

„MATEMATYKA FIBONACCIEGO WOKÓŁ NAS”



Lidia Szczurkowska klasa 7A i Oliwia Świerkosz klasa 7B

Szkoła Podstawowa nr 4

w Wadowicach

im. Władysława Broniewskiego

SPIS TREŚCI

1. Tytuł pracy.
2. Spis treści.
3. Kim był Fibonacci?
4. Fibonacci i... KRÓLIKI?!
5. Ciąg Fibonacciego.
6. Właściwości liczb ciągu.
7. Geometria Fibonacciego.
8. Liczba Φ .
9. Zastosowania ciągu Fibonacciego.
10. Ciąg Fibonacciego w naturze.
11. Ciąg Fibonacciego w kosmosie.
12. Ciąg Fibonacciego w mistycyzmie.
13. Ciąg Fibonacciego w anatomii ludzi.
14. Ciąg Fibonacciego w świecie zwierząt.
15. Ciąg Fibonacciego w sztuce.
16. Ciąg Fibonacciego w architekturze.
17. Ciąg Fibonacciego w matematyce.
18. Badanie proporcji w ciele człowieka.
19. Eksperyment.
20. Bibliografia.



Kim był Fibonacci?

Był słynnym włoskim matematykiem, opracował ciąg liczb Fibonacciego.

Nazywano go: Leonardo Fibonacci lub Leonardo z Pizy, żył na przełomie XII i XIII w.

Pod opieką arabskiego mistrza studiował obliczenia, a następnie podróżował studiując kolejne aspekty matematyki.

FIBONACCI I... KRÓLIKI?!

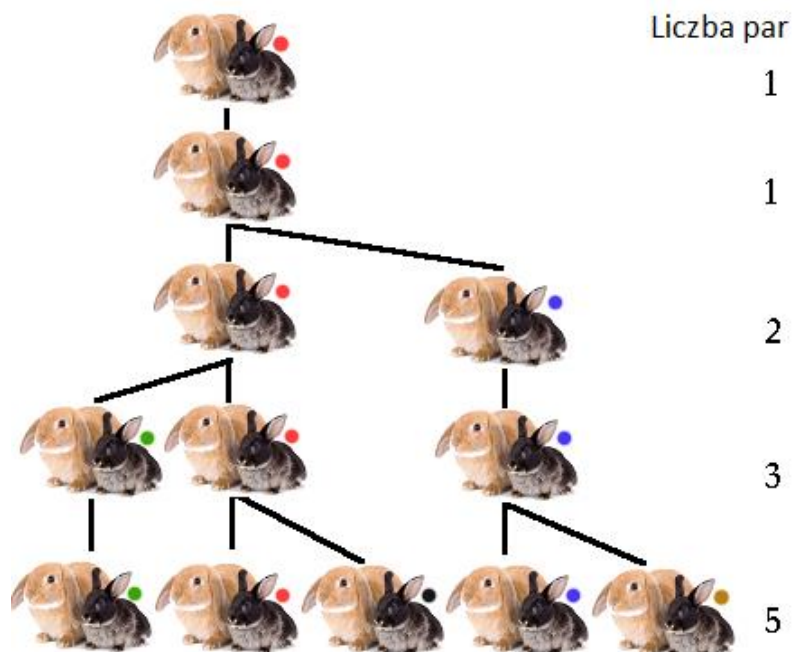
W swoim dziele *Liber Abaci* (Księga liczydeł) wydanym w 1202 roku Leonardo Fibonacci uwzględnił między innymi odpowiedź na zagadkę dotyczącą właśnie KRÓLIKÓW!



Ile par królików może spłodzić jedna para w ciągu roku, jeśli:

- każda para rodzi nową parę w ciągu miesiąca,
- para staje się płodną po miesiącu,
- króliki nie zdychają?

Odpowiedzią na to pytanie jest nowy ciąg jego autorstwa, zwany ciągiem Fibonacciego.
(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, ...)



Pierwszy miesiąc: jedna para królików rodzi nową parę królików. Razem: 2 pary królików.

Drugi miesiąc: dwie pary królików plus nowa para królików. Razem: 3 pary królików.

Trzeci miesiąc: trzy pary królików plus 2 urodzone. Razem: 5 par królików.

Czwarty miesiąc: pięć par królików plus 3 urodzone. Razem: 8 par królików.

Piąty miesiąc: osiem par królików plus 5 urodzonych. Razem: 13 par królików. itd.

Kolejne liczby królików tworzą nam kolejne liczby pewnego ciągu!...

CIĄG FIBONACCIEGO

Kolejno odlicz! 1,2,3,4,5,6,7,8 ... A gdyby spróbować czegoś innego? Zamienić dodawanie do każdej kolejnej liczby 1 na sumowanie dwóch poprzednich liczb? Zaczynamy od 0 i tu zrobimy wyjątek, bo następna liczba to będzie 1, a nie 0, wtedy nie miałoby to sensu.

Mamy już dwie liczby. Teraz czas utworzyć kolejną

$0+1=1$ A zatem kolejna liczba naszego ciągu to również 1.

$1+1=2$ na początku wszystko wygląda jak w zwykłym ciągu.

$2+1=3$ To także wszyscy wiemy

Ale kolejna liczba będzie inna niż w odliczaniu do 10....

$2+3=5$... W ciągu nie ma cyfry 4!

Teraz, kiedy już znamy zasadę tworzymy po prostu kolejne wyrazy: $3+5=8$, $5+8=13$

I tak dalej, i tak dalej. Na przykład 140 wyraz ciągu według Wikipedii to

81 055 900 096 023 504 197 206 408 605

Bardzo długa liczba! A to dopiero 140 wyraz!

W ten sposób tworzymy kolejne wyrazy ciągu Fibonacciego. Tak, te kolejne cyfry nazywają się właśnie "wyrazy".

Ciąg Fibonacciego, jak wszystkie inne ciągi nie ma końca, to znaczy trwa do nieskończoności. Bo przecież wszystkie kolejne liczby można do siebie dodawać i otrzymywać zupełnie nowe, bardzo skomplikowane liczby, z których przeczytaniem niejeden z nas mógłby mieć problem....

Podsumowując: jest to ciąg liczb naturalnych, w którym pierwszą liczbą jest 0, kolejna to 1, a każdy następny wyraz stanowi sumę dwóch poprzednich. Czasami za pierwszą liczbę tego ciągu uznaje się 1 i pomija się pierwsze zero.

Poniżej prezentujemy 16 kolejnych wyrazów ciągu:

Numer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Wyraz	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

WŁAŚCIWOŚCI LICZB CIĄGU

W liczbach ciągu Fibonacciego szczególnie ciekawe są ich właściwości. Dowiedzieliśmy się, że każda z liczb podzielona przez tę, która ją poprzedza w mniejszym lub większym przybliżeniu daje liczbę Φ (w przybliżeniu 1,618).

Np. $233:144 = 1,61805...$

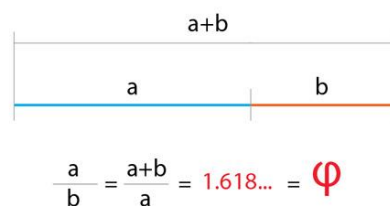
Znalazliśmy także kilka mniej znanych właściwości, które mają liczby należące do ciągu Fibonacciego. Prezentujemy je poniżej i uzasadniamy:

- Z wyjątkiem liczb jednocyfrowych zawsze cztery lub pięć następujących po sobie liczb ma tę samą liczbę cyfr w układzie dziesiętnym, np. 13, 21, 34, 55, 89 mają po dwie cyfry
- 0, 1 i 144 to jedyne liczby w całym ciągu, które są kwadratami liczb całkowitych ($0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $12^2 = 144$)
- Co trzecia liczba z ciągu jest podzielna przez 2, co czwarta przez 3, czyli podzielne przez 2 są: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, a podzielne przez 3 są: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55
- Każda liczba całkowita oprócz zera posiada wielokrotność która jest liczbą Fibonacciego,
np. 1 razy 3 to 3- liczba Fibonacciego
8 razy 18 to 144- liczba Fibonacciego
10 razy 61 to 610- liczba Fibonacciego
- Największy wspólny dzielnik dwóch liczb Fibonacciego jest liczbą Fibonacciego. Numer tej liczby jest równy największemu wspólnemu dzielnikowi numerów tych liczb,
np. wyrazy 34 i 144
 $D_{34} = (1, 2, 17, 34)$,
 $D_{144} = (1, 2, 3, 6, 9, 16, 24, 48, 72, 144)$
NWD = 2 (liczba Fibonacciego)
144 to 12 wyraz ciągu.
34 to 9 wyraz ciągu.
 $NWD_{(12; 9)} = 3$ (liczba Fibonacciego)
- Niektóre z wyrazów ciągu Fibonacciego są liczbami pierwszymi. nierozstrzygniętym problemem jest to, czy jest ich tutaj nieskończenie wiele, np. 2, 3, 5, 13...
- Wiadomo, że jeżeli dodamy do siebie dwie kolejne znane nam liczby ciągu to utworzymy kolejną liczbę Fibonacciego, natomiast jeśli jakieś dwie od siebie odejmiemy, wyjdzie liczba poprzednia.
np. $55 + 89 = 144$ wyraz 12 $89 - 55 = 34$ wyraz 9

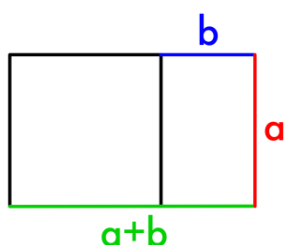
GEOMETRIA FIBONACCIEGO

Wyobraźmy sobie, że dzielimy odcinek na dwie części tak, że stosunek długości dłuższej z nich do krótszej jest taki sam jak całego odcinka do części dłuższej i jest liczbą Φ . Skomplikowane? Wcale nie! Na przykład, jeśli nasz odcinek ma długość 1m, to $a=0,618m=61,8\text{ cm}$ natomiast $b=0,382=38,2\text{ cm}$.

Dlaczego? Ponieważ jeśli podzielimy 0,618 przez 0,382 wynik będzie wynosił w przybliżeniu 1,618 (Φ). Tę samą liczbę uzyskamy dzieląc 1 przez 0,618. Jest to zgodne z zasadą opisaną powyżej i przedstawioną na rysunku. Taki podział nazywamy złotym podziałem albo złotą proporcją.

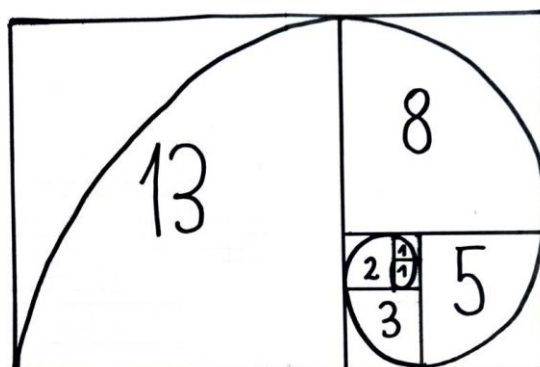


$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = 1.618... = \Phi$$

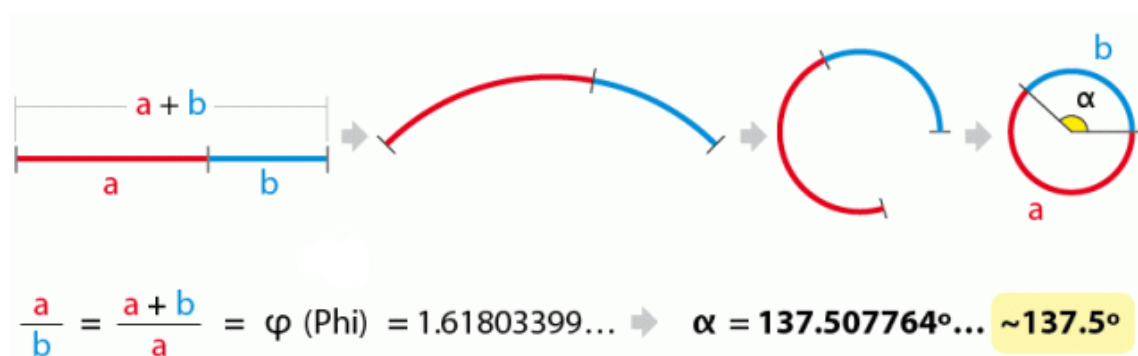


W oparciu o ciąg Fibonacciego oraz o złotą proporcję możemy utworzyć złoty prostokąt. Jest to taki prostokąt, w którym stosunek jego boków to: $\frac{a}{b} = \Phi$. Możemy do takiego prostokąta dodawać kolejne kwadraty o boku równym dłuższemu bokowi prostokąta i zawsze wtedy otrzymamy również złoty prostokąt o bokach $a+b$ oraz a spełniający warunek $\frac{a+b}{a} = \Phi$. Możemy także poruszać się w drugą stronę i odejmować kolejne kwadraty, ale nadal powstała figura będzie złotym prostokątem. Jeśli kilkakrotnie powtórzymy te czynności otrzymamy kolejne zmniejszające lub zwiększające się złote prostokąty.

Przyjmijmy, że rysujemy następne kwadraty, tym samym powiększając naszą figurę. W taki złoty prostokąt możemy wpisać **spiralę Fibonacciego**, zwaną także złotą spiralą. Taką samą spiralę można utworzyć rysując kwadraty o bokach odpowiadających kolejnym liczbom ciągu Fibonacciego. Jest to bowiem graficzne przedstawienie liczb tego ciągu.

