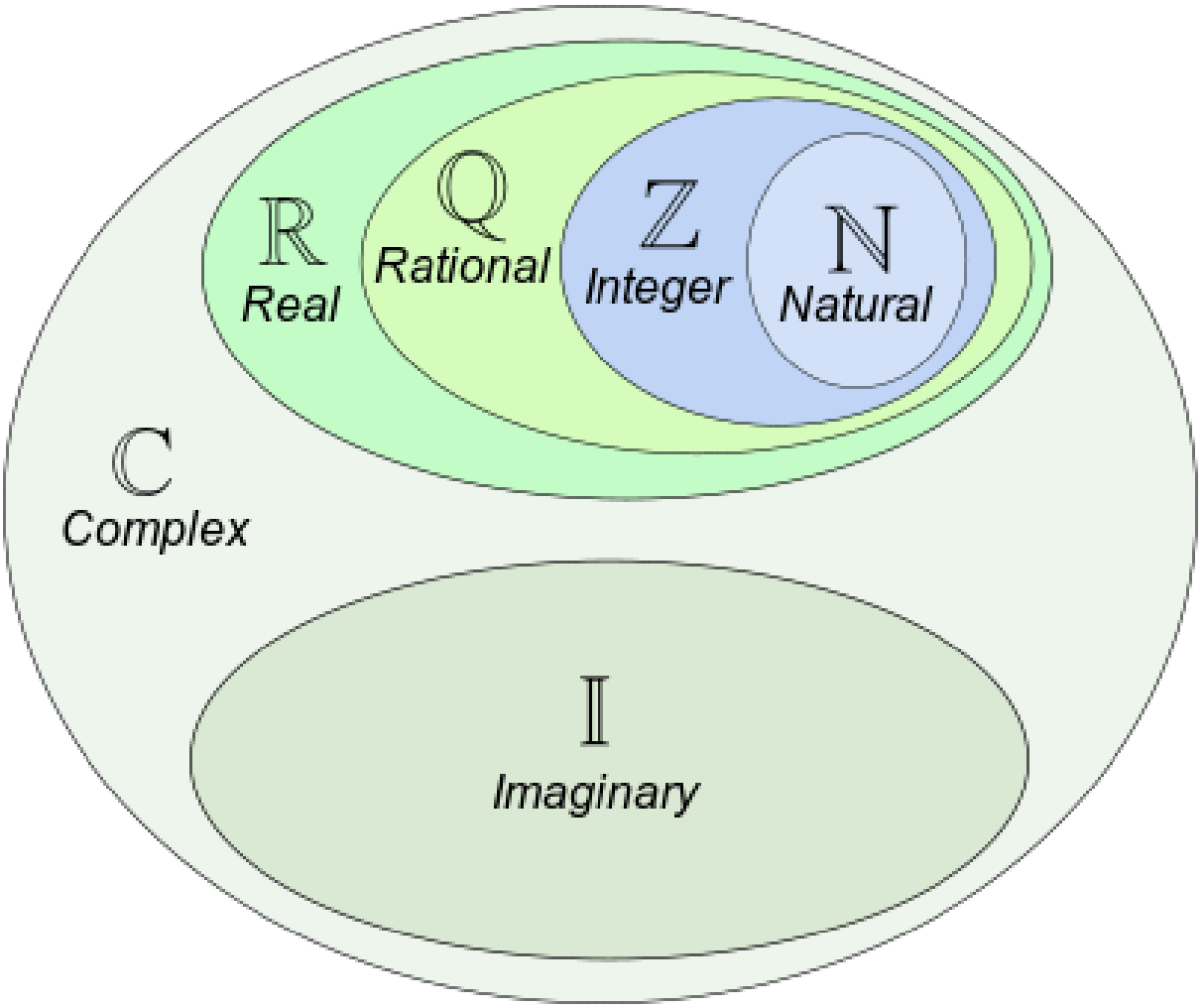
DLACZEGO 2+2=4?

(I INNE TEGO TYPU PYTANIA)

Autor: Jakub Skalany
Opiekun naukowy i korekta:Joanna Trybuła



Spis treści:

1. Wstęp
2. Aksjomaty Peano
3. Aksjomaty arytmetyczne
4. Liczby całkowite
5. Liczby wymierne
6. Co nie wynika z liczb wymiernych
7. Liczby rzeczywiste
8. Cała szkolna wiedza (i nie tylko)
9. Liczby zespolone
10. Kwaterniony
11. Liczby p-adyczne
12. Liczby kardynalne
13. Zakończenie
14. Źródła

WSTĘP

W tej pracy postaram się zrealizować następujące cele:

1. Zebranieinformacje dotyczące aksjomatyki zbiorów liczbowych
2. Pokazanie konstrukcji zbiorów liczbowych
3. Ukazanie wzrastającej trudności w wykonywaniu działań na wzorach.
4. Udowodnienie, że niektóre struktury są liczbami wbrew intuicji.
5. Ukazanie wpływu równań potrzebnych do rozwiązania na

Ponadto chciałbym odpowiedzieć na następujące pytania

1. Dlaczego 2+2=4?
2. Dlaczego 3·4=12?
3. Dlaczego nie można dzielić przez zero?, czyli dlaczego 2=1
4. Jak można umrzeć za odkrycia matematyczne?
5. Czy 1,000..=0,99999…?
6. Czy istnieje $\sqrt{-1}$?
7. Co oznacza $e^{\pi i}$?
8. Skąd pochodzą wektory?
9. Czy rozwinięcie dziesiętne może być na początku liczby?
10. Co to jest nieskończoność?

Mam nadzieję, że udało mi się tymi pytaniami zaciekawić wszystkich, którzy będą czytać tę pracę.

Ponadto w tej pracy będą używane międzynarodowe symbole oznaczeń zbiorów (czasami ze względu na ograniczenia techniczne nie będą one pogrubione)

a. **N** liczby naturalne
b. **Z** liczby całkowite
c. **Q** liczby wymierne
d. **R** liczby rzeczywiste
e. **C** liczby zespolone
f. **H** kwaterniony
g. Q_p liczby adyczne.

Obliczenia wykonane samodzielnie były wzorowane na literaturze.

Zespół Szkół Ogólnokształcących Nr 1
w Nowym Targu
34-400 Nowy Targ, Pl.Krasińskiego 1
tel./fax (18) 2662955, 2663858
NIP 7351029205 Regon 000702848

4

Nowy Targ 27.02.2022

Informacja nauczyciela.

Jakub jest uczniem klasy pierwszej o poszerzonym programie nauczania matematyki, fizyki i języka angielskiego. W Małopolskim Konkursie Prac Matematycznych startuje po raz pierwszy.

Jakuba poznałam w 2021 roku, gdy rozpoczął naukę w naszym liceum. Szybko dał się poznać jako osoba utalentowana matematycznie, pracowita i zdyscyplinowana. Przedstawiane przez niego rozwiązania zadań cechuje wysoki stopień zrozumienia przerabianego materiału, precyzja i duża kultura matematyczna.

Uczeń preferuje pracę samodzielną, ale potrafi również zgodnie pracować w grupie, dzieląc się swoją wiedzą i doświadczeniem z innymi uczniami.
Jakub nieustannie poszerza swoją wiedzę i umiejętności matematyczne, rozwija swoje zainteresowania, czego dowodem jest niniejsza praca napisana przez Niego samodzielnie. Treści w niej zawarte wykraczają poza podstawę programową nauczania matematyki w szkole ponadpodstawowej. Muszę przyznać, że przeczytałam ją z zainteresowaniem. W tej pracy widać ciekawe podejście do niektórych zagadnień matematycznych. Dlatego też praca z Jakubem daje dużo satysfakcji.

Dane kontaktowe:

Autor: Jakub Skalany
tel: 732 831 498
email:jakuskalanego@gmail.com

Szkoła: I Liceum Ogólnokształcące w Nowym Targu, im. Seweryna Goszczyńskiego
Plac Krasińskiego 1 34-400 Nowy Targ
tel/fax: 18 266 29 55, 18 266 38 58
lo@goszczynski.nowytarg.pl

Opiekun: mgr Joanna Trybuła
tel. 696 678 958 email: trybula.joanna@gmail.com

AKSJOMATY PEANO

Aksjomaty Peano-rygorystyczne podstawy w teorii liczb, będące odpowiednikiem pojęć pierwotnych w geometrii euklidesowej
Aksjomaty Peano są bardzo ważne dla matematyki. Definiują one zbiór liczb naturalnych- najbardziej intuicyjny zbiór niezbędny konstruowania innych liczb.
A ich treść jest następująca:

1. **ϕ** [1] jest liczbą naturalną.
2. Każda liczba naturalna posiada następnik w zbiorze liczb naturalnych.
3. **ϕ** nie jest następnikiem żadnej liczby naturalnej.
4. Jeśli następniki dwóch liczb naturalnych są te same,to oryginalne liczby są te same
5. Jeśli zbiór zawiera **ϕ** i następnik każdej liczby jest w zbiorze,to wtedy zbiór zawiera liczby naturalne.

Naszym celem jest zdefiniowanie zbioru liczb naturalnych . Pozwolę sobie omówić każdy z tych aksjomatów pod kątem jego przydatności w realizacji założonego zadania

1. **ϕ** jest liczbą naturalną- ten aksjomat gwarantuje,że zbiór liczb naturalnych nie jest pusty, że “będzie na czym” konstruować zbiór **N**
2. Każda liczba naturalna posiada następnik w zbiorze liczb naturalnych- pomiędzy elementami zbioru istnieje związek. Niech podana będzie liczba u. Liczba ta może mieć tylko jeden następnik, ewentualnie zapisany w różnych formach. np S(u) S(S….(S(**ϕ**)).
3. **ϕ** nie jest następnikiem żadnej liczby naturalnej- zbiór liczb naturalnych nie może w całości być pętlą. Zbiór posiada najmniejszy element, **ϕ**
4. Jeśli następniki dwóch liczb naturalnych są te same,to oryginalne liczby są te same-żeby zbiór mógł posiadać zapętlenie, to liczba musiałoby być następnikiem dwóch liczb, co nie jest możliwe. Zatem łańcuch wygląda tak:

   a→ b→c→d→e→f jeśli g by wchodziło do c, to by równało się b, więc łańcuch jest pojedynczy[2],

5. Aksjomat indukcji oznacza, że utworzony zbiór zawiera wszystkie liczby naturalne. Ten aksjomat zamyka konstrukcję liczb naturalnych i potwierdza kształt zbioru.

[1] w większości źródeł używa się symbolu 0, ale symbol lepiej oddaje niezależność matematyki od przyjętych symboli
[2] nie ma w nim żadnych zapętleń

Tak więc powstał nam następujący łańcuch liczb:

ϕ→S(**ϕ**)→S(S(**ϕ**))→S(S(S(**ϕ**)))→S(S(S(S(**ϕ**))))→S(S(S(S(S(**ϕ**)))))→……..

Teraz dla ułatwienia zapisu należy każdą z tych liczb oznaczyć odpowiednim symbolem, np.

I[3]→II→III→IV→V→VI→VII….

Lub bardziej popularnie

0→1→2→3→4→5→6…..

Dopiero pod koniec tworzenia zbioru liczb naturalnych zaczęliśmy używać symboli znanych nam. Nie były one po prostu wcześniej potrzebne.

AKSJOMATY ARYTMETYCZNE

6. a+0=a
7. a+S(b)=S(a+b)
8. $a \bullet 0 = 0$
9. a • S(b)= a • b +a

Te cztery aksjomaty definiują mnożenie i dodawanie- najważniejsze działania arytmetyczne. Na pierwszy rzut oka wydają się one niezwiązane z tym, co znamy, ale ja postaram się udowodnić, że jest inaczej.

[3] dla matematyki nie jest znaczące, czy 0 należy do zbioru liczb naturalnych, ale jednak większość matematyków uznaje 0 jako część zbioru i tak też w tej pracy będzie uznawana

2+2=4 to działanie jest bardzo proste, ale dlaczego 2+2=4?[4]

s(1)+2=S(2+1)=S(S(1)+1)=S(S(1+1))=S(S(S(0)+1)))=S(S(S(0+1)))=
S(S(S(S(0+0))))=4

3 · 4 = 12 a oto dlaczego:

$$3 \cdot S(3) = 3 \cdot 3 + 3 = 3 \cdot S(2) + 3 = 3 \cdot 2 + 3 + 3 = 3 \cdot S(1) + 6 = 3 \cdot 1 + 3 + 6 =$$

$$= 3 \cdot S(0) + 9 = 3 \cdot 0 + 3 + 9 = 3 \cdot 0 + 12 = 12$$

Te procesy można powtarzać dla każdego działania z mnożeniem lub dodawaniem, ale byłoby to zbyt żmudne, dlatego w procesie nauczania korzysta się z intuicyjnego rozumienia mnożenia lub dodawania.

