

3-4-5 i kąt jest prosty

autor:

Ewa Śmietana

Kategoria: szkoły podstawowe kl. 4-6

Szkoła Podstawowa Zakonu Pijarów

ul. Dzielskiego 1

31-465 Kraków

Telefon: 12 413 66 44

e-mail: sekretariat.sp@pijarzy.pl

Spis treści

1. Wstęp	3
2. Kim był Pitagoras?	3
3. Twierdzenie Pitagorasa - historia prawdziwa.....	4
4. Czym jest twierdzenie Pitagorasa?	4
5. Dowody na twierdzenie Pitagorasa.....	5
6. Szczególne przypadki	12
7. Do czego może nam się przydać twierdzenie Pitagorasa?	13
8. Twierdzenia pochodne do twierdzenia Pitagorasa.	17
9. Podsumowanie.....	18
10. Bibliografia:.....	19

1. Wstęp

Kiedy zaczynałam szukać tematu na pracę myślałam, że twierdzenie Pitagorasa to tylko wzór i kilka zadań, do których można go wykorzystać. Jednak w miarę zapoznawania się z materiałem dotyczącym Pitagorasa, jego osiągnięć i twierdzenia które udowodnił, bardzo wciągnął mnie ten temat. Twierdzenie Pitagorasa okazało się być tak szerokim zagadnieniem, że aby opisać wszystko, co z nim związane, musiałabym napisać książkę wielkości słownika języka polskiego. Wielorakość zastosowań czy liczba osób, których zainteresowanie wzbudziło twierdzenie na przestrzeni wieków, to wystarczające powody aby odkryć, co kryje się pod wzorem

$$a^2 + b^2 = c^2 .$$

2. Kim był Pitagoras?

Pitagoras pochodził z Grecji. Urodził się ok. 580 r. p.n.e., w Samos. Pitagoras otrzymał wszechstronne wykształcenie. Umiał grać na lirze oraz cytować dzieła Homera. Matematyki, kosmologii i astronomii nauczali Pitagorasa m.in. Tales i Anaksymander z Miletu. Ok. 535 p.n.e. Pitagoras udał się do Egiptu by dyskutować z tamtejszymi kapłanami. W Egipcie Pitagoras rozszerzył swoją wiedzę geometryczną. Niestety w 525 r. p.n.e. perski król Kambyzes II podbił Egipt. Podczas tej wojny Pitagoras został wzięty do niewoli i osadzony w Babilonii. Tam poznał perskich kapłanów Magoi, oraz dzięki Babilończykom osiągnął szczyt swojej wiedzy matematycznej. Po śmierci Kambyzesa Pitagoras udał się do Krotonu i tam założył szkołę filozofów i matematyków zwaną „Półokrąg”. Członkowie jego szkoły nazywali się matematikoi (lub pitagorejczykami). Żyli oni jak zakonnicy, byli wegetarianami oraz mieli bardzo ubogie i surowe warunki życia. Każdy z członków „Półokręgu” musiał przysiąc, że nie wyjawia sekretów nauki szkoły. Nawet po śmierci Pitagorasa zdrada nauk bractwa była karana utopieniem. Należy zaznaczyć, że „Półokrąg” nie zajmował się „otwartymi” problemami, a jego członkowie nie starali się ich formułować, ani rozwiązywać. Pitagoras preferował zajmowanie się prawami i regułami matematycznymi, koncepcją samej liczby, oraz rozmaitych figur geometrycznych m.in. trójkątów. Ponadto, pitagorejczycy uważali, że liczby mają własną osobowość żeńską lub męską 😊, pełną lub niekompletną, piękną lub brzydką 😊, np. liczbę 10 uważali za liczbę doskonałą, ponieważ zawierała ona 1 oraz 0 (początek i koniec). Zawierała również cztery pierwsze palce 1, 2, 3, 4 ($1+2+3+4 = 10$), a te liczby pisane w notacji kropkowej tworzą trójkąt równoboczny.