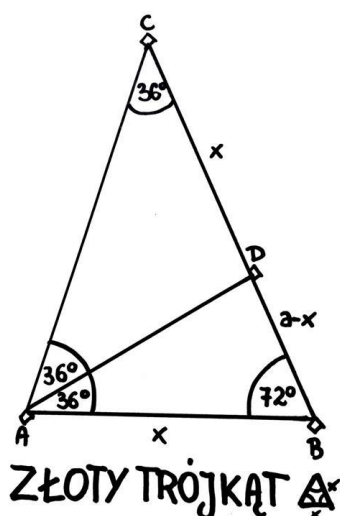


Możemy również skonstruować tak zwany złoty kąt, czyli kąt środkowy oparty na mniejszym z dwóch łuków które powstaną w wyniku złotego podziału okręgu. Jego miara to w przybliżeniu $137,5^\circ$. Takiej miary nie można wyrazić w ułamku zwykłym, ponieważ jest to liczba niewymierna.



Iloraz miary złotego kąta oraz jego dopełnienia do kąta pełnego (w przybliżeniu jest to $222,5^\circ$) jest równy... oczywiście złotej liczbie i stąd właśnie pochodzi nazwa tego kąta.

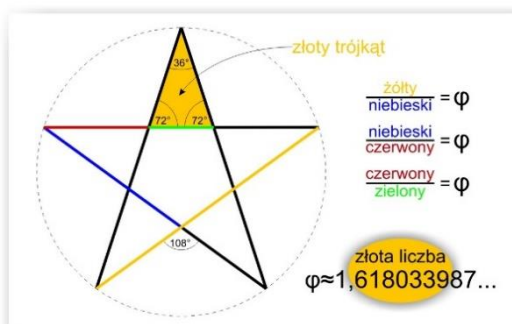
Złota proporcja jest szczególnie dobrze widoczna



w matematycznej figurze zwanej pentagramem.

Stosunek długości złotego boku do niebieskiego to

złota liczba. Stosunek boku niebieskiego do czerwonego jest również złotą liczbą. Stosunek boku czerwonego do zielonego również daje nam złotą liczbę. Przypomnijmy, że pentagram to wielokąt gwiaździsty foremny. Jeżeli narysujemy pięciokąt foremny, to jego przekątne utworzą właśnie pentagram.



Ale na tym jeszcze nie koniec geometrii Fibonacciego! Istnieje także złoty trójkąt, czyli trójkąt równoramienny, w którym stosunek długości boku do podstawy jest... znowu równy liczbie Φ ! Oba kąty znajdujące się przy podstawie tego trójkąta mają miarę 72° , a kąt pomiędzy ramionami to 36° . W sumie, wszystkie kąty tego trójkąta dają 180° i pamiętamy, że jest to suma kątów w trójkącie. Posiada on bardzo podobną właściwość co złoty prostokąt: można go dzielić na coraz mniejsze trójkąty, które nadal będą złotymi trójkątami.

LICZBA Φ

Liczba Φ zwana jest złotą liczbą i boską proporcją ze względu na to, że występuje niemal wszędzie! Wynosi ona w przybliżeniu 1,618.

Zaczynając od początku to jest ona dwudziestą pierwszą literą w alfabecie greckim, a w systemie gregoriańskim oznacza 500.

Bardzo interesujące jest iż uzyskujemy ją (w przybliżeniu) np. gdy dzielimy przez siebie dwa kolejne wyrazy ciągu Fibonacciego. Jednak najciekawsze jest to, iż im wyższe wyrazy tego ciągu tym iloraz jest bardziej zbliżony do liczby Φ (1,618).

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 ...

$$2/1=2$$

$$3/2=1,5$$

$$5/3=1,666...$$

$$8/5=1,6$$

$$13/8=1,625$$

$$21/13=1,615384615...$$

$$34/21=1,619047619...$$

$$55/34= 1,617647058...$$

$$89/55=\mathbf{1,618181818181818}...$$



Znalazłyśmy informacje, że liczba Φ jest rozwiązaniem pewnego równania.

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Pani pokazała nam sposób w jaki można rozwiązać takie równanie:

1. Obliczamy deltę.

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)$$

$$\Delta = 5$$

2. Obliczamy pierwiastek z delty.

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$$

3. Wyliczamy x.

$$x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ (Jest to liczba ujemna)}$$

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx \frac{1+2,236}{2} \approx 1,618 - \text{liczba } \Phi$$

4. Sprawdzamy czy $x = 1,618$.

$$1,618^2 - 1,618 - 1 = 0,000076 \approx 0$$

TAK!!!

ZASTOSOWANIA CIĄGU FIBONACCIEGO

Ciąg Fibonacciego otacza nas codziennie dosłownie wszędzie! Gdziekolwiek nie spojrzysz, tam można go znaleźć. Używany jest w sztuce, w architekturze, w muzyce, spotykany w świecie roślin i zwierząt oraz w anatomii człowieka, nawet nasz mózg podświadomie „woli” złoty podział!

Na kolejnych stronach pokażemy gdzie „ukrywa się” ciąg Fibonacciego i złota proporcja. Wszystkie informacje znalazłyśmy w Internecie, w książkach lub podpowiedzieli nam je rodzice i nauczyciele.

CIĄG FIBONACCIEGO W NATURZE

Rośliny wybrały sobie ciąg Fibonacciego i liczbę Φ . Widać to między innymi w liczbie płatków kwiatów, ponieważ ich liczba u zdrowych i niezdeformowanych kwiatów jest wyrazem ciągu. Dlatego tak trudno znaleźć czterolistną koniczynę!

Oto przykłady kwiatów o określonej liczbie płatków:



Kalia - 1 płatek



Wilczomlec - 2 płatki



Trójlist - 3 płatki



Orlik - 5 płatków

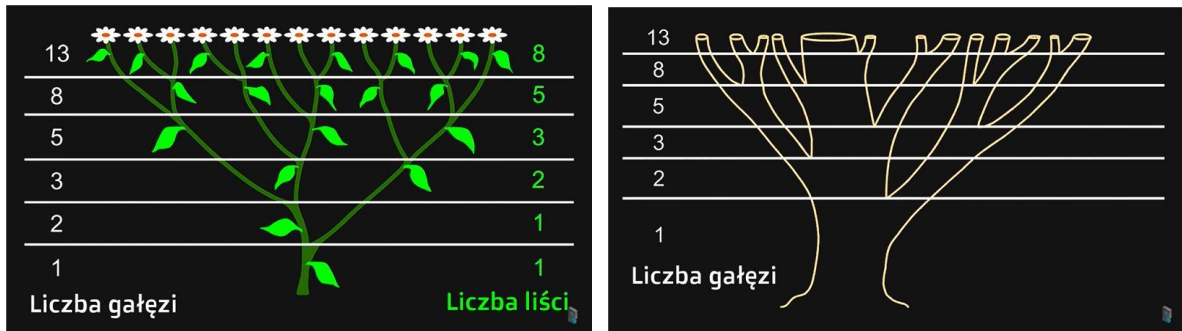


**Krwiowiec kanadyjski -
8 płatków**



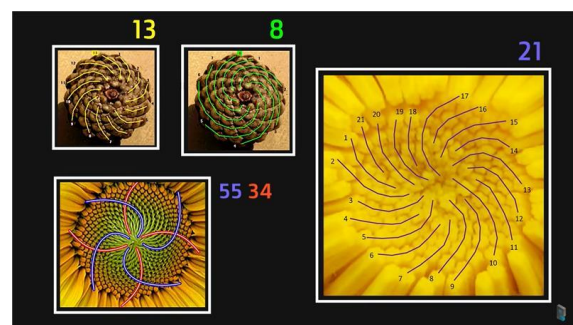
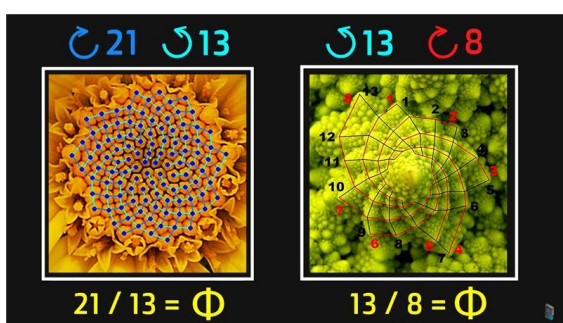
Nagietek - 13 płatków

Nie chodzi tutaj tylko o liczbę płatków, cały proces wzrostu rośliny odbywa się według złotej proporcji. Liczby kolejnych gałęzi oraz liczby liści na poszczególnych poziomach rozwoju rośliny są po prostu kolejnymi liczbami ciągu Fibonacciego. Podobnie jest w przypadku drzew. Bardzo dobrze widać to na poniższych schematach:



A co ze złotą spiralą w roślinach?

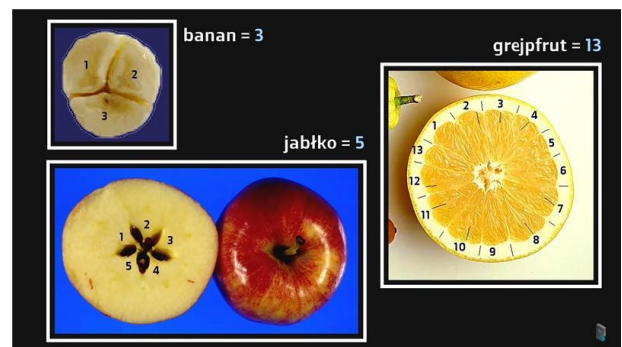
Odnajdziemy ją bez problemu w większości roślin: słoneczniki, szyszki, stokrotki, ananasy, róże, brokuły, kalafiori... można by tak wymieniać bez końca...





Nawet liczby lewo- i prawoskrętnych spiral są wyrazami ciągu Fibonacciego!

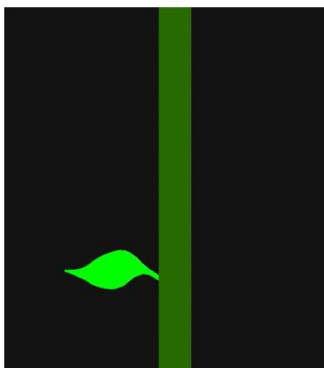
Wyrazy ciągu widać także w sekcjach owoców, czyli w ilości fragmentów na które podzielony jest dany owoc. Wzrost owoców daje przewidywalną matematycznie liczbę ich sekcji.



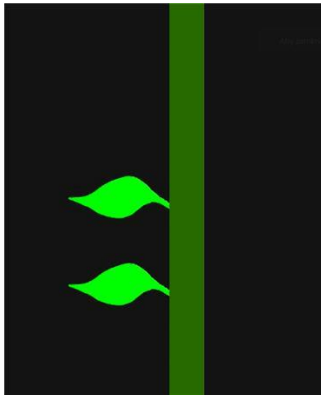
Dlaczego rośliny tak ściśle przestrzegają liczb Fibonacciego?

Otóż rozwój taki pozwala maksymalnie wykorzystać dostępne światło, które jest przecież potrzebne roślinom do procesu fotosyntezy.

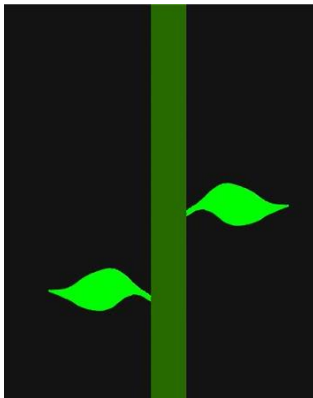
Wyobraźmy sobie, że jesteśmy rośliną.



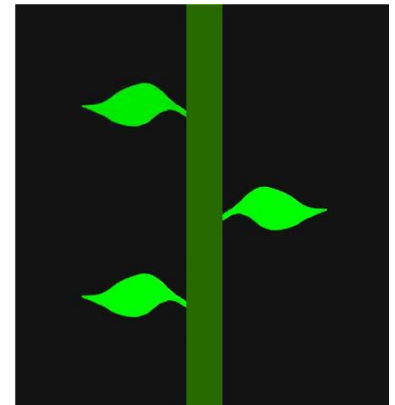
Wyrasta nam pierwszy liść. Jego miejsce na razie nie ma większego znaczenia. Czas zastanowić się, gdzie powinien wyrosnąć kolejny, aby oba liście miały dostęp do jak największej ilości światła.