Tak oto “stworzyliśmy” podstawy matematyki. W następnych rozdziałach zostaną omówione kolejne wnioski i liczby.

Każdy sposób “stworzenia matematyki” jest na swój sposób niepełny. Nie da się określić nim wszystkich przypadków. Mimo to aksjomaty Peano są najsłynniejszymi aksjomatami i to o nich napisałem.

[4] Dowody wykonane własnoręcznie

LICZBY CAŁKOWITE

W codziennym życiu spotykamy się z liczbami całkowitymi. Na przykład kiedy płacimy kartą. Na koncie pojawia się zapis np. -17 zł. Kiedy zaczynamy dietę mówimy, że schudliśmy o 8 kg, czyli "przytyliśmy" o -8 kg. Ale co właściwie ten zapis oznacza? Skąd się bierze? O tym opowiem w dalszej części.

Liczby całkowite mogą być wyrażone aksjomatami. Oto one:

1. Liczba **ϕ** należy do zbioru **Z**
2. Dla każdej liczby x należącej do zbioru **Z** istnieje liczba S(x) zwana jej następnikiem
3. Dla każdej liczby x należącej do zbioru **Z** istnieje liczba P(x) zwana jej poprzednikiem, tak że S(P(x))=P(S(X))=x
4. jest różne od wszystkich jego następników (i poprzedników)
5. Jeśli zbiór **Z** zawiera jedną liczbę całkowitą, i dla każdego $x \in Z \Rightarrow P(x), S(x) \in Z$, to zbiór zawiera wszystkie liczby całkowite.

Zbiór liczb całkowitych można utworzyć za pomocą konstrukcji Grassmanna. Po ukazaniu konstrukcji udowodnię, iż zgadza się ona z podanymi aksjomatami.

Niech będzie dane równanie x+2=7, wtedy x=5. A co z równaniem x+7=2? Żadna liczba naturalna nie spełnia tego równania. Dlatego przyjmijmy, że rozwiązaniem tego równania jest symbol [2,7] tj.

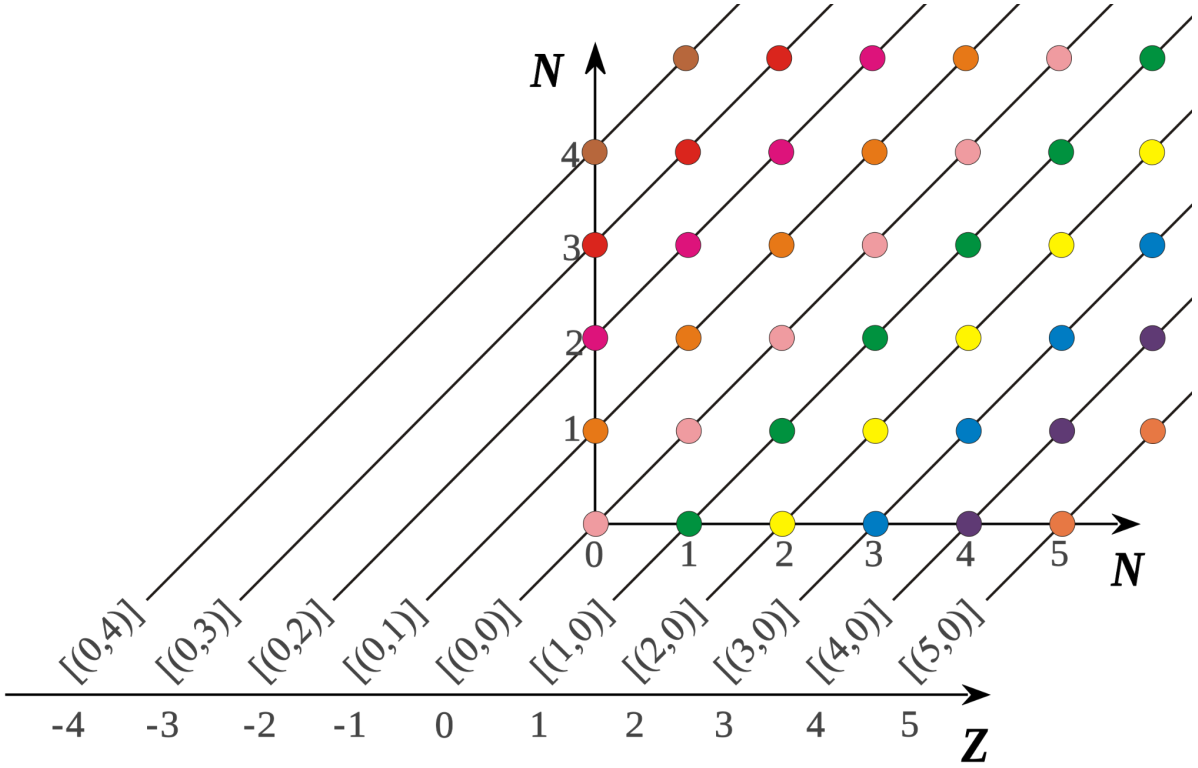
$x+7=2 \Rightarrow x=[2,7].$

Nie jest potwierdzone, że wymieniony symbol jest poprawny matematycznie. Właściwie to jest tylko wymysł. Żeby udowodnić jego poprawność należy się zastanowić, czy podobne mechanizmy istnieją dla liczb naturalnych?

Tak. Istnieją. Na przykład x+2=7, rozwiązaniem tego równania może być twór powstały na tej samej zasadzie, tj [7,2]. Dla równania x+3=8 rozwiązaniem też jest x=5 lub [8,3]. Tak więc [7,2]=[8,3]=5

Ogółem zapisać można:$\forall x, y, z \in N\ x + y = y + z \Rightarrow x = [y + z, y]$[5]

Tak więc 5=[5,0]=[6,1]=[7,2]=[8,3]=[9,4] itd. według poniższej ilustracji, gdzie oś pozioma to są liczby na początku notacji, a pionowo są liczby na końcu notacji.



Notacja użyta przeze mnie jest po prostu kolejnym sposobem opisania liczby 5 , jest kolejnym (co prawda bardzo niewygodnym) zapisem tej liczby. Cytując dr Tomasza Mullera: “To[6] nie jest liczba naturalna” “To nie jest 5, to jest tylko cyfra arabska symbolizująca 5”.

Dla innych równań można powtórzyć ten sam proces:

x+7=2⇒x=[2,7]=[1,6]=[0,5]=[3,8]=[4,9]=[5,10]..

---

[5] To zdanie logiczne są odrobinę nadmiarowe, gdyż przy nieuwzględnianiu y wiadomo, że lub x=z, to w tym zdaniu chodzi o to, aby matematycznie opisać sposób notacji dla każdego podobnego równania,

[6] autor rzekł to wskazując na cyfrę 5

Tak więc istnieje pewien twór zapisany w nawiasach. Żeby był on nazywany liczbą, musi spełniać podstawowe działania arytmetyczne (tj. dodawanie i mnożenie, odejmowanie i dzielenie na tym etapie pracy nie są jeszcze zdefiniowane).

Definicje działań (a,b,c,d∈**N):**

1. Dodawanie [a,b]+[c,d]=[a+c,b+d]
2. mnożenie [a,b] · [c,d]= [a ·c + b ·d , a ·d+ b ·c]
3. element neutralny dodawania [0,0]
4. element neutralny mnożenia [1,0]
5. liczba przeciwna do [a,b] to [b,a]

Teraz dla każdej z tych definicji przedstawię sprawdzenie (tj. czy działa to także dla liczb naturalnych[7]):

l.p.	przykład szczególny	wzór ogólny
1	[5,0]+[7,0]=[5+7,0+0]=[12,0] 5+7=12	$\forall a,b \in N \wedge c = a + b$ [a,0+b,0]=[a+b,0]=[c,0] a+b=c
2	[5,0] · [3,0]= [3 ·5 + 0 ·0 , 5 ·0+ 3·0]= [15+0,0+0]=[15,0] 3 · 5 =15	$\forall a,b \in N \wedge c = a \cdot b$ [a,0 · b,0]=[a ·b + 0·0 , a·0 + b·0]= [a·b , 0]=[c, 0] a · b=c
3	[5 ,0]+[0 ,0]= [5+0,0+0]=[5,0] 5+0=5	$\forall a, \in N$ [a , 0]+[0,0]=[a+0 , 0+0]=[a,0] a+0=0
4	[5,0] · [1,0]= [5·1+0·0 , 5·0+1·0]=[5,0] 5 · 1=5	$\forall a, \in N$ [a,0] · [1,0]= [a·1+0·0 , a·0+1·0] =[a · 1,0]=[a,0]
Wniosek piąty nie istnieje bez liczb całkowitych i nie musi przejść procesu sprawdzania, bo nie jest on możliwy do przeprowadzenia		

[7] tabela wykonana własnoręcznie

Przykładowe sprawdzenie, że dla dowolnie wybranej notacji tej samej liczby to ma sens:

[5,0]+[7,0]=[5+7,0+0]=[12,0]=[6,1]+[8,1]=[6+8,1+1]=[14,2]=[7,2]+[9,2]=[7+9,2+2]=[16,4]

Za pomocą danych w tabelce i przykładowego sprawdzenia udowodniliśmy, że ten twór można nazwać liczbami(całkowitymi)[8]. Teraz można przejść do utworzenia ważnego działania zwanego odejmowaniem. Definicja odejmowania jest następująca dla a,b,c,d∈**N**

[a , b] - [c , d]= [a , b] + [d , c] odejmowanie to dodawanie liczby przeciwnej
Przykładowe wykonanie działań:

wykonanie na notacji	wykonanie typowe
[2,0] - [1,0]=[2,0]+[0,1]=[2+0,1+0]=[2,1]	2-1=1
[1,0] - [2,0]=[1,0]+[0,2]=[1+0,2+0]=[1,2]	1-2=-1
-[2,0] - [1,0]=[0,2]+[0,1]=[0,2+1]=[0,3]	-2 -1 =-3

Z tych przykładowych działań, bardzo prostych i intuicyjnych wyniknął otrzymaliśmy i lepszy symbol liczb całkowitych nienaturalnych, a mianowicie minus przed liczbą przeciwną do wyniku.
-1=[0,1]=[1,2]=[2,3]=[3,4].....

Nie jest on czymś pierwotnym, lecz czymś, co jest umowne i zostaje dopisane dopiero po stworzeniu liczb całkowitych. Istotą liczb ujemnych nie jest minus, minus jest tylko dodatkiem. Istotą są liczby naturalne, to one tworzą liczby całkowite. To jest coś zupełnie innego niż to, co się poznaje w szkole, coś innego, coś mniej intuicyjnego. I to jest piękne. Ja pisząc tę pracę zachwyciłem się tym, ale o tym napiszę więcej w zakończeniu.

Tak więc wracając mamy liczby całkowite w całej swej okazałości. Teraz należy jeszcze sprawdzić, czy spełniają one aksjomaty liczb całkowitych. Dlatego przytoczę je jeszcze raz i skonfrontuję je z konstrukcją.

Aksjomatyka liczb całkowitych	Dane z konstrukcji
Liczba 0[9] należy do zbioru **Z**	Zbiór Z jest niepusty, to jest powtórzenie w stosunku do aksjomatyki peano
Dla każdej liczby x należącej do zbioru **Z** istnieje liczba S(x) zwana jej następnikiem	S(x)=x+1 S([x,0])=[x,0]+[1,0]=[x+1,0]
Dla każdej liczby x należącej do zbioru **Z** istnieje liczba P(x) zwana jej poprzednikiem, tak że S(P(x))=P(S(X))=x	P(x)=x-1 P([x,0])=[x,0]-[1,0]=[x,0]+[0+1]=[x,1]=[x-1,0] S(P(x))=P(S(X))=x ⇔ x - 1+ 1 =x + 1 - 1=x+0=x [x,0]-[1,0]+[1,0]=[x-0]+[0,0]=[x,0]=[x,0]+[1,0]-[1,0]
0 jest różne od wszystkich jego następników i poprzedników ???	0≠S(0)≠P(0) 0≠1≠(-1)

[8] podobne sprawdzenia można zrobić dla każdej definicji działania
[9] tutaj można użyć symbolu zero a nie symbolu , gdyż nie jest dla nas ważne wykazanie niezależności liczb całkowitych od symboliki, gdyż wykazaliśmy to w konstrukcji Grassmana.