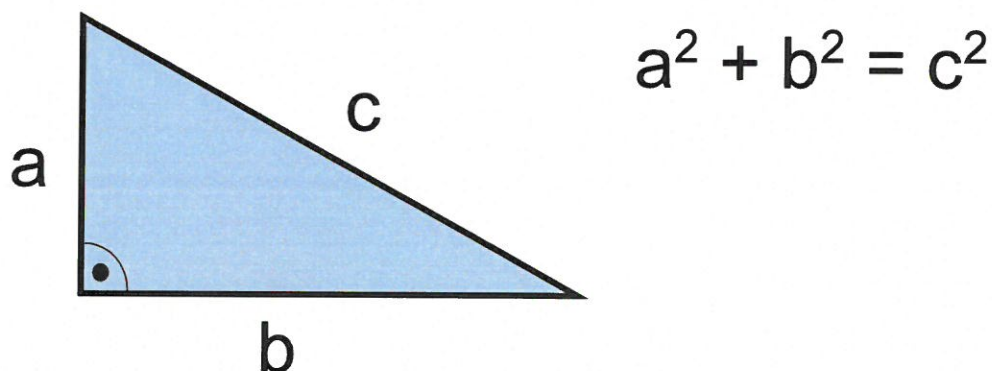
3. Twierdzenie Pitagorasa - historia prawdziwa

Najprawdopodobniej autorami twierdzenia Pitagorasa byli Babilońscy matematycy. Zanim filozof przyszedł na świat twierdzenie znali również Egipcjanie wykorzystując je do wyznaczania kątów prostych o czym świadczą zachowane tabliczki z pismem klinowym, Chińczycy i Hindusi. Dlaczego w takim razie twierdzenie przypisuje się Pitagorasowi? Najpewniej, ponieważ matematyk jako pierwszy udowodnił prawdziwość twierdzenia. Gdyby nie zainteresowanie Pitagorasa wzorem $a^2 + b^2 = c^2$ możliwe, że twierdzenie nazywałoby się np. twierdzeniem Babilońskim lub nazwano by je imionami wszystkich Babilończyków, lecz wtedy trudno byłoby zapamiętać pełną nazwę twierdzenia 😊.

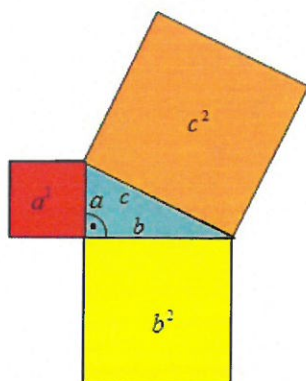
Oprócz Pitagorasa prawdziwość twierdzenia udowodniło również wielu innych matematyków. Każdy dowód jest inny i każdy bardzo ciekawy, o czym przekonamy się w dalszej części pracy.

4. Czym jest twierdzenie Pitagorasa?

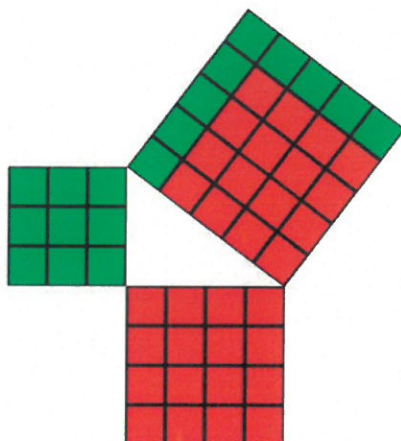
Twierdzenie Pitagorasa – a w zasadzie tak zwane „twierdzenie Pitagorasa” dotyczy trójkątów prostokątnych i mówi o tym, że suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej:



Definicję twierdzenia Pitagorasa można zilustrować również w następujący sposób:



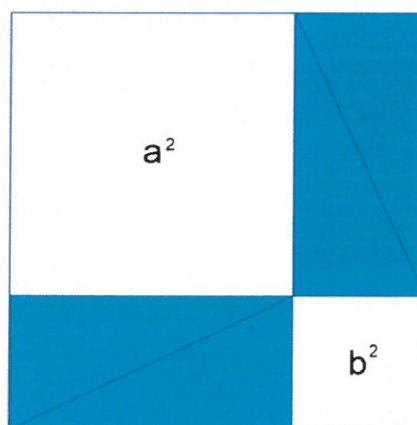
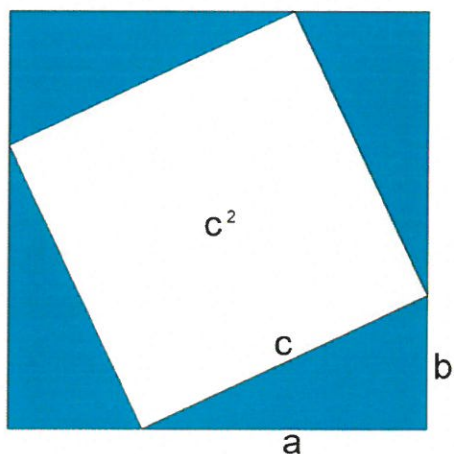
Czyli: pole powierzchni kwadratu, zbudowanego na przeciwprostokątnej jest równe co do wartości sumie pól powierzchni kwadratów, zbudowanych na przyprostokątnych. Tak podaną definicję dobrze obrazuje poniższy rysunek.



5. Dowody na twierdzenie Pitagorasa

Istnieje ponad 200 opublikowanych dowodów na twierdzenia Pitagorasa. Poniżej przedstawiam te, które moim zdaniem są najciekawsze.

- 1) Dowód który prawdopodobnie przeprowadził Pitagoras – wg przypuszczeń Szczepana Jeleńskiego w jego książce „Śladami Pitagorasa”.



Wewnątrz dużego kwadratu buduje się 4 odcinki o takiej samej długości „c”, które tworzą kwadrat o boku c i polu powierzchni c^2 oraz 4 trójkąty o bokach a, b, c. Każdy bok dużego kwadratu ma długość „a + b”. Przesuwając trójkąty w taki sposób, aby utworzyły dwa prostokąty przylegające do ścian dużego kwadratu powstaną dwa

kwadraty o polach a^2 i b^2 . Biorąc pod uwagę fakt, że w dużym kwadracie po przesunięciu nadal znajdują się te same 4 trójkąty o tej samej łącznej powierzchni, to suma pól kwadratów powstałych po przesunięciu jest równa polu kwadratu przed przesunięciem trójkątów.

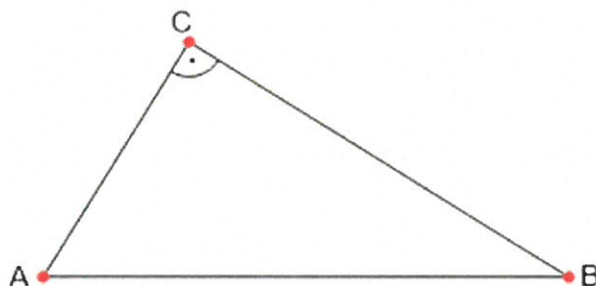
Sytuację tę możemy zapisać zatem w następujący sposób: $c^2 = a^2 + b^2$.

Ta równość jest prawdziwa, ponieważ w identycznym największym kwadracie z lewej jak i z prawej strony występują takie same cztery trójkąty. Zatem jeśli od największego kwadratu odejmę zarówno z lewej jak i z prawej strony takie same cztery trójkąty wówczas pozostałe pola z obu rysunków będą równe, czyli