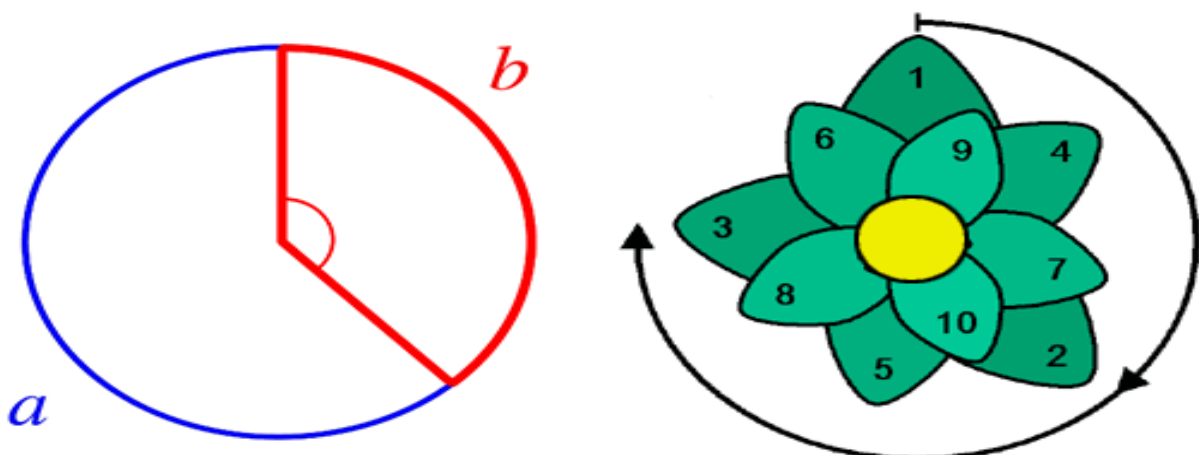
Jeśli wyrośnie tuż nad pierwszym on sam będzie miał dostęp do światła, ale całkowicie pozbawi pierwszego liścia możliwości zachodzenia fotosyntezy (ponieważ nie może ona zajść bez dostępności światła). To rozwiązanie się nie sprawdzi.



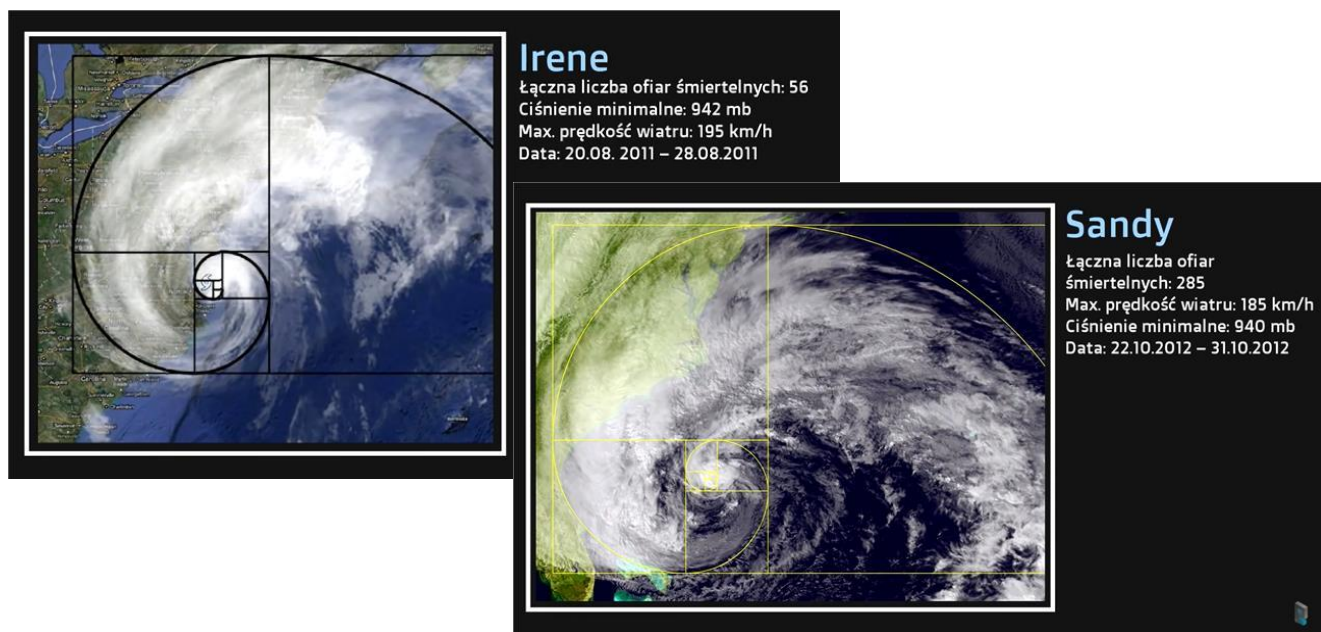
To może kąt 180° ? Z pozoru wydaje się to idealnym rozwiązaniem. Ale kolejny liść wyrośnie tuż nad tym pierwszym i całkowicie pozbawi go dostępu do światła. A więc i to rozwiązanie nie jest dobre!



Jeśli spojrzymy na ten problem od strony matematycznej okaże się, że żadna całkowita wartość kąta nie uchroni każdego liścia przed utratą dostępu do światła. Miara kąta musi więc być liczbą niewymierną. Nadal jednak nie wiadomo, dlaczego natura wybrała właśnie liczbę Φ i złoty kąt (w przybliżeniu $137,508^\circ$). To właśnie pod tym kątem wyrastają kolejne liście.



Na stronach internetowych znalazłyśmy informacje, że zgodnie ze złotą spiralą formują się również huragany. Oto ich przykłady:

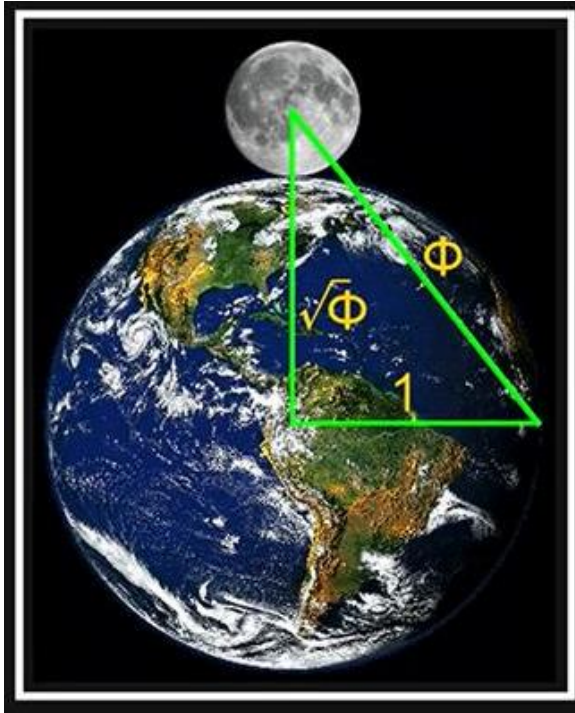


Złotą spiralę można dostrzec także w niektórych falach, szczególnie w tych wielkich oraz falach tsunami.



CIĄG FIBONACCIEGO W KOSMOSIE

Tak jak złotą proporcję i ciąg Fibonacciego można zaobserwować w życiu roślin na Ziemi, tak i w szerzej rozumianym wszechświecie można dostrzec podobne prawidłowości.



Na początek zauważono to w rozmiarze Ziemi względem Księżyca i odległości od tegoż satelity.

Przyjmijmy, że promień Ziemi ma długość 1. Wtedy odległość mierzona od środka Ziemi do środka Księżyca będzie pierwiastkiem kwadratowym z liczby Φ .

Wówczas przeciwprostokątna tego trójkąta będzie równa liczbie Φ .

Aby udowodnić długość przeciwprostokątnej skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa, czyli:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

W naszym przypadku a = promień Ziemi, czyli 1. Natomiast b = odległość mierzona od środka Ziemi do środka Księżyca, która wynosi $\sqrt{\Phi}$ (pierwiastek kwadratowy z liczby Φ). A c = przeciwprostokątna tego trójkąta (Φ).

Podstawmy więc teraz liczby do wzoru i sprawdźmy to!

$$1^2 + (\sqrt{\Phi})^2 = \Phi^2$$

$$L = 1 + (1,272)^2 \approx 2,618$$

$$P = (1,618)^2 \approx 2,618$$

$$L = P$$

Nasza teoria została więc potwierdzona (użyte przez nas liczby zostały znacząco zaokrąglone i służą tylko zaprezentowaniu zależności).

Złotą proporcję można także zaobserwować w naszym układzie planetarnym, czyli w Układzie Słonecznym.

Planet	Mean distance in million kilometers per NASA	Relative mean distance where Mercury=1
Mercury	57.91	1.00000
Venus	108.21	1.86859
Earth	149.60	1.38250
Mars	227.92	1.52353
Ceres	413.79	1.81552
Jupiter	778.57	1.88154
Saturn	1,433.53	1.84123
Uranus	2,872.46	2.00377
Neptune	4,495.06	1.56488
Pluto	5,869.66	1.30580
Total	[średnia odległość]	16.18736
Average		1.61874
Phi		1.61803
Degree of variance		(0.00043)

Widać ją w odległościach pomiędzy planetami.



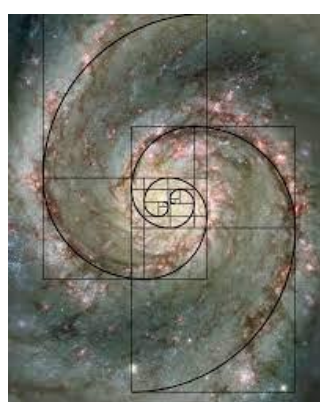
Weźmy średnie odległości w milionach kilometrów podane przez NASA. Przyjmijmy, że odległość między Słońcem a Merkurym to 1 i pozostałe odległości zostały przeliczone względem tej.

Można się zastanawiać czym jest Ceres? Jest to planeta karłowata krążąca wewnątrz pasa planetoid pomiędzy Marsem a Jowiszem.

Jeśli wyliczymy średnią odległość pomiędzy dwiema kolejnymi planetami otrzymamy (w mniejszym lub większym przybliżeniu) liczbę Φ .

Oddalając się jeszcze bardziej od naszej planety Ziemi zauważymy galaktyki spiralne.

Gdy się im dokładnie przyjrzymy, zauważymy spiralę Fibonacciego. Oto przykłady tego typu galaktyk:



CIĄG FIBONACCIEGO W MISTYCZYMIE

Liczby Fibonacciego obserwujemy również w wierzeniach wielu kultur i religii, czyli w mistycyzmie.

א = Aleph	1	י = Yod	10	ק = Kof	100
ב = Bet	2	כ = Chaf	20	ר = Reish	200
ג = Gimel	3	ל = Lamed	30	ש = Shin	300
ד = Dalet	4	מ = Mem	40	ת = Tav	400
ה = Hey	5	נ = Nun	50		
ו = Vav	6	ס = Samech	60		
ז = Zayin	7	ע = Ain	70		
ח = Het	8	פ = Peh	80		
ט = Tet	9	צ = Tzadik	90		
Final Letters:					
				ך = Final Chaf	20
				ם = Final Mem	40
				ן = Final Nun	50
				ף = Final Peh	80
				ץ = Final Tzadik	90

W **Kabale**, czyli mistycyzmie judaizmu, do każdej litery Biblii jest przypisana dana cyfra. Można więc zsumować wartości liczbowe poszczególnych wyrazów.

Jednak gdzie w tym wszystkim są liczby Fibonacciego? Otóż można

je znaleźć w poszczególnych ważnych dla judaizmu wyrazach:

- OGRÓD EDEN - suma wartości liczbowych tego wyrazu wynosi 144

- DRZEWO ŻYCIA W OGRODZIE EDEN - suma wartości liczbowych tego wyrazu wynosi 233

Te liczby (144,233) należą do ciągu Fibonacciego, natomiast podzielone przez siebie ($233:144=1,618$) dają liczbę Φ .

Z kolei suma wartości liczbowych nazwy DRZEWO WIEDZY I POZNANIA DOBRA I ZŁA to 932. Co prawda nie jest to liczba Fibonacciego, ale $932= 233*4$.

W wymiarach Arki Przymierza i Arki Noego widać liczbę Φ .

Arka Przymierza

Wj 25, 10:

I uczynią arkę z drzewa akacjowego;

*Jej długość będzie wynosiła **2,5 łokcia**;*

*jej wysokość **1,5 łokcia** i jej szerokość **1,5 łokcia**.*

$2,5: 1,5= 1,666... \approx \Phi$

Arka Noego

Rdz 6,15:

A oto, jak masz ją wykonać:

długość arki- 300 łokci,

***50** łokci jej szerokość*

*I wysokość jej **30** łokci.*

$50:30=1,666...\approx\Phi$

W Apokalipsie znajdziemy informację mówiącą o liczbie zbawionych.

Ap 7,4

I usłyszałem liczbę opieczętowanych:

***144** tysiące opieczętowanych*

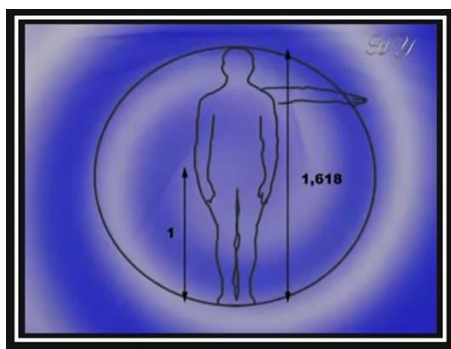
ze wszystkich pokoleń synów Izraela

$144 = 12^2$ - liczba Fibonacciego

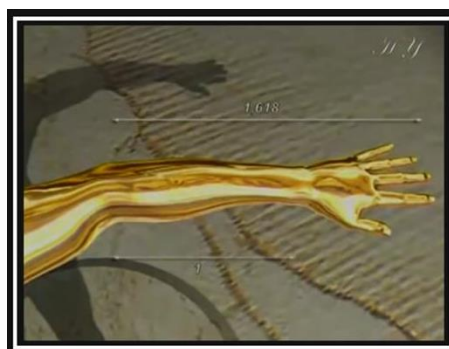
Tak więc liczba zbawionych 144 jest liczbą Fibonacciego. Jest również kwadratem liczby 12, zresztą tyle właśnie było pokoleń Izraela.