Jeśli zbiór **Z** zawiera jedną liczbę całkowitą, i dla każdego $x \in Z \Rightarrow P(x), S(x) \in Z$, to zbiór zawiera wszystkie liczby całkowite.	Zbiór jest poszerzany w nieskończoność. Dla x=**0**, P(x)=P(0)=**-1** S(x)=S(0)=**1** dla x=1 P(x)=P(1)=0 S(x)=S(1)=**2** Dla x=-1, P(x)=P(-1)=**-2** S(x)=S(-1)=0 itd….

Tak więc liczby całkowite zostały utworzone. Pragnę teraz napisać, co z tego wynika:

1. Dodawanie i odejmowanie
2. mnożenie
3. Działania pisemne (więcej w dziale liczby p-adyczne)
4. Obliczenia dat
5. Obliczenia godzin, minut i sekund
6. Obliczenia pieniężne (liczby ujemne zostały wymyślone na potrzeby kupców i bankierów)
7. Proste obliczenia wagi
8. Proste obliczenia odległości

Te zagadnienia nie są czymś skomplikowanym, uczy się o nich nawet dzieci. Te zagadnienia są niezbędne w życiu. Już w starożytności je realizowano..

Jeszcze zanim skończę pisać o liczbach całkowitych chciałbym przypomnieć o jednej naprawdę ważnej i rewolucyjnej właściwości liczb całkowitych, a mianowicie kiedy wynik mnożenia będzie dodatni, a kiedy ujemny i dlaczego.

Najpierw należy przypomnieć, że liczba w notacji Grassmana jest dodatnia, kiedy jest zapisana w postaci [a,0], a ujemna jest zapisana w postaci [0,a]. Dla wszystkich dowodów a i b należą do liczb naturalnych większych od zera.[10]

1. Dodatnia z dodatnią [a,0]· [b,0]=[a·b+0·0,a·0+b·0]=[a·b,0]wynik jest dodatni
2. Dodatnia z ujemną [a,0]·[0,b]=[a·0+b·0,a·b+0·0]=[0,a·b] wynik jest ujemny
3. Ujemna z dodatnią [0,a]·[b,0]=[0·b+a·0,0·0+a·b]=[0,a·b] wynik jest ujemny
4. Ujemna z ujemną [0,a]·[0,b]=[0·0+a·b,0·b+a·0]=[a·b,0] wynik jest dodatni

Najbardziej zadziwiającym i nieintuicyjnym twierdzeniem jest twierdzenie numer 4. Mnożenie dwóch liczb ujemnych jest liczbą dodatnią. Pisząc tę pracę wiele razy spotkałem się z twierdzeniami nie wydającymi się logicznymi, ale prawdziwymi. Wiele rzeczy zrozumiałem, zrozumiałem wiele twierdzeń przyjmowanych jak dogmaty, a aksjomaty określają tylko podstawy podstaw matematyki

[10] Dowody wykonane własnoręcznie

Tak więc liczby całkowite są czymś bardzo ważnym, tworem, który umożliwia dokładniejszy opis matematyki i ją rozszerza.

LICZBY WYMIERNE

Liczby wymierne są przełomemw matematyce. W minimalnym stopniu są i były one rozróżniane przez plemiona pierwotne (np. jedna druga). Mogą być one przez nas utworzone na różne sposoby- aksjomatycznie i konstrukcyjnie. Przedstawię skrótowo konstrukcję liczb wymiernych- podobną do konstrukcji Grassmana.

3x=6 - rozwiązaniem tego równania jest liczba 2. A co z równaniem 2x=3 ? Podstawienie liczby 1 2·1=3 nie działa, 2 2·2=3 też nie działa. Zgodnie z tym, co napisałem dotychczas pracy równanie nie ma rozwiązania. Dlatego należy zastosować nową konstrukcję liczb.

2x=3 ⇒ x=[3/2]

Tak więc powstał nam symbol[11] [m/n], gdzie m∈**Z** n ∈ Z - {0}.

Teraz trzeba sprawdzić, czy tymi symbolami da się wyrazić liczby całkowite.

3x=18 ⇔ x=6 = [6/1]

$\forall x, y, z \in Z$: xy=zy x=z=[z/1] a także $\forall x, y, z, a \in Z$ xy=zy x=z=[z/1]=[za/a]

Teraz najważniejsze jest, czy jest możliwe wykonywanie na nich działań?
Tak, a oto jest ich definicja[12]:

[11] używa się oznaczenia z przecinkiem, ale w celu zapewnienia przejrzystości pracy wolę użyć tzw.slasha
[12] Odejmowanie to nadal dodawanie odwrotności

1. Dodawanie [a/b]+[c/d]= [ad+bc/bd]
2. Mnożenie [a/b] · [c/d]=[a · c/b · d]
3. Element neutralny dodawania [0/n] n∈**Z**
4. Element neutralny mnożenia [m/m] m∈**Z**
5. Element przeciwny [a/b] to -[a/b]
6. Element odwrotny [a/b] to [b/a]

Tabela poniżej zawiera sprawdzenie, czy definicje zgadzają się dla liczb całkowitych.[13]

lp.	przykład szczególny	przykład ogólny
1	[3/1]+[2/1]=[3· 1+2 ·1/1·1]=[5/1] 3+2=5	[e/1]+[f/1]=[e· 1+f ·1/1·1]=[e+f/1] e+f=e+f
2	[3/1]·[2/1]=[3·2/1·1]=[6/1] 3·2=6	[e/1]·[f/1]=[e·f/1·1]=[ef/1] e·f=ef
3	[3/1+0/1]=[3 ·1+1·0/1·1]=[3+0/1]=[3/1] 3+0=3	[e/1+0/1]=[e ·1+1·0/1·1]=[e+0/1]=[e/1] e+0=e
4	[3/1]·[2/2]=[3·2/2·1]=[6/2]=[3/1] 3·1=3	[f/1]·[2/2]=[f·2/2·1]=[2f/2]=[f/1] f·1=f

Oznaczenie liczb wymiernych to kwestia umowna. Matematycy rozwiązanie równania cx=b oznaczają jako $\frac{b}{c}$, gdzie $b, c \in Z \wedge c \neq 0$ Tak można utworzyć liczby wymierne i udowodnić, że to są liczby. Można by to udowaniać tak samo jak liczby całkowite, ale sądzę, iż nie ma to sensu, gdyż jest to praktycznie to samo. Mimo to istnieje problem, który może być podstawą do uznania, iż liczby wymierne nie są poprawne matematycznie. A mianowicie, co zrobić, gdy mianownik równa się 0?

Może najpierw przedstawmy, jakie problemy to za sobą niesie.

1. 2=1, co można przedstawić za pomocą następującego “dowodu”:

[13] Wykonanie własnoręczne

$$a = b \Rightarrow a \cdot a = b \cdot b \Rightarrow a \cdot a - b \cdot b = a(b - a) \Rightarrow$$
$$(a + b)(a - b) = a(a - b)\ mnożenie\ obustronne\ przez\ \frac{1}{a-b} \Rightarrow$$
$$a + a = a \Rightarrow 2a = a \Rightarrow 2 = 1$$

2. Ile równa się dzielenie $\frac{a}{0}$? Wynik tego dzielenia wydaje się oczywisty-∞, zresztą, jeśli liczba w mianowniku zbliża się do zera, to wielkość ułamka wzrasta do nieskończoności według słynnego równania:

$$\lim_{a \to 0} \frac{1}{a} = \infty$$

Mimo to nie zgadza się jeden fakt. A mianowicie jeśli $\frac{1}{0} = \infty$, to $1 = \infty \cdot 0$ [14], mimo,że dowolna liczba pomnożona przez 0 równa jest 0. Zresztą czy nieskończoność to w ogóle liczba.[15] Czym jest nieskończoność? Stwierdzenie $\frac{1}{0} = \infty$ tworzy tyle paradoksów i niedopowiedzeń, że nie może być uznane za prawdziwe

3. Jaka jest odwrotność zera? Wydaje się że dla ułamka $\frac{1}{0}$ jest to $\frac{0}{1} = 0$, a to stoi w sprzeczności z równaniem $\lim_{a \to 0} \frac{1}{a} = \infty$, co najważniejsze odwrotności ułamków $\frac{0}{1}$ $\frac{0}{2}$ i $\frac{0}{n}$ n∈**Z**-{0} są takie same
4. ułamek $\frac{0}{0}$ ma dwie wartości całkowite, 0 i 1 $\frac{0}{0} = \frac{0 \cdot 1}{0} = 0 \cdot 0 = 0$
   $\frac{0}{0} = 1$ bo $\frac{m}{m}$=1 m∈**Z**-{0}

Uwzględniając to wszystko trudno się nie zgodzić, iż ilość problemów powstałych z zera w mianowniku jest olbrzymia, co ważniejsze, problemy te nie mogą być rozwiązane. Czy liczby wymierne są niepoprawne matematycznie?

Nie. Naukowcy widząc olbrzymią ilość problemów generowaną przez 0 w mianowniku uznali, iż po po prostu będzie trzeba narzucić odgórne ustalenie, że zera nigdy nie można umieścić na dole ułamka. Jest to ograniczenie bolesne dla uczniów i studentów, zresztą matematycy nie lubią ograniczeń, ale jest ono konieczne. W powyższych definicjach liczb wymiernych celowo nie uwzględniałem niemożliwości występowania zera, gdyż w idei pracy było, aby większość twierdzeń wynikała z logiki i aksjomatyki.

---

[14] jeśli a/b=c to ab/b=cb to a=cb
[15] zostanie to objaśnione w dziale liczby kardynalne

Oprócz tego problemu liczby wymierne(oznaczane przez naukowców literą **Q**)działają. Dają radę i nie ma w nich wewnętrznych sprzeczności. Liczby wymierne umożliwiają wiele nowych działań i dają wiele możliwości. Przytoczę jedną, gdyż przytaczanie większej ich ilości nie jest potrzebne.

> Liczby wymierne ułatwiają porównywanie obiektów. Naprawdę ciężko jest określać zależności pomiędzy przedmiotami nie używając liczb wymiernych (wymaga to wielkiej pomysłowości i jest czasochłonne i nieużyteczne) a naprawdę prosto korzystać z tych liczb.

Liczby wymierne zmieniają skalę trudności matematyki. Są niesamowicie rozwojowe. Ukazują nowe i nieznane właściwości rzeczywistości. Co ciekawe dzięki nim odkryte zostaje nowe oblicze liczb naturalnych i całkowitych. W następnym rozdziale będę kontynuował temat, ale nie zastanawiając się, jakie możliwości daje nam zbiór **Q**, ale jakich możliwości nam nie daje. Liczby całkowite wymogły niejako stworzenie liczb wymiernych. Czy liczby wymierne wymogą istnienie czegoś więcej?

CO NIE WYNIKA Z LICZB WYMIERNYCH

Tytuł tego rozdziału jest zagadkowy, zwłaszcza, że napiszę tu o możliwościach liczb wymiernych. Mimo to każda z przedstawionych tutaj możliwości liczb wymiernych będzie niosła z sobą wniosek, że liczby wymierne nie wystarczą. W poprzedni dziale każdy temat jest skończonym dziełem. W tym rozdziale każdy temat jest niedokończonym pytaniem.

Mam nadzieję, iż znana jest definicja potęgowania i pierwiastkowania**.** Postaram się to przedstawić ją pomocą tabeli, aby wiedza była uporządkowana. Z działań potęgowania wyniknie, dlaczego liczby wymierne nie są wystarczające

pod\wyk	naturalny	całkowity ujemny	wymierny
naturalny	$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ a n razy	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$a^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{a^b}$
całkowity ujemny	$-a^n = -(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)$ n razy $(-a)^n = (-a) \cdot (-a) \cdot \ldots \cdot (-a)$ n razy	$-a^{-n} = \frac{1}{-(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}$ n razy $(-a)^{-n} = \frac{1}{(-a) \cdot (-a) \cdot \ldots \cdot (-a)}$ n razy	powiem o tym w dziale co nie wynika z liczb rzeczywistych
wymierny	$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$	$(\frac{a}{b})^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$	podstawa ujemna-powiem o tym w dziale

			co nie wynika z liczb rzeczywistych podstawa dodatnia $(\frac{a}{b})^{\frac{c}{d}} = \frac{\sqrt[d]{a^c}}{\sqrt[d]{b^c}}$

Czy wszystkie pierwiastki da się przedstawić za pomocą liczb wymiernych? Żeby to sprawdzić, postaram się użyć równań i sprawdzać, czy ich rozwiązania należą do liczb wymiernych.