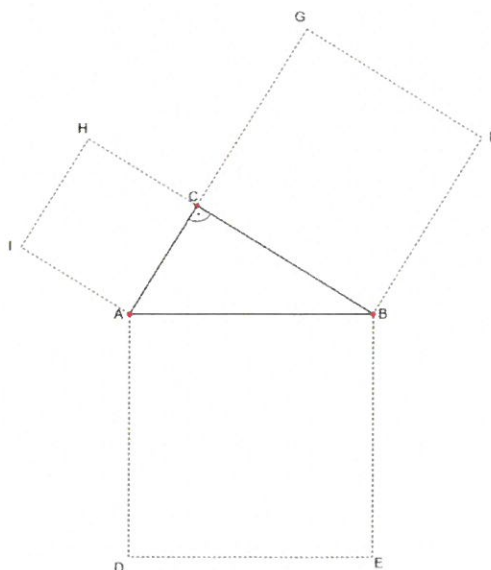
$$c^2 = a^2 + b^2$$

2) Dowód Leonarda da Vinci

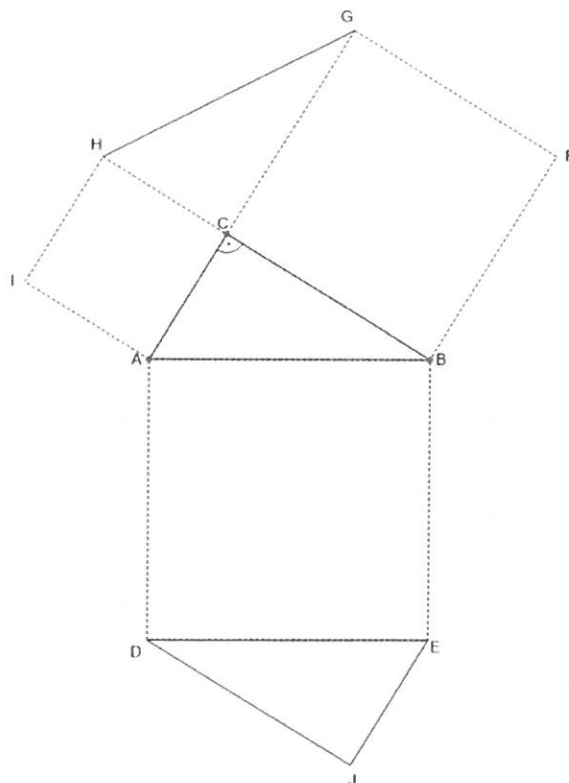
Dany jest trójkąt prostokątny ABC



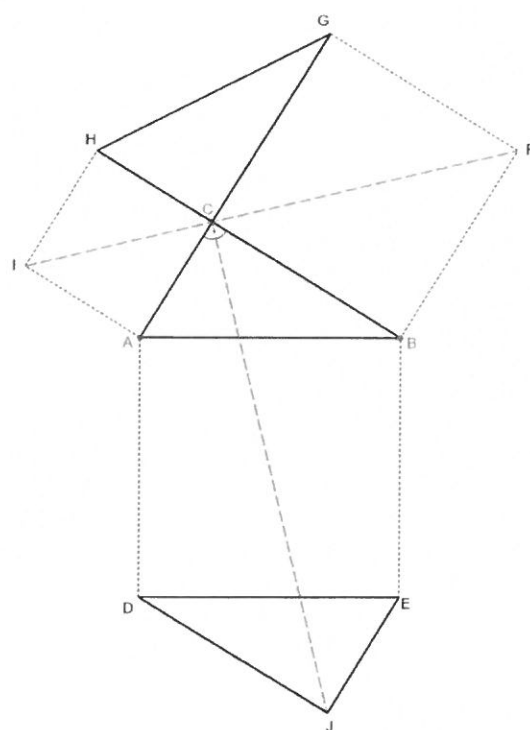
Jeżeli na jego wszystkich bokach zbudujemy kwadraty.