CIĄG FIBONACCIEGO W ANATOMII LUDZI

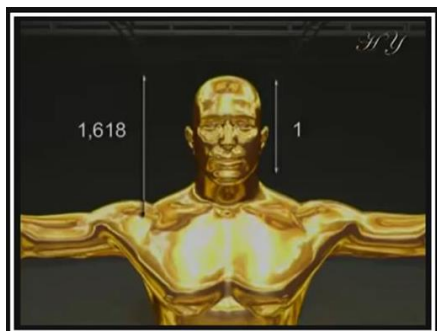
Złoty podział i liczbę Φ odnajdziemy także w proporcjach naszego ciała. Jednak u niewielu ludzi są one idealne, lecz zawsze będą zbliżone. Idealny złoty podział występuje w przypadku „idealnego” ludzkiego ciała.



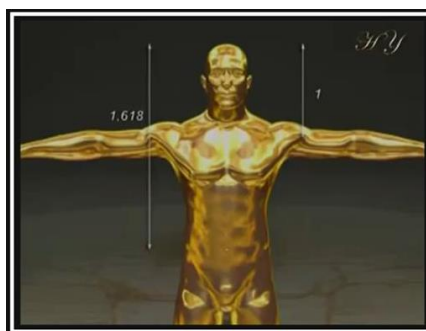
Stosunek wzrostu człowieka do odległości od stóp do pępka=1,618 (Φ).



Stosunek odległości od koniuszków palców do łokci do odległości od łokcia do nadgarstka=1,618 (Φ)



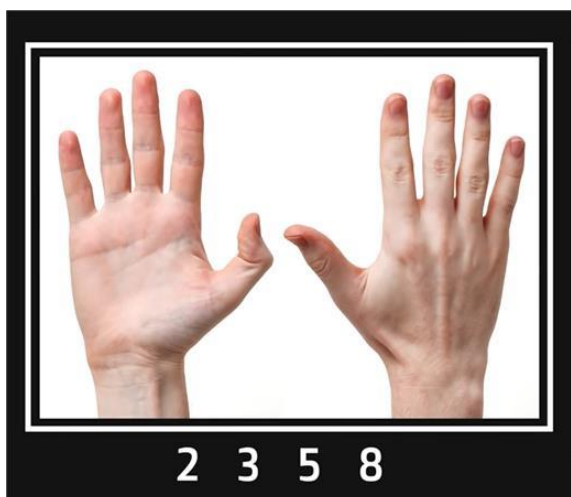
Stosunek odległości od ramion do czubka głowy do odległości od brody do czubka głowy=1,618 (Φ)



Stosunek odległości od pępka do czubka głowy do odległości od ramion do czubka głowy=1,618 (Φ)



Stosunek odległości od kolana do pępka do odległości od kolana do stopy= 1,618 (Φ)



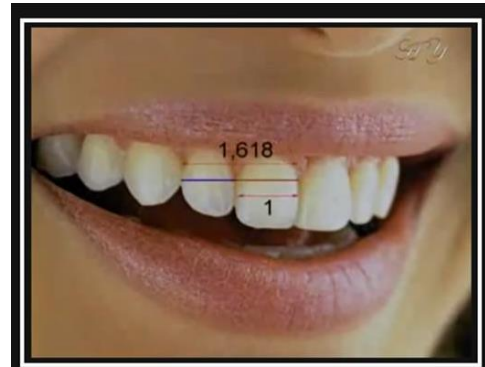
Masz dwie ręce, a każda składa się z pięciu palców. Osiem palców składa się z trzech palczków, dwa kciuki składają się z dwóch palczków.



Stosunki długości palców odpowiadają liczbom Fibonacciego. Długość środkowego palca do małego to liczba Φ .



Stosunek długości dwóch przednich zębów do ich wysokości=1,618... (Φ)



To też liczba Φ .



Stosunek wysokości twarzy do jej szerokości= 1,618... (Φ)



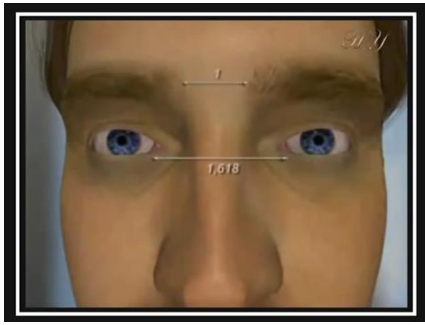
Odległość od brwi do ust do długości nosa= 1,618... (Φ)



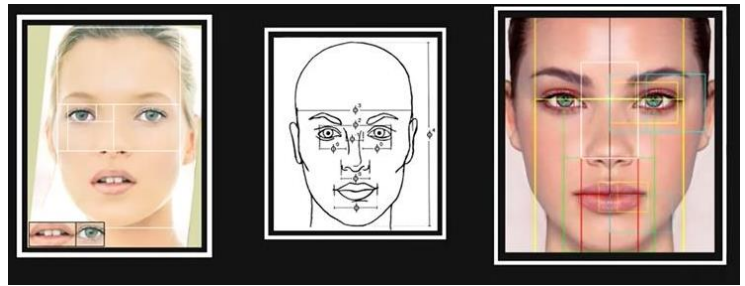
Stosunek wysokości twarzy do odległości od brwi do podbródka= 1,618 (Φ)



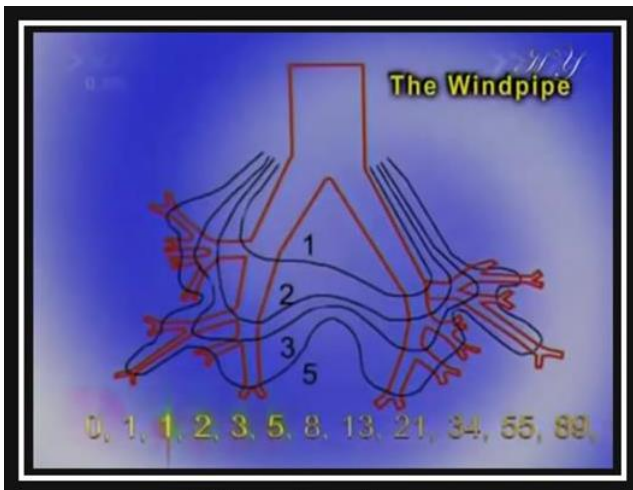
Szerokość ust do szerokości podstawy nosa= 1,618 (Φ)



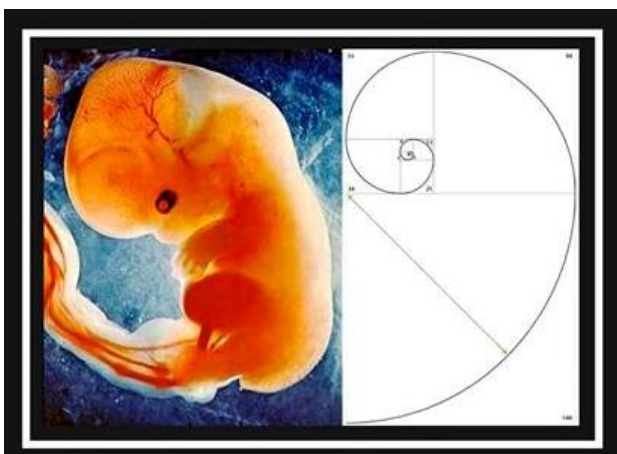
Stosunek odległości między oczyma do odległości między brwiami = 1,618 (Φ)



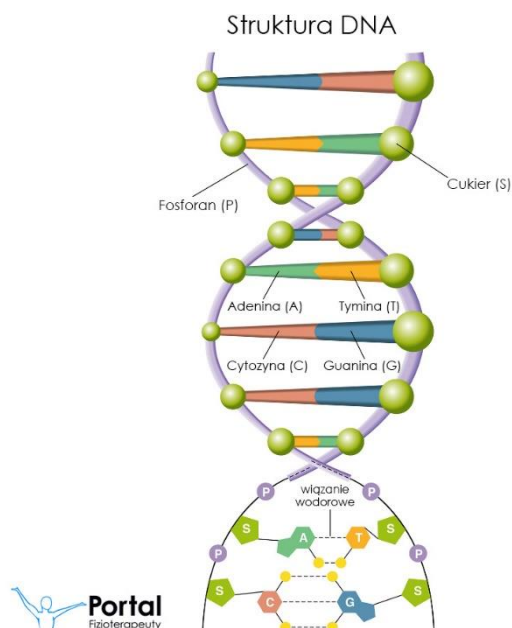
W ramach ciekawostki znaleźliśmy informację, że twarze osób, które prezentowały idealnie złoty podział i cechy wskazane powyżej zostały najwyżej ocenione przez ankietowanych płci przeciwnej.



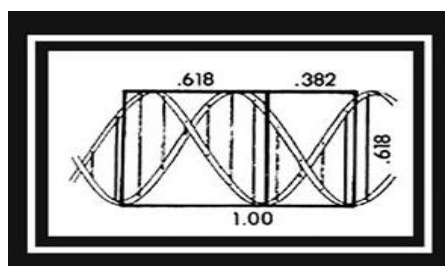
Taka sama zasada jak przy wzroście roślin obowiązuje również w tworzeniu się rozgałęzień w naszych płucach.



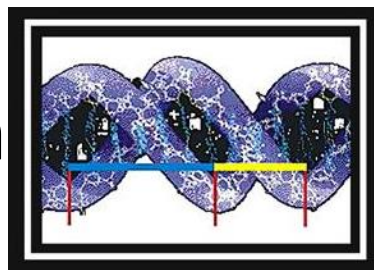
←Tu także jest widoczna spirala Fibonacciego.



Nawet spirale DNA zachowują złote proporcje. Molekuła DNA ma 34 angstremy długości na 21 angstromów szerokości dla każdego pełnego cyklu podwójnej helisy DNA.

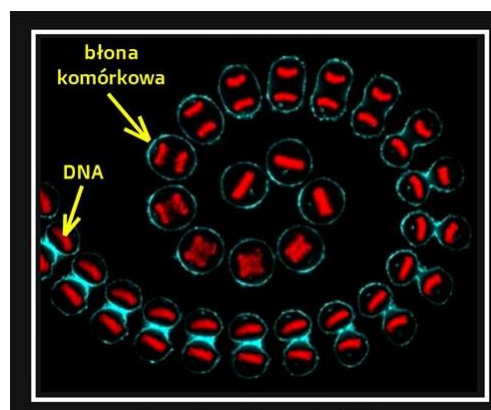


$$\text{\AA} = 10^{-10} \text{ m}$$

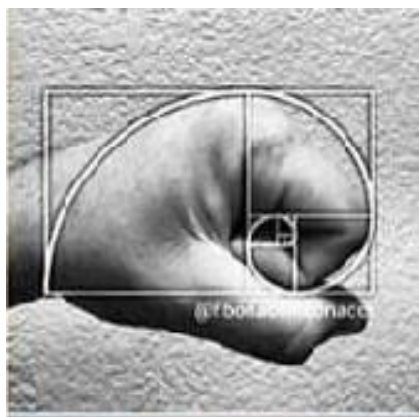


Podział komórki rakowej

Na zdjęciu użyto po klatkowej mikroskopii konfokalnej aby pokazać dokonujący się podział komórki rakowej i po prostu mitozę komórkową. DNA zaprezentowano w kolorze czerwonym, a błona komórkowa ma kolor niebiesko-zielony, turkusowy. Okrągła komórka w środku spirali ma średnicę 20 mikronów. Zdjęcie jest autorstwa Kuan - Chung Su (LRI).



Nie kończy się to na tych przykładach! Jest ich o wiele więcej! Oto niektóre z nich:



Przez zaciśniętą pięść człowieka można poprowadzić spiralę Fibonacciego.



Złotą spiralę można też odnaleźć w kształcie naszego ucha.

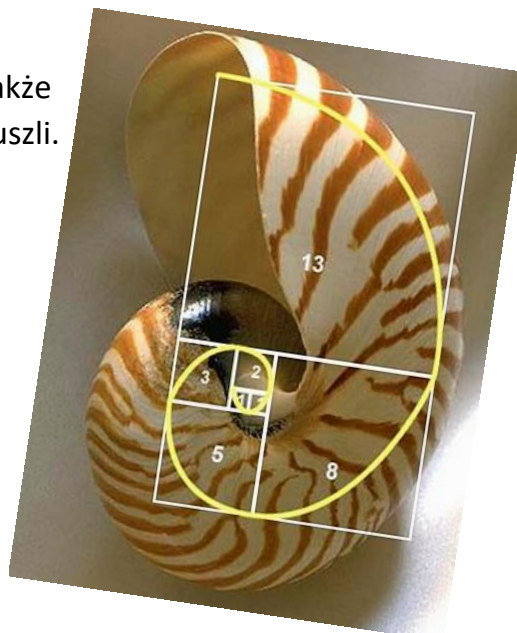
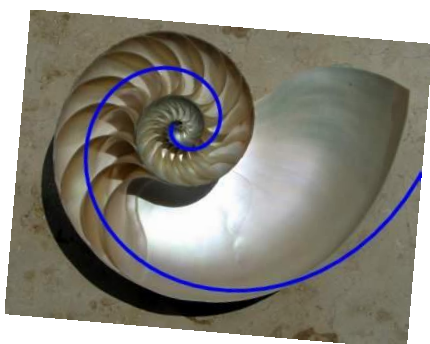


W naszym mózgu też można zobaczyć to niezwykle przywiązanie natury do złotej proporcji i spirali!

