ian Stewart „Gabinet matematycznych zagadek” część I i II”

Stanisław Kowal „Przez rozrywkę do wiedzy”

Opinia opiekuna

Temat pracy wybrany samodzielnie przez uczennicę. Uczennica uczęszcza na kółko matematyczne, systematycznie podejmuje się rozwiązywania ciekawych i trudniejszych zadań.

Praca pisana samodzielnie, w czasie pisania uczennica korzystała z konsultacji z nauczycielem pogłębiając wybrane zagadnienia.

Opiekun:

o. Sławomir Dziadkiewicz SP
.....

mgr Sławomir Dziadkiewicz