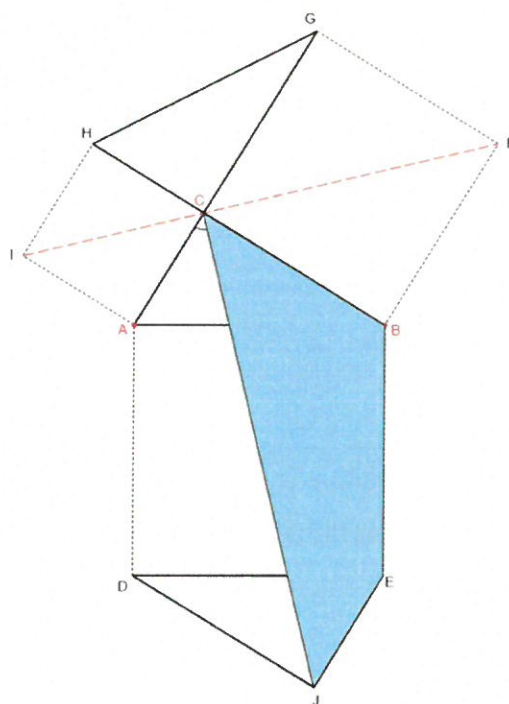
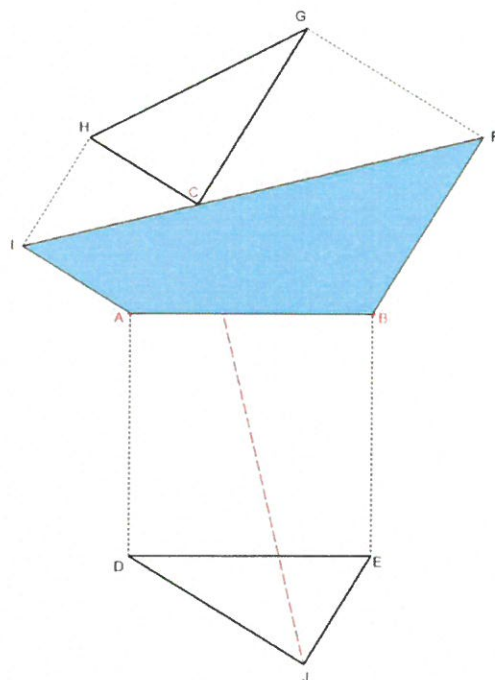
Następnie połączmy wierzchołki H i G oraz na przeciwległym do AB boku kwadratu zbudujemy identyczny do trójkąta ABC trójkąt DEJ



To po połączeniu punktów I z F oraz C z J, otrzymamy cztery czworoboki: ABFI, FIHG, BCJE oraz ACJD, o równych polach powierzchni (z czego FIHG stanowi odbicie lustrzane ABFI względem osi FI)

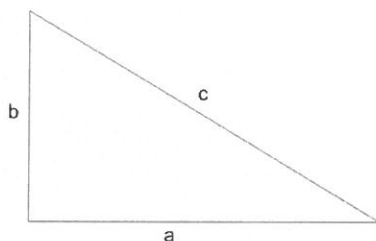


Kontynuując dowód trzeba zauważyć, że czworokąty $ABFI$ i $FIHG$, oraz $BCJE$ i $ACJD$ tworzą dwa takie same sześciokąty ($ABFIHG$ oraz $ACBEJD$)