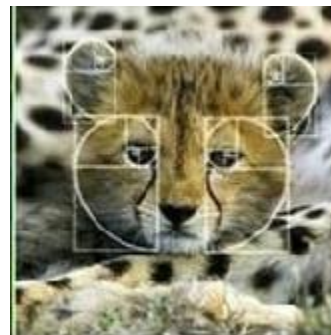
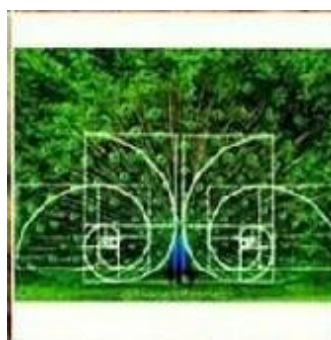
CIĄG FIBONACCIEGO W ŚWIECIE ZWIERZĄT

Tak jak w ciele człowieka w wielu miejscach widać złotą proporcję, tak i w świecie zwierząt można ją zobaczyć.

Złota spirala występuje także w kształcie niektórych muszli.

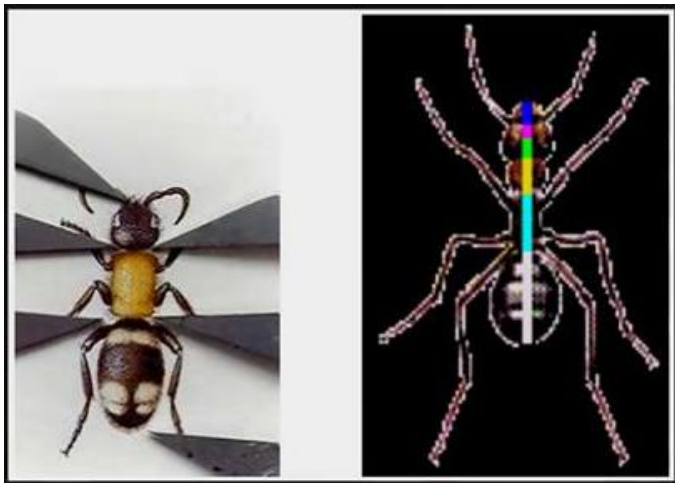


Tę prawidłowość można również dostrzec w ogonach...



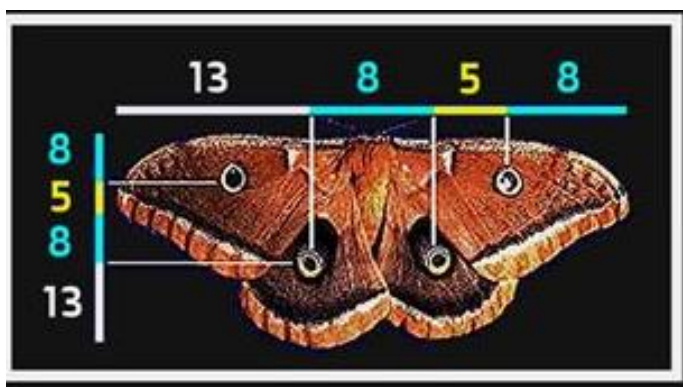
... oraz innych częściach ciała zwierząt.

W ciele zwierząt można także odnaleźć złotą proporcję.

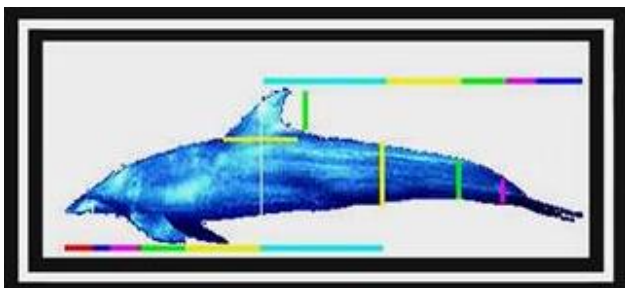


W stosunku głowy do tułowia
i do odwłoku mrówki.

Widać ją również na skrzydłach motyla...



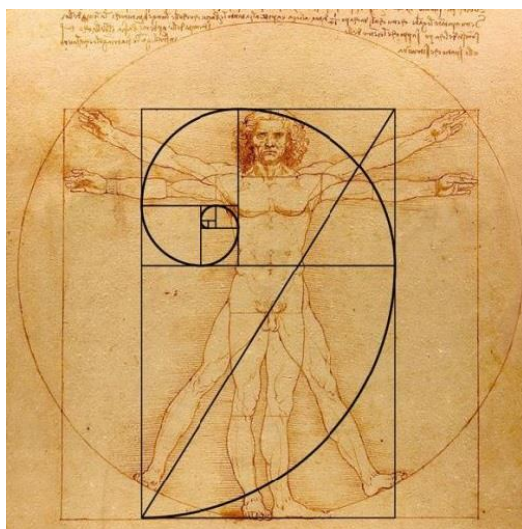
... oraz także w ciele niektórych morskich zwierząt, na przykład delfinów.



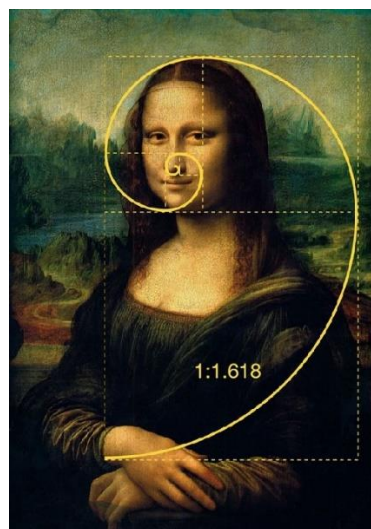
CIĄG FIBONACCIEGO W SZTUCE

Złotą spiralę i złoty podział można także odnaleźć w sztuce, między innymi w malarstwie i muzyce. Zgodnie z nią zostało stworzone wiele bezcennych dzieł znanych artystów.

MALARSTWO



Człowiek witruwiański
Leonardo da Vinci



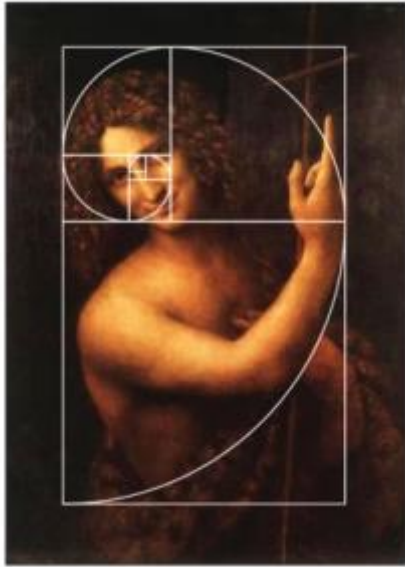
Mona Lisa
Leonardo da Vinci



Dziewczyna z perłą
Jan Vermeer

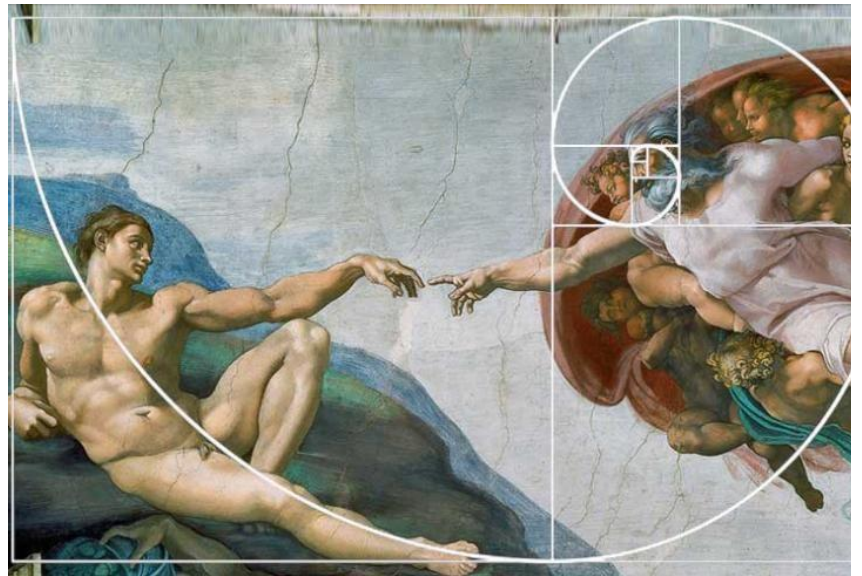


Madonna Aldobrandini
Rafaël Santi



Jan Chrzciciel

Leonardo da Vinci



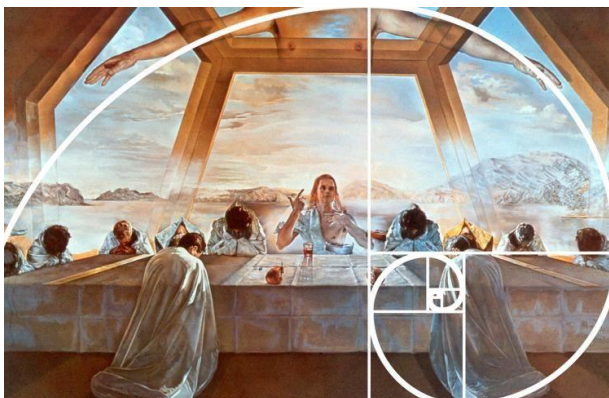
Stworzenie Adama

Michał Anioł



Gwiaździsta
noc

Vincent van
Gogh

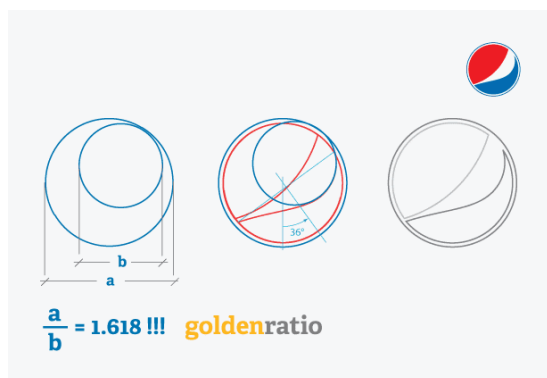


Ostatnia wieczerza

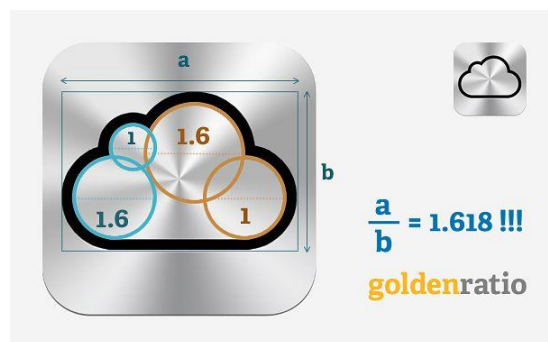
Salvador Dali

LOGA

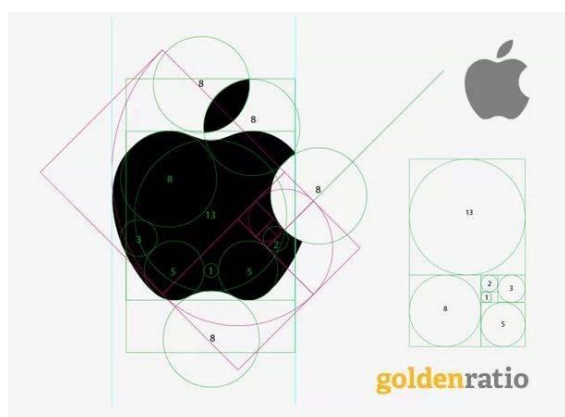
Warto zaznaczyć, że rzeczy zawierające spiralę Fibonacciego i złotą proporcję są przyjemne w odbiorze i bardziej zapamiętywane. Dlatego wielu projektów log korzysta z tego triku by przyciągnąć uwagę odbiorców. Oto przykłady takich symboli znanych marek.



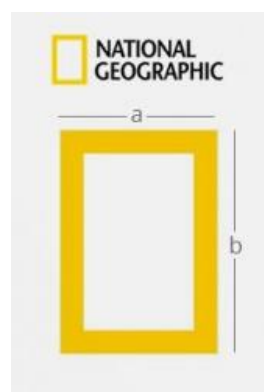
Logo Pepsi



Logo iCloud



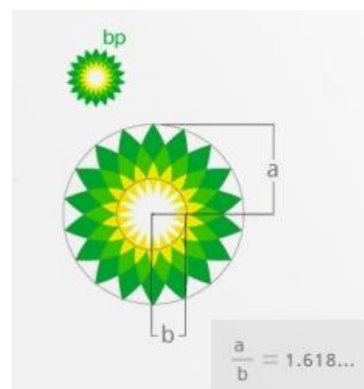
Logo Apple



Logo National Geographic



Logo Toyoty



Logo bp

Muzyka

Liczby Fibonacciego, a także złotą proporcję można odnaleźć również w muzyce czy instrumentach muzycznych.

Złoty podział występuje w skrzypcach.