$\sqrt[3]{125} = x \Leftrightarrow x^3 = 125 \Leftrightarrow x = 5$

Ale $\sqrt{2} = x \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ Czy liczba $\sqrt{2}$ jest wymierna? NIE! A można to udowodnić za pomocą dowodu nie wprost.

Niech $q^2 = 2 \wedge q \in Q_+, \; czyli \;\; q = \frac{m}{n}, \; gdzie \;\; m,n \in N_+ \;\; \wedge \frac{m}{n} \; to \; ułamek \; nieskracalny.$

$(\frac{m}{n})^2 = 2 \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2$

liczba m^2 jest parzysta, bo da się ją wyrazić jako iloczyn 2k, gdzie k∈**Z**. [16]

Kwadrat liczby nieparzystej $(2u+1)^2 = 4u^2 + 4u + 1 = 2(2u^2 + 2u) + 1$ jest liczbą nieparzystą. Tak więc liczba m też jest parzysta.

Tak więc m=2l, czyli $m^2 = 4l^2$, czyli $4l^2 = 2n^2 \Leftrightarrow n^2 = 2l^2$

[16] w definicji podanej w dziale aksjomaty arytmetyczne napisałem, że k należy do naturalnych, a to dlatego, że nie znane nam wtedy były liczby całkowite

n^2 jest liczbą parzystą, a więc n też jest liczbą parzystą, czyli $\frac{m}{n}$ jest ułamkiem skracalnym, co nie zgadza się z wcześniejszym logicznym założeniem.

Tak więc liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna.

Przytoczyłem ten dowód w całości, gdyż był on przełomowy w historii matematyki. Napisano go w starożytnej Grecji. Istnieją legendy, że kiedy odkrył go Hippazos z Metapontu, to został on zamordowany za jego odkrycie, a istnienie liczb niewymiernych było skrzętnie ukrywane. Tak więc wykazano, iż liczby wymierne nie są wystarczające.

Ułamki dziesiętne są kolejnym tworem, który potwierdza niekompletność liczb wymiernych. A właściwie czym są ułamki dziesiętne?Ułamek dziesiętny to twór liczbowy o postaci $a + \frac{x}{10^n}$ zapisany w postaci a,x∈**N** gdzie n jest równe ilości cyfr w x. Pokażę to może na przykładzie

$$0,12 = 0 + \frac{12}{10^2} \quad -3,856 = -\left(3 + \frac{856}{1000}\right)$$

Istnieją ułamki, których rozwinięcie dziesiętne okresowe jest nieskończone, a mianowicie $\frac{1}{3}$, rozwinięcie tego ułamka to $0,(3)$

Kiedy rozwinięcie dziesiętne jest nieskończone, ale nie jest okresowe, to liczba jest niewymierna. Na przykład
0,58349545456749384654853845618425421888872251854879231215647654848 29… lub
12,55588959927991427926365923924939299459292494193792397349727953294…

Tych liczb nie da się wyrazić sumą liczb wymiernych. Czy istnieje ułamek $\frac{x}{10^\infty}$, co on miałby oznaczać? W dziale liczby kardynalne napiszę o nich. Co jest pewne, takie stwierdzenia są zdecydowanie kontrowersyjne i paradoksogenne, dlatego uznaje się, że ułamek $\frac{x}{10^\infty}$ jest niewymierny.

Trzecim przykładem liczby, która nie jest wymierna jest π, czyli stosunek długości obwodu do średnicy. Istnieją skomplikowane formuły matematyczne pozwalające obliczyć jego rozwinięcie dziesiętne ,istnieją też dowody, że ta liczba jest niewymierna.

Za pomocą tych 3 przykładów chciałem pokazać, że liczby wymierne nie są wystarczające dla matematyków. W następnym dziale opowiem, jak utworzyć liczby rzeczywiste, jakie mają właściwości i czy one rozwiążą wszystkie nasze problemy

LICZBY RZECZYWISTE

W poprzednim dziale celowo nie pisałem, że dane rozwiązania nie istnieją. Istnieją one, tylko że nie należą do zbioru liczb wymiernych. Należą do szerszego zbioru. Liczb wymiernych jest nieskończenie wiele, ale nie zapełniają całej osi liczbowej.Wręcz jest nieskończenie wiele luk w osi liczbowej. Czy liczby rzeczywiste zapełnią w końcu całą oś liczb? Czy liczby rzeczywiste da się prosto skonstruować? O tym opowiem w dalszej części rozdziału

Poprzednie rozszerzenia zbiorów udawało się konstruować poprzez równania, które mogą one rozwiązywać. Czy liczby rzeczywiste można skonstruować w ten sam sposób? Na przykład niech wzięte zostanie równanie $x^2 = 3$ jego rozwiązaniem jest oczywiście $\pm\sqrt{3}$. Można wtedy stworzyć zbiór $Q(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} | a, b \in Q\}$. Można też wykazać, że możliwe jest wykorzystanie działań arytmetycznych w tym zbiorze. Mimo to nie jest zbiór liczb rzeczywistych. Nie ma możliwości konstrukcji liczb rzeczywistych na podstawie równań, które rozwiązują. Niezbędne jest użycie matematycznych konstrukcji innego rodzaju.

Taką konstrukcją jest konstrukcja Dedekinda. Przedstawię ją za pomocą listy kroków:

1. Utworzyć podzbiory zbioru liczb wymiernych taki zbiór niech oznaczony będzie A-zbiór wiedzie od “minus nieskończoności” do pewnego punktu wymiernego z wyłączeniem tego punktu, który nie jest “plus nieskończonością”, czyli matematycznie $p, q \in A$ $A \neq \emptyset \wedge A \neq Q$,$\forall p \in A \, \forall q \notin A$, $\forall p \in A \;\; \exists q \notin A$
2. Utożsamiamy daną liczbę rzeczywistą ze zbiorem, którego punkt krańcowy jest wielkości danej liczby.
3. Może się zdarzyć, iż na granicy skonstruowanego zbioru nie będzie liczby wymiernej.

   Na przykład Niech B będzie zbiorem, który zawiera wszystkie wartości od $(-\infty, \sqrt{2})$ wtedy zbiór B oznacza liczbę $\sqrt{2}$. Tak można utworzyć zbiory dla każdej liczby rzeczywistej.

   Z5={p|p<5}[17] $Z\sqrt{34} = \{p | p < \sqrt{34}\}$

[17] Niech oznaczenie Z5 oznacza zbiór dedekindowski utożsamiany z liczbą 5

Na tak określonych obiektach można wykonywać działania arytmetyczne:

1. dodawanie $C + D = \{q + p | p \in C \wedge q \in D\}$
2. element przeciwny $-D = \{-f | f \notin D \wedge q \; nie \; jest \; najmniejsza \; w \; zbiorze \; D\}$
3. odejmowanie $C - D = C + (-D)$
4. mnożenie $C \cdot D \; (C, D \geq 0) \; C \cdot D = \{c \cdot d | c \in C \wedge d \in D\}$
5. mnożenie mniejszych od zera- zamieniamy na element przeciwny i wtedy tworzymy tak: $C \cdot D = -[C \cdot (-D)] = -[-C \cdot D] = [-C \cdot (-D)]$ [18]
6. dzielenie $C \div D \; (C \geq 0, D > 0) \; C \div D = \{c \div d | c \in C \wedge d \in D\}$
7. Dzielenie mniejszych od zera:
   $A \div B = -[A \div (-B)] = -[(-A) \div B] = [-A \div (-B)]$ [19]

Teraz trzeba sprawdzić, czy te działania sprawdzają się dla liczb wymiernych

lp.	przykład szczególny	przykład ogólny
1	$Z5 + Z\frac{1}{2} = \{z | z \leq 5 + \frac{1}{2}\}$	$E + D = \{q + p \in Q | p \in E \wedge q \in D\}$
2	$-1 = \{-1 | 1 \notin Z1\}$ [20]	$-D = \{-f | f \notin D \wedge f \; njm \; w \; zbiorze \; Q\}$[21]
3	$3 - 1 = 3 + (-1)$	$E - D = E + (-D)$
4	$5 \cdot 3 = \{ó | ó \leq 15\}$	$E \cdot D \; (E, D \geq 0) \; E \cdot D = \{e \cdot d \in Q | e \in E \wedge d \in D\}$
5	$5 \cdot 3 = -(5 \cdot (-3)) =$ $= -(-5 \cdot 3) = (-5 \cdot - 3)$	$E \cdot D = -[E \cdot (-D)] = -[-E \cdot D] = [-E \cdot (-D)]$
6	$6 \div 5 = \{g | g \leq \frac{6}{5}\}$	$C \div D \; (C \geq 0, D > 0)$ [22] $C \div D = \{c \div d \in Q | c \in C \wedge d \in D\}$
7	$\frac{6}{5} = -\frac{6}{-5} = -\frac{-6}{5} = \frac{-6}{-5}$	$A \div B = -[A \div (-B)] = -[(-A) \div B] = [-A \div (-B)]$

Potęgowanie liczb rzeczywistych o wykładnikach wymiernych jest proste. Polega na dokładnie tym samym, na czym polegało potęgowanie liczb wymiernych. Problem jednak się zaczyna, kiedy sam wykładnik staje się rzeczywisty. Wtedy należy najpierw sprawdzić, czy wykładniki nie sprowadzają się do liczb wymiernych $x^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = x^2$. Kiedy nie da się przeprowadzić takiej procedury, to trzeba skorzystać z jednego z dwóch sposobów. Pierwszy to znalezienie odpowiedniego zaokrąglenia wymiernego liczby rzeczywistej i potęgowanie jak wykładnika wymiernego $2^{\pi} \approx 2^{\frac{314159}{100000}}$. Druga metoda polega na użyciu skomplikowanych wzorów. Co najważniejsze, nie jest możliwe obliczenie

[18] prawa na mnożeniu opisane pod koniec działu liczby całkowite
[19] prawa z punktu 19 nadal obowiązują
[20] 1 nie jest najmniejsze w zbiorze liczb wymiernych
[21] nie jest najmniejsza
[22] nadal obowiązuje nas ograniczenie 1/d d nie może być 0

do końca potęgi liczby rzeczywistej, ale w fizyce i inżynierii wykorzystuje się odpowiednie zaokrąglenia (zaokrąglenie liczby π do 80 miejsc po przecinku wystarcza, aby obliczyć objętość obserwowalnego wszechświata z dokładnością do jednego atomu).

Inną metodą jest udowodnienie, że dana dziwnie wyglądająca wielkość jest wymierna, korzysta się z tego przede wszystkim na youtube, aby robić wrażenie na widzach. Czasem to są jednak poważne teorie matematyczne które mogą być pożyteczne dla ludzi.

W przykładach ogólnych w tabeli bardzo często można uznać, iż zmieniłem po prostu jedną literę w stosunku do definicji działań na zbiorach dedekinda. To dlatego, iż to nie jest nic nowego. To jest to samo, tylko zapisane inaczej i działające dla liczb rzeczywistych. Podczas nauczania i podczas dalszej części mojej pracy działania na liczbach rzeczywistych będę zapisywał w konwencjonalny sposób, zgodny z działaniami na zbiorach dedekinda.

Konstrukcja dedekinda nie wydaje się na pierwszy rzut oka prosta, ale jest logiczna. Dzięki niej WSZYSTKIE miejsca na osi liczbowej zostają zapełnione. Są oczywiście także inne sposoby, aby utworzyć liczby rzeczywistych, najsłynniejsze to:

1. Aksjomatyka liczb rzeczywistych
2. Aksjomatyka tarskiego
3. Ciągi Cauchy'ego

Nie będę o nich pisał, gdyż według mnie konstrukcja dedekinda jest prosta, ale skuteczna i pokazuje, jak liczby rzeczywiste wywodzą się z liczb wymiernych i doświadczeń nabytych podczas ich konstruowania.