Kanon D-Dur Pachelbela



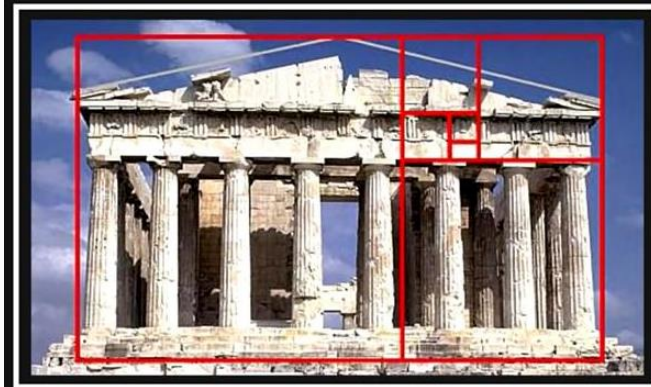
Współcześnie odnajdziesz fragmenty kanonu w utworach:

Vitamin C - The Graduation Song Aerosmith - Cryin' The Original Caste - One Tin Soldier
Blues Traveler - Hook Green Day - Basket Case Matchbox 20 - Push Better than Ezra - Good
Bush - Machine Head U2 - With or Without You Natalie Imbruglia - Torn
Avril Lavigne - Sk8tr Boy Twisted Sister - We're Not Gonna Take It No Use for a Name -
Laverne and Shirley Bob Marley and the Wailers - Woman No Cry The Beatles - Let It Be

Jak widać na ilustracji w układzie nut w Kanonie D-Dur Pachelbela również występują liczby Fibonacciego. Jest on bardzo przyjemny dla ucha i z tego powodu wielu twórców używa fragmentów tego utworu w swoich piosenkach.

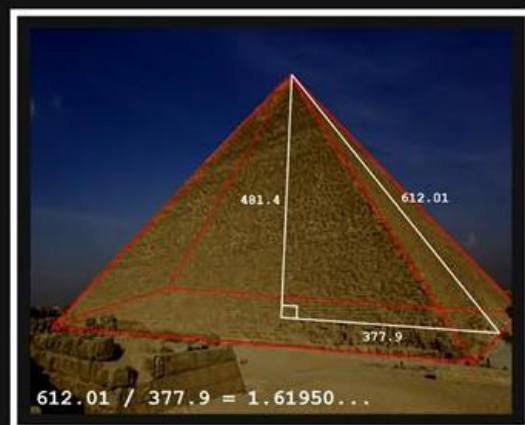
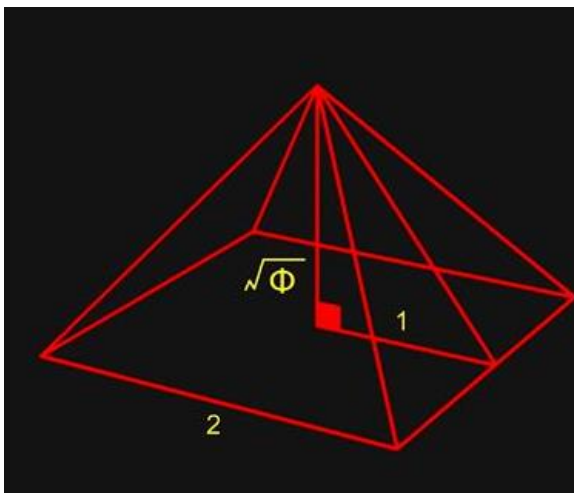
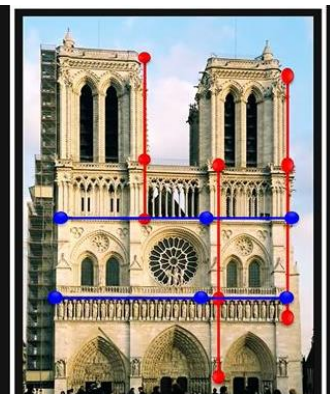
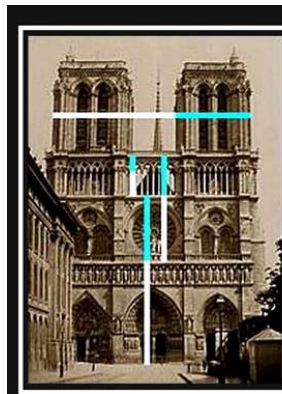
CIĄG FIBONACCIEGO W ARCHITEKTURZE

Tak samo jak w sztuce i muzyce także w architekturze można odnaleźć elementy ciągu Fibonacciego i złotą proporcję.



Partenon, Grecja

Katedra Notre Dame,
Francja



Piramidy, Egipt

CIĄG FIBONACCIEGO W MATEMATYCE

Modulo 7 liczb Fibonacciego

A teraz dokonajmy reszty z dzielenia wyrazów ciągu Fibonacciego przez dowolną liczbę całkowitą. Niech to będzie 7. Wyznaczenie reszty z dzielenia w matematyce nazywamy „modulo”.

MODULO 7 LICZB FIBONACCIEGO	
Wyraz nr 1: $1 \bmod 7 = 1$	Wyraz nr 17: $1597 \bmod 7 = 1$
Wyraz nr 2: $1 \bmod 7 = 1$	Wyraz nr 18: $2584 \bmod 7 = 1$
Wyraz nr 3: $2 \bmod 7 = 2$	Wyraz nr 19: $4181 \bmod 7 = 2$
Wyraz nr 4: $3 \bmod 7 = 3$	Wyraz nr 20: $6765 \bmod 7 = 3$
Wyraz nr 5: $5 \bmod 7 = 5$	Wyraz nr 21: $10946 \bmod 7 = 5$
Wyraz nr 6: $8 \bmod 7 = 1$	Wyraz nr 22: $17711 \bmod 7 = 1$
Wyraz nr 7: $13 \bmod 7 = 6$	Wyraz nr 23: $28657 \bmod 7 = 6$
Wyraz nr 8: $21 \bmod 7 = 0$	Wyraz nr 24: $46368 \bmod 7 = 0$
Wyraz nr 9: $34 \bmod 7 = 6$	Wyraz nr 25: $75025 \bmod 7 = 6$
Wyraz nr 10: $55 \bmod 7 = 6$	Wyraz nr 26: $121393 \bmod 7 = 6$
Wyraz nr 11: $89 \bmod 7 = 5$	Wyraz nr 27: $196418 \bmod 7 = 5$
Wyraz nr 12: $144 \bmod 7 = 4$	Wyraz nr 28: $317811 \bmod 7 = 4$
Wyraz nr 13: $233 \bmod 7 = 2$	Wyraz nr 29: $514229 \bmod 7 = 2$
Wyraz nr 14: $377 \bmod 7 = 6$	Wyraz nr 30: $832040 \bmod 7 = 6$
Wyraz nr 15: $610 \bmod 7 = 1$	Wyraz nr 31: $1346269 \bmod 7 = 1$
Wyraz nr 16: $987 \bmod 7 = 0$	Wyraz nr 32: $2178309 \bmod 7 = 0$

Reszta z dzielenia $1:7$ (ani jedna siódemka nie mieści się w jedynce) więc reszta to 1. W ósemce mieści się jedna siódemka i reszta to 1. W trzynastce też mieści się jedna siódemka i reszta to 6. I tak dalej wyznaczamy modulo 7 dla kolejnych liczb ciągu.

Zauważymy występowanie cykliczności. Widzimy sekcję tych samych liczb co 16 wyrażen ciągu. Ten okres liczbowy będzie się tak powtarzał co 16 w nieskończoność.

Taki okres w matematyce nazywamy okresem Pasano. Co ciekawe, Pisano to przydomek nie kogo innego jak Fibonacciego. Ta zależność jest przykładem fraktalnej natury ciągu Fibonacciego.

Aby się upewnić, sprawdziliśmy także modulo 2 tych liczb.

MODULO 2 LICZB FIBONACCIEGO	
Wyraz nr 1: 1 mod 2= 1	Wyraz nr 17: 1597 mod 2= 1
Wyraz nr 2: 1 mod 2= 1	Wyraz nr 18: 2584 mod 2= 0
Wyraz nr 3: 2 mod 2= 0	Wyraz nr 19: 4181 mod 2= 1
Wyraz nr 4: 3 mod 2=1	Wyraz nr 20: 6765 mod 2= 1
Wyraz nr 5: 5 mod 2= 1	Wyraz nr 21: 10946 mod 2= 0
Wyraz nr 6: 8 mod 2= 0	Wyraz nr 22: 17711 mod 2= 1
Wyraz nr 7: 13 mod 2= 1	Wyraz nr 23: 28657 mod 2= 1
Wyraz nr 8: 21 mod 2=1	Wyraz nr 24: 46368 mod 2= 0
Wyraz nr 9: 34 mod 2= 0	Wyraz nr 25: 75025 mod 2= 1
Wyraz nr 10: 55 mod 2= 1	Wyraz nr 26: 121393 mod 2= 1
Wyraz nr 11:89 mod 2= 1	Wyraz nr 27: 196418 mod 2= 0
Wyraz nr 12: 144 mod 2= 0	Wyraz nr 28: 317811 mod 2= 1
Wyraz nr 13: 233 mod 2= 1	Wyraz nr 29: 514229 mod 2= 1
Wyraz nr 14: 377 mod 2= 1	Wyraz nr 30: 832040 mod 2= 0
Wyraz nr 15: 610 mod 2= 0	Wyraz nr 31: 1346269 mod 2= 1
Wyraz nr 16: 987 mod 2=1	Wyraz nr 32: 2178309 mod 2= 1

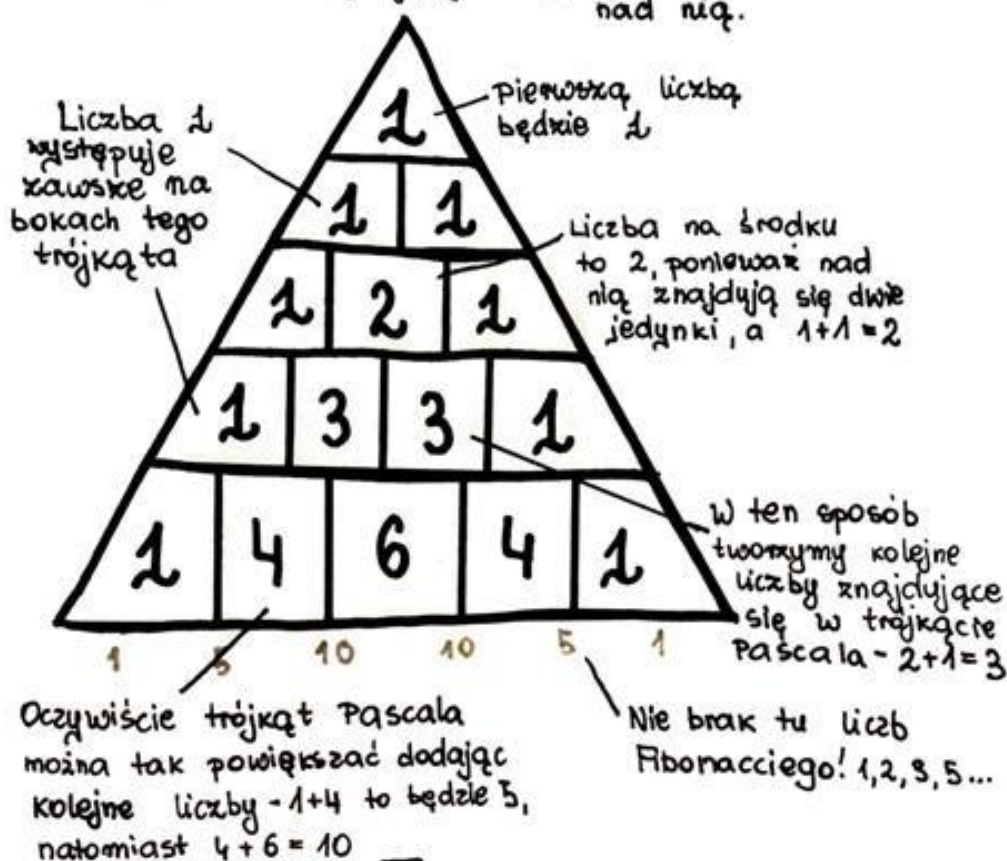
Okresy Pasano w tym przypadku mają długość 3.



Kolejnym przykładem fraktalnej natury jest zapis w systemie binarnym kolejnych liczb Fibonacciego. Dla lepszej przejrzystości każde zero zastąpimy białym punktem, a każdą jedynekę czarnym. Stworzymy w ten sposób wydłużający się ku dołowi trójkąt którego elementy powtarzają się fraktalnie.

TRÓJKĄT PASCALA

Każda liczba w tym trójkącie jest sumą dwóch liczb znajdujących się bezpośrednio nad nią.



Podobno odkryto go na przełomie XI i XII w. w Chinach i jednocześnie przez Omara Chajjama. Jest nazywany trójkątem Pascala, ponieważ to Blaise Pascal dokonał ważnych odkryć z nim związanych, za to sam trójkąt odkryto dużo wcześniej.

Zdjęcie widoczne powyżej przedstawia tak zwany trójkąt Pascala. Zasada tworzenia kolejnych jego liczb jest bardzo podobna do tworzenia kolejnych liczb naszego ciągu: na samej górze znajduje się 1, poniżej dwie jedynki. $1=1=2$. Poniższa liczba to 2. Teraz z obu stron poniżej napiszemy 3. Dlaczego? Bo $1+2=3$. Następnie $1+3=4$, a $3+3=6$. I tak dalej, i tak dalej. Ów trójkąt zawiera także liczby Fibonacciego, między innymi 1, 2, 3 albo 5.

BADANIE PROPORCJI W CIELE CZŁOWIEKA

Nasze badanie proporcji w ludzkim ciele zostało przeprowadzone na kilku osobach dorosłych, lecz większość z badanych to nastolatki, które są dopiero w okresie wzrostu.

Jako złotą proporcję uznajemy (ze względu na przybliżenie i ewentualne błędy w pomiarach) stosunek od 1,550-1,700. W tej sytuacji przyznajemy punkt. W przeciwnym razie osoba nie otrzymuje punktu. Poniżej prezentujemy na tej podstawie wyniki eksperymentu. Wszystkie odległości zostały wyrażone w centymetrach.

	Osoba 1	Osoba 2	Osoba 3	Osoba 4	Osoba 5	Osoba 6	Osoba 7	Osoba 8	Osoba 9	Osoba 10
Wzrost:	150	149	149	156	168	155	163	164	175	161
Od stóp do pępka:	88	91	92	99	104	95	101	97	109	98
Stosunek:	1,704	1,637	1,619	1,57	1,615	1,632	1,613	1,69	1,61	1,64
Punkty:	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Od pępka do czubka głowy:	62	57	57	58	68	58	62	64	66	63
Od ramienia do czubka głowy:	24	30	47	37	41	25	32	25	38	30
Stosunek:	2,583...	1,9	1,212	1,56	1,658	2,32	1,937	2,56	1,7	2,1
Punkty:	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
Od pępka do kolana:	49	45	48	54	53	47	54	53	61	54
Od kolana do stopy:	42	40	48	50	52	47	47	44	38	44
Stosunek:	1,166...	1,125	1	1,08	1,019	1	1,148	1,2	1,6	1,22
Punkty:	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
Punkty (łącznie)	0	1	1	2	2	1	1	1	3	1

W przypadku naszych badanych zaobserwowaliśmy tylko jedną osobę, której budowa jest w 100% zgodna ze złotym podziałem. Za to u każdego była ona widoczna w stosunku wzrostu do odległości od pępka do stopy. Wyjątkiem jest Osoba 1, której mimo to zabrakło do perfekcji bardzo niewiele. U nas zaledwie 10 % badanych miało budowę całkowicie zgodną ze złotą proporcją, jednak rozumiemy, że próbka nie jest reprezentatywna (niestety z powodu pandemii i zamknięcia szkół przeprowadzenie badania na większej liczbie osób okazało się niemożliwe) i w ogóle społeczeństwa wartość ta może być zupełnie inna.

EKSPERYMENT

W Internecie znalazłyśmy stwierdzenie, że ludziom bardziej w pamięć zapadają zdjęcia, które zawierają spiralę Fibonacciego. Postanowiłyśmy to sprawdzić.

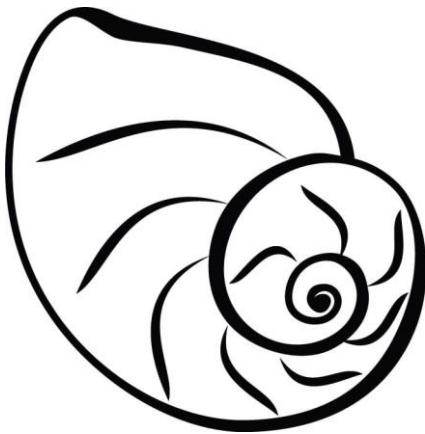
Nasz eksperyment polegał na tym, że pokazywałyśmy osobom dziesięć par obrazków, z których jeden zawierał coś związanego z Fibonaccim, a drugi nie. Poniżej prezentujemy te zdjęcia.



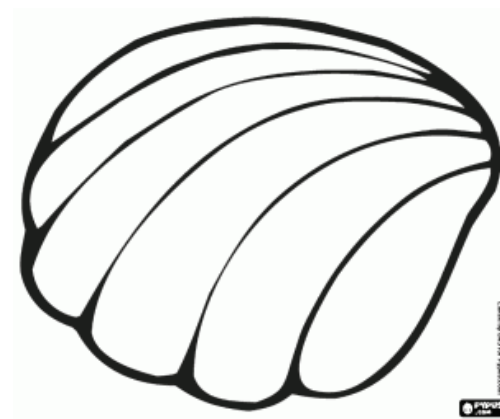
Jest spirala.



Nie ma spirali.



Jest spirala.



Nie ma spirali.



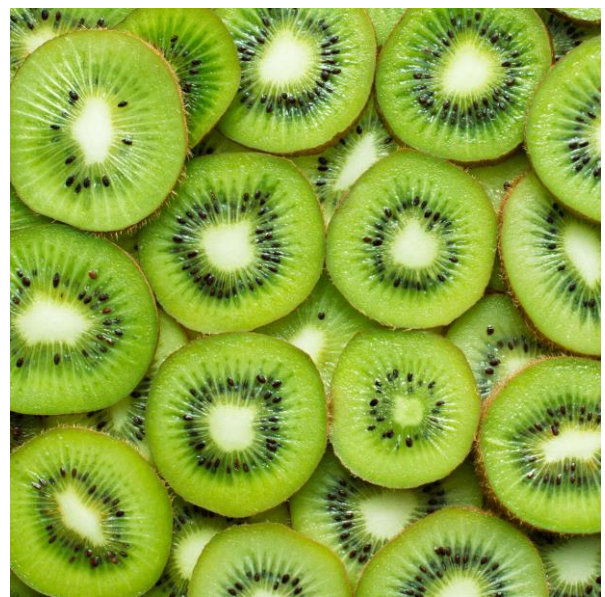
Jest spirala.



Nie ma spirali.



Jest spirala.



Nie ma spirali.



Jest spirala.



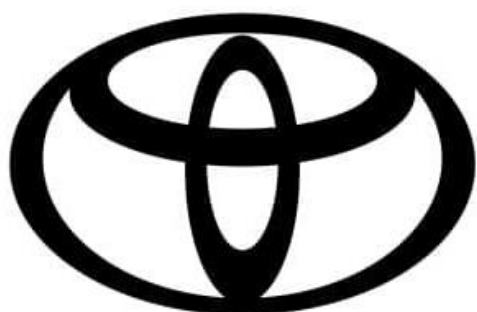
Nie ma spirali.



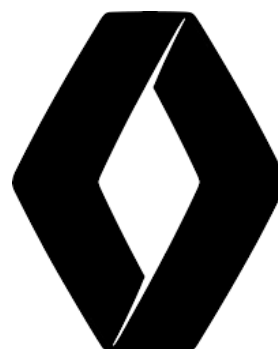
Nie ma złotego podziału.



Jest złoty podział.



Jest złoty podział.



Nie ma złotego podziału.



Nie ma spirali.



Jest spirala.



Jest złoty podział.



Nie ma złotego podziału.



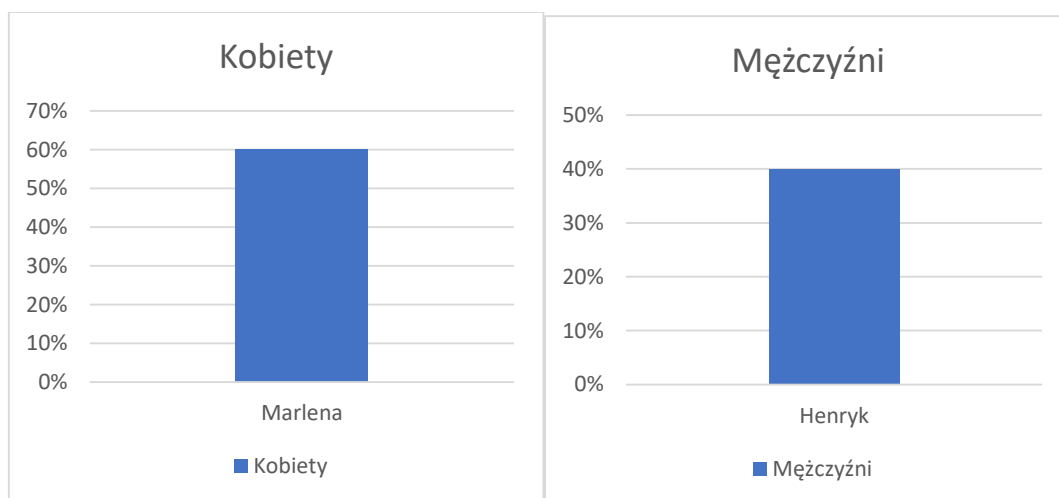
Jest spirala.



Nie ma spirali.

Dzieci do lat 8 (kat.1)

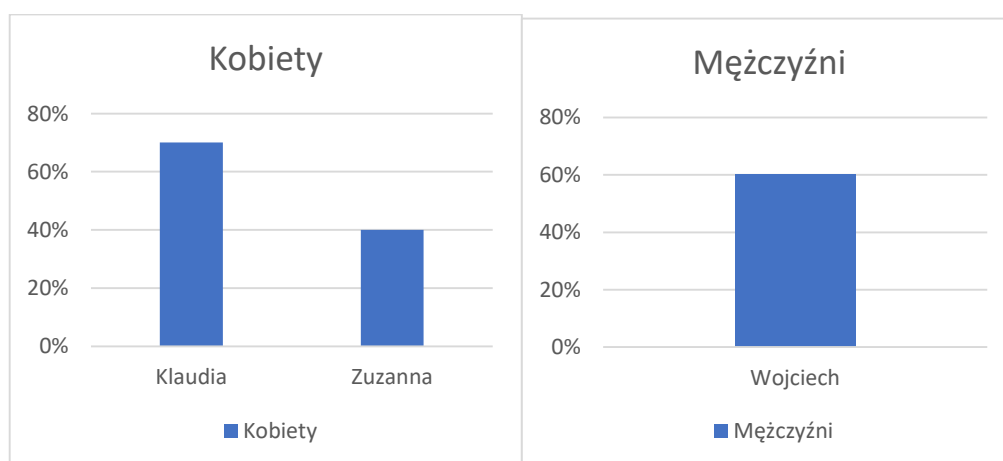
Badanych osób: 2, w tym 1 kobieta i 1 mężczyzna



Średnia kobiet w tej kategorii to 60 %, a średnia mężczyzn to 40 %. W takim razie średni wynik w tej kategorii wiekowej to 50%. Zdajemy sobie sprawę z tego, że ilość badanych nie jest reprezentatywna i wiemy, że przewaga kobiet może być skutkiem anomalii ze względu na małą ilość osób. Wynika ona z pandemii i możliwości przeprowadzenia badań wyłącznie na naszych rodzinach.

Dzieci do lat 11 (kat.2)

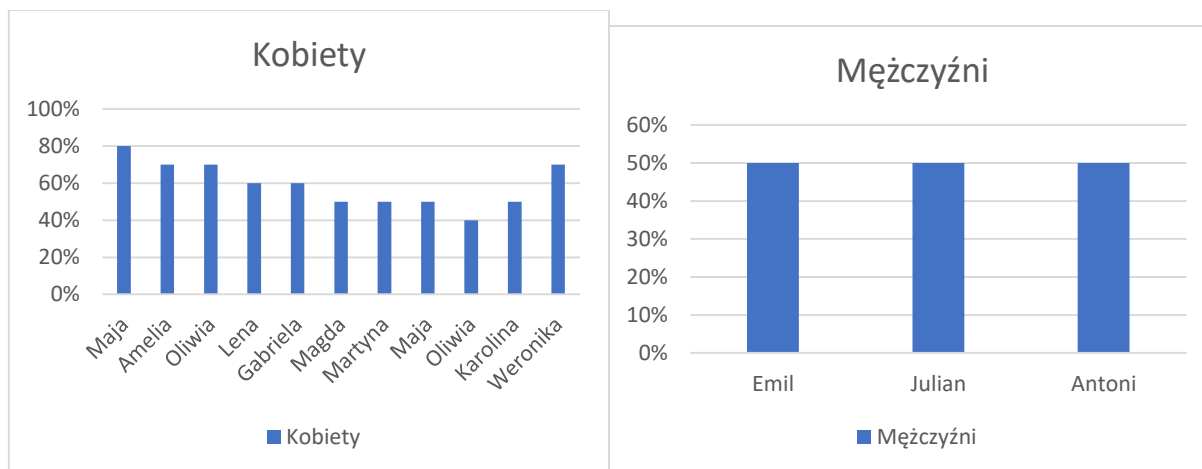
Badanych: 3, w tym 2 kobiety i 1 mężczyzna



Średnia kobiet w tej kategorii to 55%, a mężczyzn to 60%. Średni wynik w tej kategorii wynosi około 57%. Wyższy wynik uzyskali mężczyźni.

Nastolatki do lat 18 (kat.3)

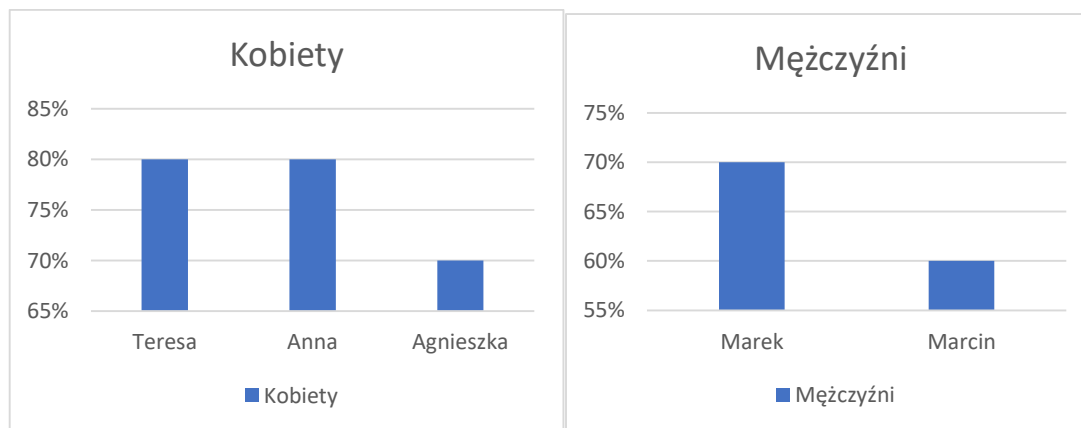
Badanych: 14, w tym 11 kobiet i 3 mężczyzn



Średni wynik kobiet w tej kategorii to 59%, a mężczyzn 50%. Średni wynik w tej kategorii wynosi więc 57%. Wyższa liczba badanych jest wynikiem tego, iż jest to kategoria wiekowa przyjaciół z naszych klas.