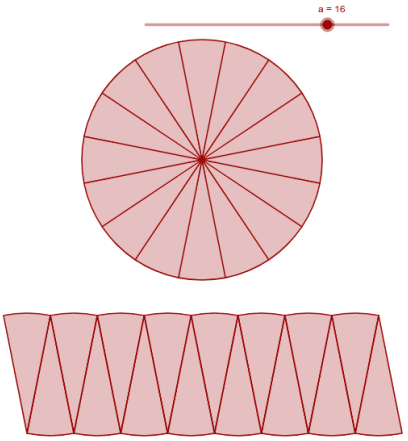
CAŁA SZKOLNA WIEDZA (I NIE TYLKO)

Ten dział mógł zostać nazwany co wynika z liczb rzeczywistych. Mimo to ten tytuł ma zaznaczyć, iż liczby rzeczywiste są czymś, co jest dziełem prawie że całkowitym. Czymś, co wystarcza do przeżycia a nawet do uprawiania dużej części tzw. wyższej matematyki. Za pomocą liczb rzeczywistych można definiować funkcje, przedziały. Działa cała geometria i równania kwadratowe. Nie o wszystkim napiszę ale pokażę, jak liczby rzeczywiste zmieniają otaczający nas świat.

Geometria: liczby rzeczywiste umożliwiają naprawde wiele rzeczy. Po pierwsze obliczanie obwodów trójkątów prostokątnych oraz ich trzeciego boku. Znane wszystkim jest twierdzenie

pitagorasa- $a^2 + b^2 = c^2$ które po przekształceniu jest następujące: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, które w zdecydowanej większości rozwiązań jest niewymierne. Twierdzenie pitagorasa jest wykorzystywane w życiu codziennym naprawdę często- obliczanie odległości i dystansu do przejścia, obliczanie długości konkretnych odcinków w domu i np.desek do przycięcia.

Pola okręgów i długości średnicy oraz długości obwodów. Dla promienia (oznaczanego literą r) prawdziwe są zależności: $P = \pi r^2$ oraz $O = 2\pi r$. Wywodzą się z nich twierdzenia w naukach o bryłach, kątach, odległościach. W życiu codziennym to obliczanie pomiarów do utworzenia w domu konkretnych elementów itd.



Dlaczego $P = \pi r^2$? Pokazanie tego jest banalnie proste. A mianowicie dzielimy okrąg na kawałki, jeśli dzielimy na większą ich ilość, tym bardziej przypomina on prostokąt o boku r(średnica okręgu) i πr(połowa długości obwodu). Istnieją trochę bardziej formalne dowody, ale ten jest prosty do zrozumienia i intuicyjny.

Sztuka użycia liczb niewymiernych w życiu codziennym polega na stosowaniu odpowiednich zaokrągleń. Z własnego doświadczenia wiem, że kiedy jadę na rowerze, to nie obchodzi mnie, czy przejadę 3,14159 km czy 3,14163 km. Potrzebuję jednak wiedzieć, że do przejechania mam jeszcze mniej więcej 3 km i potrzebuję to wiedzieć będąc na rowerze, czyli liczyć w głowie nie dokładnie, ale skutecznie i bez użycia kalkulatora.

Kwestią matematyki są równania kwadratowe, a mianowicie równania w postaci $ax^2 + bx + c = 0$ może nie są one szczególnie użyteczne w życiu codziennym, ale stanowią ważną część problemów matematycznych. Bardzo sentymentalne jest dla mnie opisanie równań kwadratowych w tej pracy, gdyż to z równań pochodziły liczby całkowite i wymierne. Poza tym sądzę, że ilość i poziom skomplikowania równań świadczy o tym, jakie liczby mają możliwości ogólnie.

Wzór na rozwiązanie takiego równania jest prosty, a mianowicie $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ rozwiązań może nie byćw liczbach rzeczywistych, kiedy wartość pod pierwiastkiem jest mniejsza niż zero, jedno, kiedy wartość pod pierwiastkiem równa jest zero i dwa, kiedy wartość pod pierwiastkiem jest większa niż zero. Co najważniejsze każde równanie kwadratowe można przekształcić w formę $ax^2 + bx + c = 0$, wystarczy tylko umiejętnie odejmować i dodawać współczynniki przerzucając je na jedną stronę.

Ale skąd taki wzór, dlaczego? Jak większość rzeczy w tej pracy tak i to postaram się udowodnić. Przyznam się, iż tutaj nie wymyśliłem tego dowodu autorsko, a "inspirowałem się" filmikiem na kanale khan akademy.

$ax^2 + bx + c = 0 \quad / \div a \Rightarrow x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \quad / - \frac{c}{a} \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a} = - \frac{c}{a}$

po tym kroku należy dodać do obu stron dopełnienie do kwadratu $(\frac{b}{2a})^2$, żeby można było zastosować wzór skróconego mnożenia

$x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 = - \frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2 \Rightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = - \frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2} \Rightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad /\sqrt{}$

ostatni etap-doprowadzenie do odpowiedniej postaci

$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} / - \frac{b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ [23] co należało udowodnić

O liczbach rzeczywistych można by pisać mnóstwo, ale nie sądzę, żeby było to niezbędne, zwłaszcza, że opisanie wszystkich zagadnień nawet skrótowo nie jest możliwe. Na sam koniec podam jedną ciekawostkę. Istnieje dyskusja, czy 1=0,(9)…?

Najpierw trzeba wprowadzić pojęcie funkcji podłoga i funkcji sufit. Korzystają one ze zbiorów Dedekinda $\lfloor R \rfloor = max(Z \cap R) \; \lceil R \rceil = max(Z \cap R) + 1$. Działanie tej funkcji jest proste. $\lfloor 3,65 \rfloor = 3 \; \lceil 3,65 \rceil = 4 \quad \lfloor -7,1 \rfloor = -8 \; \lceil -7,1 \rceil = -7 \quad \lfloor e \rfloor = 2 \; \lceil e \rceil = 3$

$x = x_0, x_1 x_2$.....Te funkcje pozwalają wprowadzić dwa wzory obliczające zaokrąglenie liczb rzeczywistych. Oto one (przedstawię je w formie prostszej do zrozumienia, dostępnej dla przeciętnego zjadacza matematycznych memów)

1. Zaokrąglenie sufitowe
   $x_0 = \lceil x - 1 \rceil \; x_1 = \lceil 10(x - x_0) - 1 \rceil \; x_2 = \lceil 100(x - x_0 - \frac{x_1}{10}) - 1 \rceil$ itd.
2. Zaokrąglenie podłogowe $x_0 = \lfloor x \rfloor \; x_1 = \lfloor 10(x - x_0) \rfloor \; x_2 = \lfloor 100(x - x_0 - \frac{x_1}{10}) \rfloor$

[23] znak plus-minus dlatego, że niezależnie, czy dana liczba jest dodatnia czy ujemna, to jej kwadrat zawsze jest dodatni

Teraz wykorzystajmy któryś z tych wzorów dla losowej liczby wymiernej, której rozwinięcie dziesiętne znamy, na przykład $\frac{1}{3}$

$x_0 = \lfloor 3 \rfloor = 0\ x_1 = \lfloor 10(\frac{1}{3} - 0) \rfloor = \lfloor \frac{10}{3} \rfloor = 3\ x_2 = \lfloor 100(\frac{10}{30} - 0 - \frac{9}{30}) \rfloor = \lfloor \frac{10}{3} \rfloor = 3$ Tak więc rozwinięcie dziesiętne liczby $\frac{1}{3} = 0,(3)$

$$x_0 = \lceil \frac{1}{3} - 1 \rceil = \lceil -\frac{2}{3} \rceil = 0$$
$$x_1 = \lceil 10(\frac{1}{3} - 0) - 1 \rceil = \lceil 10(\frac{1}{3} - 0) - 1 \rceil = \lceil 2 + \frac{2}{3} \rceil = 3$$
$$x_2 = \lceil 100(\frac{1}{3} - 0 - \frac{3}{10}) - 1 \rceil = \lceil 100 \cdot \frac{1}{30} - 1 \rceil = \lceil 2 + \frac{2}{3} \rceil = 3$$

Wzór działa dla liczb wymiernych. Tak więc podstawmy teraz do wzoru liczbę 1

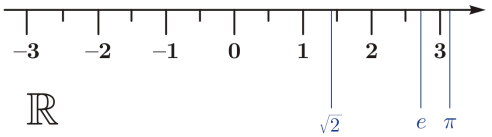
	Wzór podłogowy	Wzór sufitowy
x_0	$x_0 = \lfloor 1 \rfloor = 1$	$x_0 = \lceil 1 - 1 \rceil = 0$
x_1	$x_1 = \lfloor 10(1 - 1) \rfloor = 0$	$x_1 = \lceil 10(1 - 0) - 1 \rceil = \lceil 9 \rceil = 9$
x_2	$x_2 = \lfloor 100(1 - 1 - \frac{0}{10}) \rfloor = 0$	$x_2 = \lceil 100(1 - 0 - \frac{9}{10}) - 1 \rceil = 100(\frac{1}{10}) - 1 \rceil = = \lceil 9 \rceil = 9$

Tak więc liczba 1 ma dwa rozwinięcia dziesiętne, a mianowicie 1,00000… i 0,999999….

Sądzę, iż jest to dobry moment, aby zamknąć ten rozdział. Pokazałem tu, jak liczby rzeczywiste wpływają na geometrię, pokazałem, jaki mają wpływ na równania i rozwiązałem męczący internet od wielu lat problem matematyczny.

LICZBY ZESPOLONE

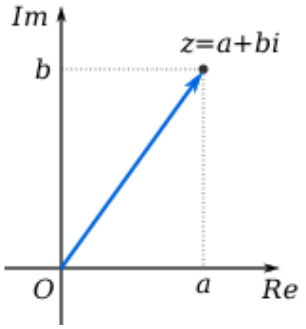
Poprzednie rodzaje liczb powstawały z potrzeby rozwiązywania nowych równań. Liczby zespolone nie są pod tym względem wyjątkiem. Równania liniowe (ax+b=0) dało się rozwiązać za pomocą liczb wymiernych. Równania kwadratowe $ax^2 + bx + c$ można w dużej części rozwiązać za pomocą liczb rzeczywistych. W równaniach sześciennych $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ i w równaniach czwartego stopnia $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + h = 0$ zdarza się bardzo często,że rozwiązanie nie należy do liczb rzeczywistych .



Równanie potwierdzające to, co napisałem powyżej to $x^2 = -1$. Podstawiając do wzoru na równanie kwadratowe.

$x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}\sqrt{-4} = \sqrt{-1}$Dlaczego $\sqrt{-1}$ nie jest rzeczywisty? Ponieważ nie istnieje żadna liczba rzeczywista, która podniesiona do kwadratu daje liczbę ujemną

Wszystkie liczby do liczb rzeczywistych utworzyć można było za pomocą zapełniania osi liczbowej. Jednak liczby rzeczywiste zapełniły całą oś. Na niej nie ma już miejsca. Postanowiono, iż utworzony zostanie nowy wymiar liczb.



Tak więc liczby zespolone to są liczby składające się z dwóch wyrazów wyrażone w formie ***z=a+bi*** gdzie a,b∈**R** z∈**C (**c to jest oznaczenie zbioru liczb zespolonych) a i to jest jednostka urojona o wartości $\sqrt{-1}$. Liczby te są rozpisane na płaszczyźnie liczb zespolonych (Re to oś rzeczywista a Im to oś urojona).

Czy na liczbach zespolonych można wykonywać działania? Można i przedstawię je.[24]

	szczególne	ogólne
dodawanie	$1 + 3i + 4 + 4i =$ $= 1 + 4 + (3 + 4)i = 5 + 7i$	$(a + bi) + (c + di) =$ $= (a + c) + ((b + d)i)$
element przeciwny	$-(3 + 5i) = -3 - 5i$	$-(a + bi) = -a - bi$

[24] Wykonanie w tabeli własnoręczne

odejmowanie	$1 + i - (3 + 4i) =$ $(1 - 3) + (1 - 4)i = - 2 - 3i$	$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + i(b - d)$
mnożenie	$(5 + 3i)(1 + 3i) =$ $= 5 + 15i + 3i + 9i^2 =$ $= 5 + 18i - 9 = 18i - 4$	$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bic + bdi^2 =$ $(ac - bd) + i(ad + bc)$
Dzielenie	$\frac{5+3i}{6-4i} = \frac{(5+3i)(6+4i)}{(6-4i)(6+4i)} = \frac{(5+3i)(6+4i)}{36-16i^2} =$ $= \frac{(5+3i)(6+4i)}{52}$	$\frac{(a+bi)}{(c+di)} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac-adi+bic-bidi}{c^2-di^2} = \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$

Te 4 podstawowe działania nie są niczym nowym. Kojarzą się z tym, co dobrze znane, np. usuwanie niewymierności (dla liczb zespolonych i) z mianownika.

Kiedy ustaliliśmy już, że liczby zespolone są liczbami, to bardzo ważne jest pytanie: Do czego one służą?

Po pierwsze, wielkie twierdzenie algebry. W wielkim skrócie ujmując każde równanie w postaci $a + bx + cx^2 + dx^3$…=0 dla nieskończenie wielu jednomianów ma rozwiązanie w zbiorze liczb zespolonych. Postaram przedstawić tutaj dowód.

Na początek 2 definicje. Jednomian to liczby i zmienne(litery) połączone między sobą mnożeniem. Wielomian to suma od dwóch do nieskończenie wielu jednomianów.Oznaczyć ją można jako v(x). W tym przypadku przyda się nam jednak inna, trochę bardziej skomplikowana definicja wielomianu. Chodzi w niej o to, aby dany wielomian przedstawić w postaci funkcji[25]. A mianowicie $v(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Czyli każdemu elementowi x przyporządkowujemy sumę tego długiego wyrażenia. Zmienna a i niewiadoma x należą do liczb zespolonych,a n jest nie mniejsze niż 1.

Zasadnicze twierdzenie algebry stwierdza, że dla każdego wielomianu stopnia n istnieje n miejsc zerowych w zbiorze zespolonych. Czyli istnieje x, który spełnia dowolne równanie w postaci $a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots = 0$ (przyporządkowuje zeru). My skupimy się na pokazaniu, iż dla każdego wielomianu istnieje co najmniej jedno rozwiązanie- to odkrycie jest zdecydowanie najważniejszym skutkiem tego twierdzenia. Twierdzenie zapisane matematycznie jest następujące:
$\exists x_0 \in C \;\; |v(x_0)| = 0$ W dowodach podaje się często lematy- twierdzenia pomocnicze przyspieszające konstrukcję dowodu. Lemat ten jest następujący;
$(\exists r > 0)\ (\forall x \in C)\ |x| > r \Rightarrow |v(x)| > v(0) = a_0$

[25] funkcja to jest przypisanie elementów zbioru X elementom zbioru Y

$v(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$

wtedy $|v(x)| = |x|^n |a_n + a_{n-1}(\frac{1}{x}) \ldots a_0 \left(\frac{1}{x}\right)^n| = |x|^n |a_n + w(x)|$ gdzie $w(y) = a_{n-1} y \ldots a_0 y^n$ Czyli zapisaliśmy ją nie na sposób rosnącego x, a na sposób malejącego x.

Dla pewnego R>0 spełniony jest warunek, że $w(y) < \frac{|a_n|}{2}$ jeśli $|y| < R$, czyli $\frac{1}{|y|} > \frac{1}{R}$ czyli $w(\frac{1}{y}) > \frac{|a_n|}{2}$

Wracając do poprzedniego punktu można zauważyć, że $y = \frac{1}{x}$. Z tego wynika, że $w(x) > \frac{|a_n|}{2}$ dla $|x| > \frac{1}{R}$

Tak więc $v(x) = |x|^n |a_n + a_{n-1}(\frac{1}{x}) \ldots a_0 \left(\frac{1}{x}\right)^n| \geq |x|^n (|a_n| - |a_{n-1}(\frac{1}{x}) \ldots a_0 \left(\frac{1}{x}\right)^n|) \geq \frac{|a_n|}{2} |x|^n$ Z tego za pomocą łańcucha rzeczy większych lub równych wynika, że $\frac{|a_n|}{2} |x|^n > |a_0| \Rightarrow |x| > \sqrt[n]{\frac{2|a_0|}{|a_n|}}$.

Z tego też wynika, że istnieje r>0 że twierdzenie lematu jest spełnione. $r = max\{\frac{1}{R}, \sqrt[n]{\frac{2|a_0|}{|a_n|}}\}$

Udowodnione. Uff. Ciężko było, ale się udało. Dowód oczywiście nie jest przeze mnie wymyślony. Zrozumienie go jest ciężkie i wymaga chwili analizowania, ale warto. Postaram się teraz opisać ten dowód tak, aby było prosto zrozumieć, co się tu działo.

Na początku ustaliliśmy twierdzenie, które łatwiej jest udowodnić, a jego udowodnienie jest równoznaczne z udowodnieniem twierdzenia początkowego. Po tym rozbiliśmy funkcję na czynniki pierwsze. Później stworzyliśmy funkcję pomocniczą w. Z tej funkcji wyprowadziliśmy własności, które pomogły nam udowodnić wniosek, że |x|>... . Potem ustaliliśmy, jakie musi być r, aby lemat był spełniony, czyli aby pierwsza teza była udowodniona.

Jesteśmy w stanie rozwiązywać równania, które są niesamowicie skomplikowane. Równania nieskończonej długości. Wielomiany z liczbami zespolonymi. To jest według mnie niesamowite. Liczby zespolone dają olbrzymią ilość nowych możliwości dla matematyki.

Początkowe zbiory liczb oprócz liczb naturalnych miały za zadanie rozwiązywać równania. Kolejne zbiory liczbowe odchodziły od tego pierwotnego zadania, znajdując inne. Liczby zespolone oprócz równań mają bardzo wiele zastosowań w trygonometrii. Liczby na płaszczyźnie umożliwiają zapis różnych tożsamości.

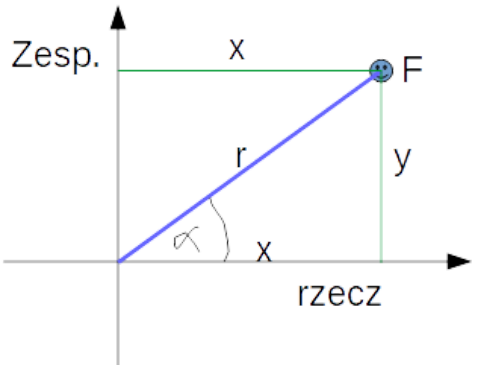
Liczbę zespoloną można przedstawić jako punkt na płaszczyźnie zespolonej. Ten punkt oprócz współrzędnych jest położony w pewnej odległości od środka układu. To jednak pozostawia nieskończenie wiele punktów do wyboru[26]. Dlatego drugą informacją niezbędną do ukazania jest odchylenie od osi rzeczywistej. Przedstawię to na podstawie pierwszej ćwiartki, gdyż jest to najłatwiejsze do zrozumienia. Niech oś y będzie osią urojoną.

Na pokazanej z boku sytuacji $F = x + iy$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ z twierdzenia pitagorasa. [27]

$x = r \cdot cos\alpha \quad y = r \cdot sin\alpha$

$F = x + iy = r \cdot cos\alpha + ir \cdot sin\alpha = r(cos\alpha + i \cdot sin\alpha)$



Powyższe proces miał na celu pokazanie postaci trygonometrycznej liczb zespolonych, czyli formy $r(cos\alpha + i \cdot sin\alpha)$. r to jest moduł liczby[28], a argument to α spełniająca dwa warunki-$sin\alpha = \frac{y}{r} \quad cos\alpha = \frac{x}{r}$ Czy na tej formie liczb da się wykonywać działania? TAK!

A przynajmniej mnożenie i dzielenie:.

$r(cos\alpha + i \cdot sin\alpha) \cdot p(cos\beta + i \cdot sin\beta) = rp(cos(\alpha + \beta) + isin(\alpha + \beta))$

$\frac{r(cos\alpha + i \cdot sin\alpha)}{p(cos\beta + i \cdot sin\beta)} = \frac{r}{p}(cos(\alpha + \beta) + isin(\alpha + \beta))$

Nigdzie niestety nie mogłem znaleźć informacji, jak dodawać i odejmować liczby zespolone w postaci trygonometrycznej. Dlatego sam spróbowałem takowy wymyślić. Rysowałem na kartce dwie liczby, ustalając ich sumę metodą zwyczajną (postacią algebraiczną), a potem szukając między nimi zależności trygonometrycznych. Przekształcałem uzyskane wzory na wiele różnych sposobów. Po długich poszukiwaniach stwierdziłem jednak, iż nie istnieje metoda dodawania liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej która nie korzystałaby z przekształcania jej na postać algebraiczną.

---

[26] promień wytycza koło, na którego brzegach jest nieskończenie wiele punktów
[27] Wykonanie własnoręczne
[28] moduł liczby q często jest oznaczany |q|

Do czego służy jednak postać trygonometryczna? Pozwala ona w prosty sposób uzyskać wzory na sumy trygonometryczne- wystarczy zapamiętać tylko dwa wzory- na mnożenie i na dzielenie postaci trygonometrycznych. Powstało wiele teorii dotyczących tych liczb- ale to temat na oddzielną pracę.

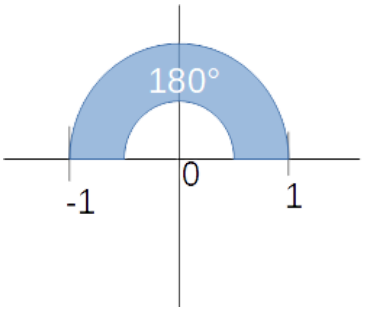
Trzecim sposobem zapisania liczby zespolonej to postać wykładnicza. Funkcje trygonometryczne da się zapisać w radianach- wartość takiej funkcji to od $-\pi$ do π. Wtedy postać wykładnicza to $c = |c|e^{i\alpha}$ gdzie c∈**C** e to stała Eulera a |c| to jest moduł z c, α to miara kąta wyrażona w radianach. Jej forma wynika z postaci kilku ciągów nieskończonych-tak więc ta postać też jest poprawna.Na postaci wykładniczej można wykonywać mnożenie i dzielenie:

$$c_1 \cdot c_2 = |c_1|e^{i\alpha_1} \cdot |c_2|e^{i\alpha_2} = |c_1| \cdot |c_2| \cdot e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{|c_1|e^{i\alpha_1}}{|c_2|e^{i\alpha_2}} = \frac{|c_1|}{|c_2|} \cdot e^{i(\alpha_1-\alpha_2)} \quad c_2 \neq 0$$

Co ciekawe wszystkie te wzory działają dla liczb rzeczywistych.
$\frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12e^{0\cdot 0}}{\sqrt{6}e^{0\cdot 0}} = \frac{12}{\sqrt{6}} \cdot e^{0(0-0)} = \frac{12}{\sqrt{6}} \cdot 1$ Moduły liczb rzeczywistych są równe wartościom liczb rzeczywistych, a argumenty obu liczb rzeczywistych są równe zero.

Z postacią wykładniczą liczb zespolonych wiąże się jeden z najpiękniejszych wzorów matematyki $e^{\pi i} + 1 = 0 \Rightarrow e^{\pi i} = -1$



Kat o mierze Pi radianów odpowiada Kątowi180 stopni.
$c_{poszukiwana} = |1| \cdot e^{\pi i} = e^{\pi i}$ liczba ta leży w tej samej odległości od 0 co 1, ale w przeciwnym kierunku[29], czyli jest to -1 **|1|=|-1|.**

Podstawiając inne liczby jako moduły uzyskany będzie wynik uzyskany w ten sam sposób (liczba przeciwna do modułu).