Dorośli od lat 18 (kat.4)

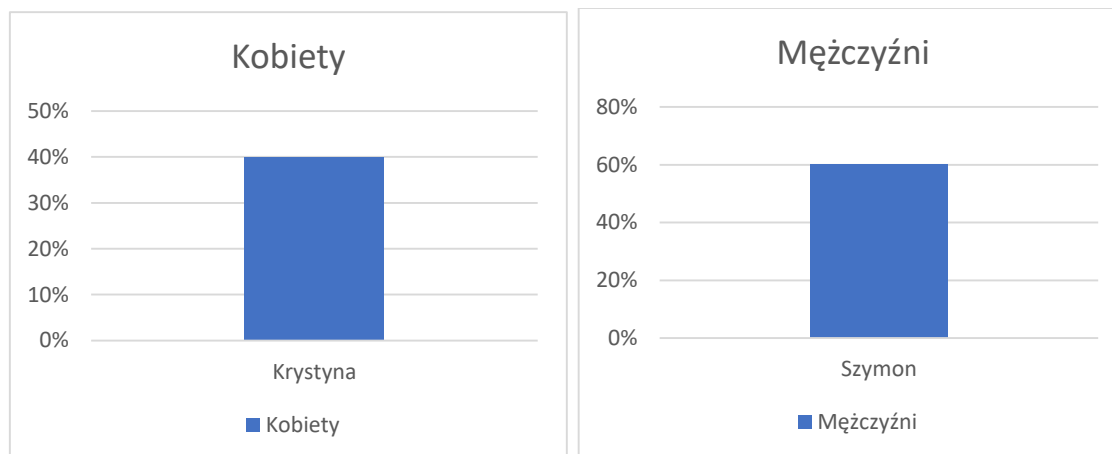
Badanych: 5, w tym 3 kobiety i 2 mężczyzn



Średni wynik w tej kategorii kobiet to 77%, a mężczyzn 65%. Średni wynik w tej kategorii wynosi więc 72%.

Starsi powyżej 60 r. życia (kat.5)

Badanych:2, w tym 1 kobieta i 1 mężczyzna



Średni wynik kobiet w tej kategorii to 40%, a mężczyzn- 60%. Średni wynik w tej kategorii wynosi więc 50%.

W naszym eksperymencie zbadaliśmy łącznie 26 osób, w tym 18 kobiet i 8 mężczyzn. Średni wynik wszystkich badanych to 59%. Średni wynik kobiet wyniósł 60,5%, a mężczyzn 55%. Widać tutaj sporą przewagę kobiet, jednakże może być ona wynikiem zdarzeń losowych lub zbyt małej grupy badanych.

Skoro średni wynik to prawie 60% można uznać, że teoria została potwierdzona, chociaż nie u wszystkich działa.

Poniżej prezentujemy ile osób na 26 badanych wskazało poprawnie dany obraz:

		Ilu mężczyzn? (na 8)	Ile kobiet? (na 18)	Ile razem? (na 26)
I para	KOSMOS	4	4	8
II para	MUSZLE	5	12	17
III para	KAKTUSY	3	6	9
IV para	OWOCE	2	11	13
V para	NATURA	5	11	16
VI para	LOGA	2	11	13
VII para	LOGA SAMOCHODÓW	6	8	14
VIII para	OBRAZY	7	16	23
IX para	ZABYTKI	4	14	18
X para	POGODA	4	9	13

Najwięcej osób wybrało obraz ze spiralą w VIII parze, czyli tam gdzie przedstawiono obrazy, a najmniej w I parze, czyli w obrazkach dotyczących kosmosu.

PODSUMOWANIE

W ramach podsumowania chcielibyśmy dodać parę słów. Szukanie informacji do przygotowania pracy było bardzo interesujące i niezmiernie ciekawe. Oprócz tematu pracy znalazłyśmy też informacje z innych kategorii, między innymi biologii czy anatomii ludzi. Poznałyśmy też wiele niesamowitych mechanizmów działania naszego świata. W przyszłości planujemy zgłębiać tematy związane z tym zagadnieniem. Cieszymy się, że praca pomogła nam odkryć nowe zainteresowania. Poświęciłyśmy kilkadziesiąt godzin, by ją przygotować, ale jesteśmy bardzo zadowolone z efektu końcowego. Chcielibyśmy też podziękować za pomoc Pani Małgorzacie Niewidok oraz Pani Annie Tomasik, które bardzo pomogły w wykonaniu naszej pracy oraz wszystkim badanym osobom, które poświęciły swój czas, by uczestniczyć w naszym projekcie. Bardzo dziękujemy również naszym rodzicom, przyjaciółom i wszystkim, którzy pomogli w napisaniu pracy za odpowiedzi oraz motywację do działania.

BIBLIOGRAFIA

- Strona 1 (zdj. Fibonacciego) <https://www.wetheitalians.com/from-italy/leonardo-pisano-fibonacci>
- Strona 3 (zdj.Fibonacciego) <https://sites.ps.uci.edu/mathceo/evolutionary-biology/2>
- Rozdział „Geometria Fibonacciego” <https://bigosmatematyczny.pl/zlota-proporcja/>
- Strona 4 (zdj. Królika) <https://pl.pinterest.com/zplonka/kr%C3%B3liki/>
- Strona 4 (schemat ciągu) <https://nnka.wordpress.com/2016/10/21/zadanie-o-rozmnazaniu-krolikow-ciag-liczb-fibonacciego-dowodem-na-istnienie-reinkarnacji/>
- Strona 6 (zdjęcie pentagramu) <http://pl.pracowniakonkrety.in/jak-narysowac-pentagram/>
- Strona 5 (spiralą Fibonacciego)- rysunek własny
- Strona 6 (złoty trójkąt)- rysunek własny
- Strona 5 (tworzenie kolejnych wyrazów) <https://poznajrynek.pl/jak-wyznaczac-zniesienia-fibonacciego/>
- „Ciąg Fibonacciego” „Właściwości liczb ciągu”
https://pl.wikipedia.org/wiki/Ci%C4%85g_Fibonacciego
- Strona 9 (zdjęcie liczby Φ)
<http://www.pg17.idl.pl/projekty/Przyroda/LiczbaFi.pdf>
- Liczba Φ https://www.youtube.com/watch?v=yy_E-dcfTzQ
- Zastosowania ciągu Fibonacciego/ Większość zdjęć z działu „Zastosowania ciągu Fibonacciego” to zrzuty ekranu z tego filmu.
<https://www.youtube.com/watch?v=wb7kPaM8cfg>
- Strona 12 (zdjęcie kalii) <https://www.castorama.pl/kalia-ins-1048558.html>
- Strona 12 (zdjęcie wilczomlecza) <https://www.swiatkwiatow.pl/wilczomlecz-lsniacy--euphorbia-millii-id477.html>
- Strona 12 (trójlist- zdjęcie)
<https://www.ogrodkroton.pl/towar.4178.trojlist.bialy.-trillium.grandiflorum.html>
- Strona 12 (zdjęcie orlika) <https://fajnyogrod.pl/porady/kwiat-orlik-opis-odmiany-wymagania-pielegnacja/>
- Strona 12 (krwiowiec kanadyjski- zdjęcie)
<https://sklep.oczkowodne.net/p490,krwiowiec-kanadyjski.html>
- Strona 12 (nagietek- zdjęcie) <https://allegro.pl/oferta/nagietek-lekarski-mieszanka-miododajny-7769551130>

Strona 13 (zdj. Słonecznika)

<https://www.grupatopex.com/weztonawarsztat/ogrodnicy/slonecznik-zwyczajny-wysiew-stanowisko-pielegnacja-wymagania/>

Strona 13 (zdj. Stokrotki) <https://www.weranda.pl/ogrody/rosliny/Stokrotka-krolowa-polskich-lak>

Strona 15 (zdj. Lili wodnej) <https://sadzawka.pl/Nymphaea-Attraction-Lilia-wodna>

Strona 15 (złoty kąt) <https://bigosmatematyczny.pl/zlota-proporcja/>

Strona 16 (2 zdj. Fali) <https://www.wodkany.pl/trzy-najciekawsze-krzywe-w-hydraulice/>

Strona 16 (1 zdj. Fali) <https://www.swiatmatematyki.pl/index.php?p=1036>

Strona 18 (zdj. Planet) <https://fajnepodroze.pl/ciekawostki-uklad-sloneczny/>

Strona 18 (galaktyka zdj. 1)

<http://jaorazmojapasja.blogspot.com/2019/01/ciag-fibonacciego.html>

Strona 18 (galaktyka zdj. 2) <http://zloty-podzial-i-ciag-fibonacciego.manifo.com/galeria>

Strona 25 (zdj. DNA) <https://fizjoterapeuty.pl/fizjologia/dna.html>

Strona 26 i 27 <https://treborok.wordpress.com/zaszyfrowane-prawo-przyrody/>

Strona 27 (zdjęcie muszli 1) <https://treborok.wordpress.com/zaszyfrowane-prawo-przyrody/>

Strona 27 (zdjęcie muszli 2) <https://akademiaducha.pl/tag/ciag-fibonacciego/>

Strona 29/30 <http://nostresskat.pl/2020/05/22/zloty-podzial-matematyczna-perfekcja-w-naturze-i-sztuce/>

Strona 29 (zdj. Człowieka Witruwiańskiego)

<https://www.obrazydeco.pl/reprodukcje-slownych-malarzy/159-czlowiek-witruwianski-reprodukcja-obraz-na-plotnie.html>

Strona 30 (Gwiazdzista Noc) <https://twoja-sztuka.pl/product-pol-8549-Vincent-van-Gogh-Gwiazdzista-noc-50x70-cm-G92536.html>

Strona 31 (logo Pepsi i logo Apple) <https://www.pawelkepa.pl/pl,236,zloty-podzial-w-marketingu>

Strona 31 (logo iCloud)

<https://tomsctwebblog.wordpress.com/2014/03/04/the-golden-ratio-and-logo-design/>

Strona 31 (logo National Geographic, Toyoty i

BP) <https://c.mi.com/forum.php?mod=viewthread&tid=3146043&aid=6129852&from=album&page=1>

Strona 35 (zapis ciągu Fibonacciego w systemie binarnym)

https://pl.wikipedia.org/wiki/Ci%C4%85g_Fibonacciego

Strona 36 (trójkąt Pascala)- rysunek własny

Źródła zdjęć z eksperymentu (strona 39/40/41/42):

<http://jaorazmojapasja.blogspot.com/2019/01/ciag-fibonacciego.html>
<https://tvn24.pl/tvnmeteo/nauka/pelnia-ksiezycy-kiedy-pelnia-w-2021-roku-co-to-jest-niebieski-ksiezyc-5435478>
<https://kuzniagrafiki.pl/pl/p/Muszl%C3%A1-62/566>
https://www.kolorowankimalowanki.pl/kolorowanka-morskich-muszli_16338.html
<http://jaorazmojapasja.blogspot.com/2019/01/ciag-fibonacciego.html>
<https://zielonyogrodek.pl/dom-i-balkon/rosliny-w-mieszkanu/7453-najpiekniejsze-kaktusy-i-sukulenty>
<https://www.tajemnice-swiata.pl/ciag-fibonacciego/>
<https://zdrowie.wprost.pl/odzywianie/produkty/10153552/kiwi-wlasciwosci-kalorie-zastosowanie.html>
<https://www.claudia.pl/arttykul/slonecznik-jak-sadzic-i-pielegnowac-kwiat-sloneca>
<https://www.polityka.pl/tygodnikpolityka/rynek/1529597,1,cba-bierze-sie-za-skup-zboza.read>
<https://thebait.no/en/product/apple-logo-sticker-for-computer-case/>
https://pl.m.wikipedia.org/wiki/Plik:Adidas_Logo.svg
<https://www.toyota.pl/>
https://pl.m.wikipedia.org/wiki/Plik:Logo_Renault_F1.png
<https://info.wyborcza.pl/temat/wyborcza/drzeworyt>
<https://www.bimago.pl/plakaty/japonski-drzeworyt-poster-137489.html>
<https://pl.wikipedia.org/wiki/Huragan>
<https://www.wirtualnemedi.pl/arttykul/chinscy-naukowcy-uzyli-fal-dzwiekowych-by-zwiekszy-opady-deszczu>
<https://www.studiomkwadrat.pl/zloty-podzial-a-architektura-wnetrz/>
<https://naszkrakow.com.pl/2020/08/01/krakow-kaplica-zygmuntowska-dostepna-dla-zwiedzajacych/>