[29] liczba e^(αi) to argument liczby zespolonej

Liczby zespolone mają wiele zastosowań i matematycznych, i fizycznych i kosmologicznych. Głównym celem tego działu było ukazanie liczb zespolonych, a przede wszystkim ich majstersztyku konstrukcyjnego. Mają one trzy postacie, a każda z nich jest użyteczna. Każda daje nowe możliwości. W tej pracy mam nadzieję, że widać wzrastający poziom skomplikowania konstrukcji. Od tych najprostszych naturalnych aż po trzy postaciowe liczby zespolone. A to jeszcze nie koniec…

KWATERNIONY

Po nieoczywistym na początku sukcesie liczb zespolonych matematycy poszukiwali nowych rodzajów liczb licząc na to, iż będą one tak ważne jak liczby zespolone. Poszukiwania trwały, ale nikt nie potrafił nic nowego wymyślić. William Hamilton- irlandzki matematyk też poszukiwał liczb trójwymiarowych, ale nic nie przychodziło mu do głowy, gdyż w każdym systemie liczbowym trójwymiarowym istniały problemy ze zdefiniowaniem mnożenia. Pewnego dnia,kiedy szedł na posiedzenie wpadł na genialny pomysł, uznał, iż liczby mogą mieć cztery wymiary- jeden to oś liczb rzeczywistych. Pozostałe trzy to jednostki urojone i,j,k. William wyrył scyzorykiem na moście wzory. A wracając do kwaternionów…

Są to twory w postaci $a + bi + cj + kd$ gdzie $a, b, c, d \in R$ a i,j,k to jednostki urojone.Kwaterniony(ich zbiór) oznacza się literą **H**.Te twory są liczbami, można na nich wykonywać podstawowe działania.Przedstawię je w poniższej tabeli

dział	ogólny przykład	szczególny przykład
dodawanie	$(a + bi + cj + dk) + (e + fi + gj + hk) =$ $= (a + e) + (b + f)i + (c + g)j + (d + h)k$	$(6 + 5i + 8j - 3k) + (4 + 7i + 8j + 7k) =$ $= (6 + 4) + (5 + 7)i + (8 + 8)j + (-3 + 7)k =$ $10 + 12i + 16j + 4k$
odejmowanie	$(a + bi + cj + dk) - (e + fi + gj + hk) =$ $= (a - e) + (b - f)i + (c - g)j + (d - h)k$	$(6 + 5i + 8j - 3k) - (4 + 7i + 8j + 7k) =$ $= (6 - 4) + (5 - 7)i + (8 - 8)j - (-3 + 7)k =$ $2 - 2i - 4k$
mnożenie	$(a + bi + cj + dk) \cdot (e + fi + gj + hk) =$ $ae + afi + agj + ahk +$ $bie + bfi^2 + bgji + bhki+$ $cej + cfij + cgj^2 + chkj+$ $dek + dfik + dgjk + dhk^2$	$(6 + 5i + 8j - 3k) \cdot (4 + 7i + 8j + 7k) =$ $6 \cdot 4 + 6 \cdot 7i + 6 \cdot 8j + 6 \cdot 7k +$ $5 \cdot 4i + 5 \cdot 7i^2 + 5 \cdot 8ji + 5 \cdot 7ki+$ $8 \cdot 4j + 8 \cdot 7ij + 8 \cdot 8j^2 + 8 \cdot 7kj +$ $-3 \cdot 4k - 3 \cdot 7ik - 3 \cdot 8jk - 3 \cdot 7k^2$

W mnożeniu pojawiają się wyrażenia, których wartości nie da się podać, na przykład ij,jj,kk,ii,kj,ki. Mnożenie tych wyrażeń było zmorą matematyków. Nikt nie wiedział, jak przejść przez ten problem. Dopiero po wielu latach pracy Rowan William Hamilton znalazł rozwiązanie. To podczas spaceru mostem- o którym napisałem wcześniej, przyszło mu do głowy rozwiązanie tego problemu. A mianowicie: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ Ponadto prawdziwe są następujące równości:

1. $ij =- ji = k$
2. $ki =- ik = j$
3. $jk =- kj = i$

Podane wzory na mnożenie jednostek urojonych nie wydają się logiczne. Przecież z tego wynika, że $ijk =- ijk$ Mimo to wykonując działania można przekonać się, że zastosowane wzory działają i nie tworzą paradoksów. Np.$ij \cdot - ij =- 1 \cdot i^2 \cdot j^2 =- 1 \cdot - 1 \cdot - 1 =- 1 = ijk$ .Wszystkie warunki, które liczby muszą spełniać (oprócz przemienności mnożenia) są spełnione.

Tak więc ze zdobytą wiedzą można powrócić do mnożenia kwaternionów.[30]

$(a + bi + cj + dk) \cdot (e + fi + gj + hk) =$
$ae + afi + agj + ahk +$
$bie + bfi^2 + bgji + bhki+$
$cej + cfij + cgj^2 + chkj+$
$dek + dfik + dgjk + dhk^2 =$

$ae + iaf + jag + kah +$
$ibe - bf + kbg + jbh$
$jce + kcf - cg + ich$
$kde + jdf + idg - dh =$

$(ae - bf - cg - dh) + i(af + be + ch + dg) + j(ag + bh + ce + df) + k(ah + bg + cf + de)$

Te przekształcenia pozwoliły na uczynienie wzoru bardziej przejrzystym. I ułatwia korzystanie z niego. Mimo to ten wzór nadal jest bardzo skomplikowany. Czy da się go jakoś uprościć? Tak. Należy do tego użyć wektorów.

Człowiek nie jest w stanie wyobrazić sobie czterowymiarowej przestrzeni, a tym bardziej skuteczniej w niej wykonywać działania. Dlatego Hamilton wymyślił, iż kwaterniony można podzielić na dwie części. W równaniu na niebiesko zaznaczona jest część skalarna (położenie na osi rzeczywistej), a na czerwono wektorowa (położenie w przestrzeni trzech wymiarów urojonych).

a+xi+yj+zk

Wektor według Hamiltona to czysto urojony kwaternion (xi+yj+zk). Opisać go można jednak jako odcinek od punktu (0,0,0) do punkty w przestrzeni reprezentującego czysto urojony kwaternion. We współczynnikach x,y,z zaprogramowane są kierunek, zwrot i punkt przyłożenia i długość wektora. Takie wektory można wykorzystać do uproszczenia działań na kwaternionach:[31]

$(a + \overline{v}_1) \cdot (b + \overline{v}_2) = (a \cdot b - \overline{v}_1 \circ \overline{v}_2)(a \cdot \overline{v}_2 + b \cdot \overline{v}_1 + \overline{v}_1 \times \overline{v}_2)$

$(a + \overline{v}_1) \div (b + \overline{v}_2) = (a + \overline{v}_1) \cdot (b + \overline{v}_2)^{-1}$
$(b + \overline{v}_2)^{-1} = \frac{1}{b^2 + \overline{v}_1 \circ \overline{v}_2}(b - \overline{v}_2) \wedge b^2 + \overline{v}_1 \circ \overline{v}_2 \neq 0$

[30] Wykonanie własnoręczne
[31] ze względu na ograniczenia techniczne strzałka nad wektorem zastąpiona będzie kreską

gdzie ◦ to iloczyn skalarny, a × to iloczyn wektorowy. Iloczyn skalarny jest sumą iloczynów składowych wektora (czyli xi,yj,zk). Iloczyn wektorowy to inny wektor spełniający określone właściwości.

Iloczyn wektorowy jest opisywany przez macierze- nową strukturę matematyczną. Kwaterniony pokazały matematykom, że liczby nie są wystarczające do opisu teorii matematycznych. Powstanie nowych struktur było tylko kwestią czasu. Wtedy powstały na przykład algebry Clifforda. Nowe konstrukcje zaczęły wypierać kwaterniony, których użycie stawało się coraz mniejsze,

Wektory powstały na potrzebę kwaternionów. Podział kwaternionów na część skalarną i wektorową przypomina podział czasoprzestrzeni na czas i przestrzeń. Hamilton sądził, iż jego liczby służyć będą do ich opisu. Olivier Heaviside stwierdził jednak, że wektorów można użyć w oderwaniu od kwaternionów. Miał rację. Dzisiaj wektorów używa się naprawdę często-uczy się o nich nawet w szkole podstawowej. Weszły one nawet do codziennego użycia, w przeciwieństwie do kwaternionów.

Kwaterniony straciły na znaczeniu w obliczu powstania nowych struktur i nowych systemów liczbowych. Wykorzystuje się je jednak w jednej dziedzinie. Są one tam niezastąpione. A mianowicie opis rotacji w trzech wymiarach. Przedstawienie obrotu w dwóch wymiarach jest prosty. Wystarczy wybrać punkt na figurze wokół którego ją obrócimy i podać kąt obrotu. W trzech wymiarach jest to trudniejsze. Bryła obraca się wokół prostej. Trzeba utworzyć prostą przechodzącą przez dwa punkty w przestrzeni. Jeden z tych punktów ma współrzędne (0,0,0). Drugi punkt to wtedy a,b,c. Istnieją wzory, które pozwalają obliczyć współrzędne końcowe punktu na podstawie współrzędnych początkowych, lokalizacji punkty drugiego i kąta obrotu.

Istnieją inne sposoby na opis obrotu w trzech wymiarach, ale są one zdecydowanie bardziej skomplikowane niż kwaterniony. Istnieje olbrzymia infrastruktura informatyczna (silniki 3D) obsługująca kwaterniony.

Kwaterniony są liczbami czterowymiarowymi. Można je także przedstawić w dwuwymiarowej przestrzeni, w której każdy wymiar to wymiar liczb zespolonych. Czyli:
$g \in H \Rightarrow g = (a + bi)1 + (c + di)j$ definiując k=ij to $g = a + bi + cj + dk$

Kwaterniony rozszerzają liczby zespolone i dają wiele nowych możliwości. Istnieją także inne zbiory rozszerzające zbiór **C**, lecz one odchodzą od tematu pracy. Pomimo wykonalności na nich większości działań matematycznych ich funkcje coraz bardziej odbiegają od funkcji liczb, a przybliżają się do innych, bardziej skomplikowanych tworów.

LICZBY P-ADYCZNE

Liczby rzeczywiste mają rozwinięcie dziesiętne po przecinku. Czy istnieją liczby, które mają rozwinięcie dziesiętne przed przecinkiem? Tak istnieje taki sposób. Są to liczby p-adyczne. Literę p zastępuje się dowolną liczbą-najczęściej pierwszą[32]. Tak więc istnieją liczby 3-adyczne, liczby 5-adyczne itd. Oznacza się je $Q_2, Q_3, Q_5, Q_7, Q_9,...,$ Liczby te zapisuje się w systemie liczbowym odpowiednim dla danej liczby pierwszej p, czyli cyfry w tym systemie to (0,1,2,…,n-1). Przedstawiony jest przykładowy zapis liczb i system zapisu oraz jego dopuszczalna forma. Ale teraz najważniejsze pytanie. Czy liczby p-adyczne to liczby? Tak! Działania na nich definiuje się poprzez działania pisemne. Podam je na przykładach[33], gdyż zapis symboliczny jest trudny i niepotrzebny. Wykorzystam różne systemy adyczne. Pogrubione liczby to liczby przeniesione z poprzedniej kolumny. Pierwsze dwa rzędy to liczby dodawane, a trzeci to ich suma.

System liczbowy	Zapis liczby przykładowy	Zapis dopuszczalny
Q_2	...0000001	$...0000001_2$
Q_3	…210001,21	$…210001,21_3$
Q_5	(44322),1221	$(44322),1221_5$
Q_7	(6456),54	$(6456),54_7$

działanie pisemne1	zapis symboliczny
<table><tr><td>...</td><td>2+1</td><td>3</td><td>0+1</td><td>2+1</td><td>1+1</td><td>,</td><td>3</td><td>0</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>+ ...</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>,</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td></td></tr><tr><td>...</td><td>4</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>0</td><td>,</td><td>0</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td></tr></table> dla liczb 5-adycznych	$... 23021,3023 + ... 14343,212 = ... 43430,0143$
<table><tr><td>.. .</td><td>2-1</td><td>3-1</td><td>0-1</td><td>2-1</td><td>1</td><td>,</td><td>3-1</td><td>0</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>- ...</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>,</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td></td></tr><tr><td>.. .</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>,</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>3</td></tr></table> dla liczb 5-adycznych	$... 23021,3023 - ... 14343,212 = ... 02012,0203$
dla liczb 7-adycznych ... 1 5 3 3 2 0 3, 1 2 5 · ... 1 0 1 0 0 1 0 1, 1 2 ... 3 3 6 6 4 0 6 2 5 3 ... 5 3 3 2 0 3 1 2 5 ... 3 3 2 0 3 1 2 5 ... 2 0 3 1 2 5 ... 1 2 5 ... 5 ... 6 6 6 3 3, 3 3 3 3 3	$... 153203,125 \cdot 10100101,12 = = 66633,33333$

[32] kiedy p jest liczbą pierwszą, wtedy w takim systemie liczbowym nie istnieją dwie niezerowe liczby, które pomnożone przez siebie dają zero

[33] Szare tabele w tym dziale i następnym wykonane własnoręcznie

Dzielenie liczb p-adycznych istnieje, ale jest ono stosunkowo skomplikowane i wymagałoby długiego opisu. Najważniejsze jest, że $x, y \in Q_p \wedge y \neq (0), 0 \Rightarrow \frac{x}{y} \in Q_p$

Liczby p-adyczne są rozszerzeniem liczb wymiernych, ale nie są równe liczbom rzeczywistym, nie każdy element liczb rzeczywistych jest p-adyczny i nie każdy element liczb p-adycznych jest rzeczywisty. Aby to pokazać, to podam następujące przykłady:

$\sqrt{(4)_5} = \sqrt{-1}\ \ \sqrt{(4)_5} \in Q_5 \wedge \sqrt{-1}\ \ \notin R$

$\sqrt{2} \in R \wedge \sqrt{2} \notin Q_5$ bo nie istnieje liczba 5-adyczna, która pomnożona przez siebie daje 2.

Tak więc pokazałem, że liczby p-adyczne i rzeczywiste to zbiory, które zdecydowanie się od siebie różnią. Nawet zbiory p-adyczne różnią się między sobą, ale to myślę temat na zupełnie inną pracę.

Po co liczby p-adyczne? Najsłynniejszym miejscem, w którym wykorzystano liczby p-adyczne to wielkie twierdzenie fermata, które jest następujące:
$nie\ istnieje\ n \geq 3 \wedge x, y, z, n \in N,\ że\ a^n + b^n = c^n$

Z liczbami p-adycznymi jest związana cała arytmetyka tych liczb, której głównym elementem są działania pisemne.

Działania p-adyczne są związane z następująca zaskakującą tożsamością:

$\ldots x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \ldots = A \Rightarrow Ax = A \Rightarrow A(x - 1) = 0 \Rightarrow (x \neq 1 \Rightarrow A = 0)$

Istnieją także inne zastosowania liczb p-adycznych, takie jak kryptografia i informatyka teoretyczna. Liczby p-adyczne są naprawdę ciekawym i nietypowym tworem, nad którym warto się pochylić. Są przydatne w wielu miejscach, a nawet, gdyby nie były teraz przydatne to kto wie, może za sto lat?

LICZBY KARDYNALNE

Nieskończoność. Co to? Nieskończoność jest paradoksogenna i nieintuicyjna. Mózg człowieka nie jest przyzwyczajony do liczenia w takich kategoriach. Mimo to naukowcy, tacy jak Cantor podejmowali się tego tematu. Nawet skutecznie.

Ile dany zbiór ma elementów? Jeśli jest to zbiór skończony np. A={1,2,3} to liczba jego elementów, tj. moc zbioru również jest skończona. Ale co zrobić, kiedy moc zbioru jest nieskończona-kiedy zbiór ma nieskończoność elementów? Cantor postanowił zaradzić temu problemowi w następujący sposób.Ustalił, że moc zbioru liczb naturalnych oznaczona będzie jako $\aleph_0$ (alef 0),a inne zbiory będzie porównywał do alefa.

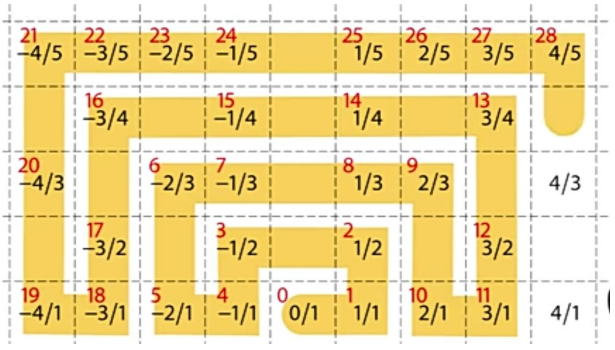
Nadchodzi zatem pytanie, jak porównać ilość elementów w zbiorze,jak stwierdzić, że zbiór A ma moc zbioru taką samą jak moc zbioru B. Cantor wymyślił sposób logiczny i intuicyjny. Chodzi o to, że zbiory są równoliczne, kiedy każdemu elementowi zbioru A przyporządkować można element zbioru B. Kiedy można te elementy pogrupować w pary.

Za przykład niech posłuży, nam codzienność. Chcemy sprawdzić, czy truskawek w koszyku jest tyle samo co malin. Tworzymy parę truskawka-malina. Tworzymy je do czasu, kiedy zostanie tylko jeden rodzaj owoców. Wtedy ten rodzaj, który został w koszyku jest tym, z którego owoców jest więcej.

Dla liczb skończonych częściej chcemy znać ilość obu rodzajów elementów, a dopiero potem je porównywać. W przypadku liczb nieskończonych to nie jest możliwe. Ilość elementów zbiory liczb naturalnych oznaczono symbolem alef. Nie można wyrazić w liczbach jego wartości. Można natomiast porównywać dane zbiory i grupować ich elementy w pary.

N	Z_+	N	Z_-
2	1	1	-1
4	2	3	-2
6	3	5	-3
2k	k	2k-1	-k

Oczywistym wydaje się, że liczb całkowitych jest dwa razy więcej niż naturalnych. Cantor udowodnił jednak, że liczb całkowitych jest tyle samo co naturalnych. Przyporządkował je w sposób przedstawiony z boku . Zero z liczb naturalnych zostało przyporządkowane do zera z liczb całkowitych. Tak więc $|N| = |Z|$. Czyli moc zbioru **N** jest taka sama co moc zbioru **Z**.[34]



Ilość liczb wymiernych jest taka sama co ilość liczb naturalnych.Przyporządkowanie jest proste. A

[34] symbol mocy zbioru |X| przypomina symbol wartości odczytywanie zależy od kontekstu.

mianowicie należy zrobić to zgodnie z metodą pół nieskończonej szachownicy- przedstawioną na rysunku obok. Każda strzałka to przeskok na następną liczbę naturalną. Przyporządkowanie się udało. Teraz pytanie, czy liczby rzeczywiste też uda się tak przyporządkować?

NIE! Dowód Cantora jest prosty-sprowadzenie do sprzeczności. Niech wszystkie liczby rzeczywiste zostaną przyporządkowane liczbom naturalnym w dowolny sposób. Niech przykładowo $1 \to 0,01\ \ 2 \to -\ 17,55546433\ldots\ldots\ 3 \to 12,(74)$ i tak dalej. W tym momencie można stworzyć nową liczbę rzeczywistą. Z pierwszej liczby bierzemy liczbę całości, z drugiej pierwszą liczbę po przecinku, z trzeciej drugą liczbę po przecinku i tak dalej. Potem te liczby powiększamy o 1 (dla dziewiątki odejmujemy). Tak więc powstała liczba 1,65…. itd. Liczba ta jest różna od wszystkich liczb rzeczywistych przyporządkowanych. Tak więc nie wszystkie liczby są przyporządkowane i zawsze stwierdzenie, że WSZYSTKIE liczby rzeczywiste są przyporządkowane będzie nieprawdziwe.

Co wtedy zrobić z liczbami rzeczywistymi. Moc ich zbioru to $\mathfrak{c}$,którą w tym rozdziale oznaczać będę literą c. Moc liczb rzeczywistych równa jest mocy liczb zespolonych |**R**|=|**C**|=|**H**|=|Q_p|.

Czy istnieją inne liczby kardynalne? Tak, ale trzeba poszukać w podzbiorach liczb. A mianowicie robi się to metodą podzbiorów liczb naturalnych. Działania na liczbach kardynalnych istnieją, ale są nieważne. Ważne są za to zbiory potęgowe zbioru.

Zbiór A	moc |A|	zbiór podzbiorów zbioru P(A)	moc |P(A)|
{a}	1	{Ø,{a}}	2
{a,b}	2	{Ø,{a},{b},{a,b}}	4
{a,b,c}	3	{Ø,{a},{b},{c},{a,b},{a,c},{b,c},{a,b,c}}	8

Nasuwa się prosty wniosek $2^{|A|} = |P(A)|$. Dla liczb kardynalnych ta równość się też sprawdza. $2^{\aleph_0} = P(\aleph_0) = c$.

Ciąg liczb kardynalnych przedstawia się następująco:

$$\aleph_0 < c < 2^c < 2^{2^c} < 2^{2^{2^c}} <....$$

Hipoteza continuum stawia pytanie, czy to są już wszystkie liczby kardynalne? Naukowcy sądzą, że tak. Udowodniono jednak, że nie jest możliwe dowiedzenie jej matematycznie. Hipoteza ta to jest jedno z największych pytań matematyki.

Liczby kardynalne są czymś niesamowitym jak i cała nieskończoność. Nie jest to praca o nieskończoności, więc tylko zahaczyłem o ten temat. Mimo to to zahaczenie było czymś niesamowitym.

Istnieją także inne sposoby reprezentacji wielkości nieskończonych- liczby porządkowe. Istnieją także wielkości nieskończenie małe. Nawet naukowcy nie są pewni, jakie własności mają tamte liczby. Badania cały czas trwają, dowody ciągle powstają.

ZAKOŃCZENIE

To nie jest praca historyczna- rozwiązania równań kwadratowych znano w starożytnym Babilonie. Definiowanie aksjomatów to historia współczesna-do dziś nie zakończono tego procesu. Ta praca nie jest chronologiczna- nie o to w niej chodzi. Nie chodzi też o to, aby odkryć coś nowego-większość, jeśli nie wszystkie z tych faktów są znane przeciętnemu licealiście z klasy pierwszej. Mimo to ta praca ma mieć wartość dla każdego- od licealisty aż po profesora matematyki. Ta praca ma być powrotem do korzeni. Nie odpowiada ona na pytanie co? Nie odpowiada na pytanie kiedy. Jedyne, ale najważniejsze pytanie matematyki, na które jest tutaj odpowiedź to dlaczego. Własność łatwo zauważyć, na przykład $2^{\aleph_0} = c$, ale ciężko ją udowodnić. Udowodnienie wymaga myślenia ogólnego i kreatywności.

Konwencją tej pracy było pokazanie znanych własności, ale z innym nastawieniem. Nie wystarczy nam ich poznanie. Trzeba je zrozumieć. Trzeba poznać konstrukcję liczb całkowitych, by zrozumieć szanse wypływające z kwaternionów. Matematyka jest czymś pięknym i tak niesamowicie logicznym, że zapiera dech w piersi i zachwyca każdą linijką równań. Dzięki pisaniu tej pracy zrozumiałem, co się z czego wywodzi. Zrozumiałem,że wszystko w matematyce pochodzi z czegoś.

ŹRÓDŁA

Źródła, które służyły jako źródło informacji, a także jako źródło inspiracji do większości dowodów (większość dowodów i definicji jest autorska, ale wykorzystują one informacje ze stron napisanych poniżej). W przypadku większości źródeł korzystano z fragmentów prac a nie całych prac.

1) ,internetowe:
    a) https://www.britannica.com/science/Peano-axioms
    b) https://pl.wikipedia.org/wiki/Aksjomaty_i_konstrukcje_liczb
    c) https://www.matematyczny-swiat.pl/2017/08/nie-mozna-dzielic-przez-zero.html
    d) https://en.wikipedia.org/wiki/Construction_of_the_real_numbers
    e) https://pl.wikipedia.org/wiki/Zasadnicze_twierdzenie_algebry
    f) https://eia.pg.edu.pl/documents/184139/28394338/PA_2009_2010_CW_T8_Material_pomocniczy%201.pdf
    g) https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion

2) Ilustracje (czasami strony lub filmy, z których pochodzą ilustracje).
    a) https://www.geogebra.org/m/yrGZgF4S
    b) https://pl.wikipedia.org/wiki/Aksjomaty_i_konstrukcje_liczb
    c) https://pl.wikipedia.org/wiki/Liczby_zespolone
    d) https://ichi.pro/pl/geometria-liczb-i-kwaternionow-186602691161996
    e) https://pl.wikipedia.org/wiki/Liczby_rzeczywiste
    f) https://www.youtube.com/watch?v=iNMyy9fZpZk
    g) https://www.youtube.com/watch?v=lsOpyWmkU0o

3) Wideoteka:
    a) https://www.youtube.com/watch?v=0MjpPB3yDRg
    b) https://www.youtube.com/watch?v=rYcueOPlMdg
    c) https://www.youtube.com/watch?v=DY-bxOFqiOw
    d) https://www.youtube.com/watch?v=6-Wmlj4rUdw
    e) https://www.youtube.com/watch?v=HMDb9zJ2BdA
    f) https://www.youtube.com/watch?v=lsOpyWmkU0o
    g) https://www.youtube.com/watch?v=iNMyy9fZpZk
    h) https://pl.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:irrational-numbers/x2f8bb11595b61c86:proofs-concerning-irrational-numbers/v/proof-that-square-root-of-2-is-irrational
    i) https://www.youtube.com/watch?v=EyQ69Ms2EoY
    j) https://www.youtube.com/watch?v=XXRwlo_MHnI