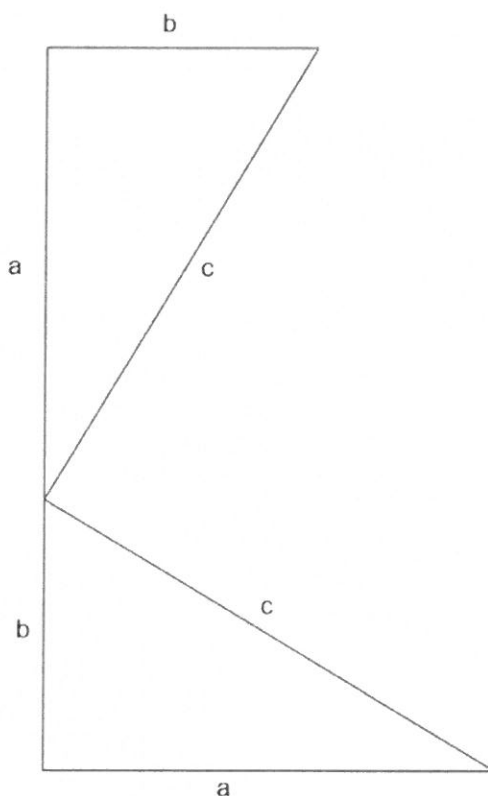


Następnie należy od pola sześciokąta $ABFIHG$ należy odjąć pola trójkątów ABC i CGH , a od sześciokąta $ACBEJD$ należy odjąć pola trójkątów ABC i DEJ . Po tej operacji otrzymamy trzy kwadraty : $ACHI$, $BCGF$ oraz $ABED$, z czego trójkąt $ABED$ jest sumą trójkątów $ACHI$ i $BCGF$ (zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa).

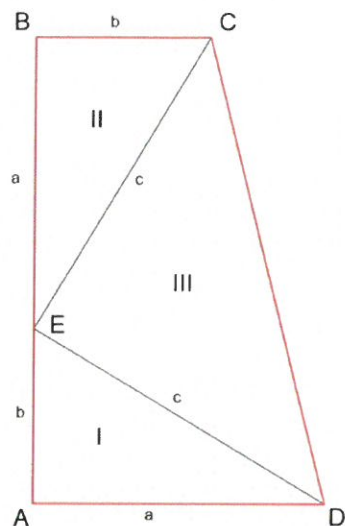
- 3) Kolejnym z dowodów na prawdziwość twierdzenia jest dowód Jamesa Abrama Garfielda - dwudziestego prezydenta USA ogłoszony w roku 1876. Mamy dany trójkąt prostokątny o bokach a , b , c



Na przedłużeniu przyprostokątnej b odkładamy długość a , następnie na końcu długości a rysujemy odcinek prostopadły o długości równej b i łączymy tego odcinka z wierzchołkiem pierwszego trójkąta – w ten sposób powstaje nam drugi identyczny trójkąt prostokątny.



Po połączeniu wierzchołków trójkątów powstaje nam trapez o wierzchołkach ABCD:



Pole trapezu ABCD jest równe sumie pól trzech trójkątów prostokątnych:

$$P_{ABCD} = P_{ADE} + P_{BCE} + P_{DEC}$$

$$\frac{1}{2} (a + b)(a + b) = \frac{1}{2} ab + \frac{1}{2} ab + \frac{1}{2} c^2$$

$$\frac{1}{2} (a^2 + 2ab + b^2) = \frac{1}{2} (2ab + c^2) \quad | \cdot 2$$

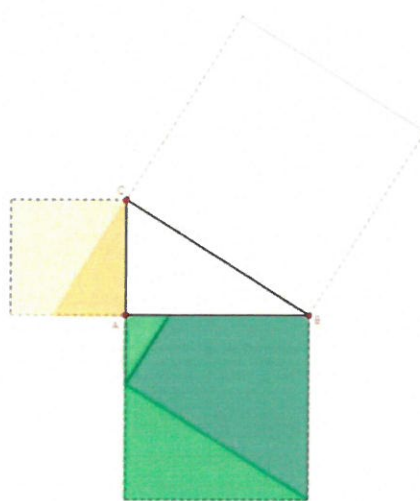
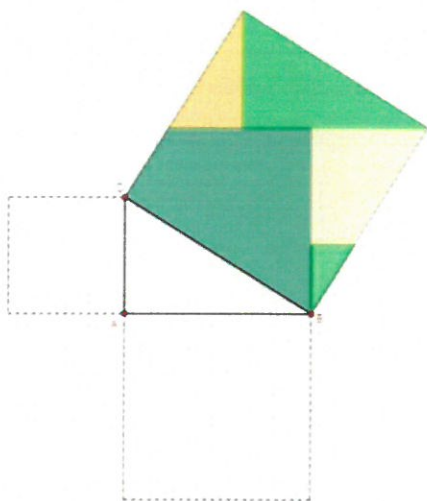
$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

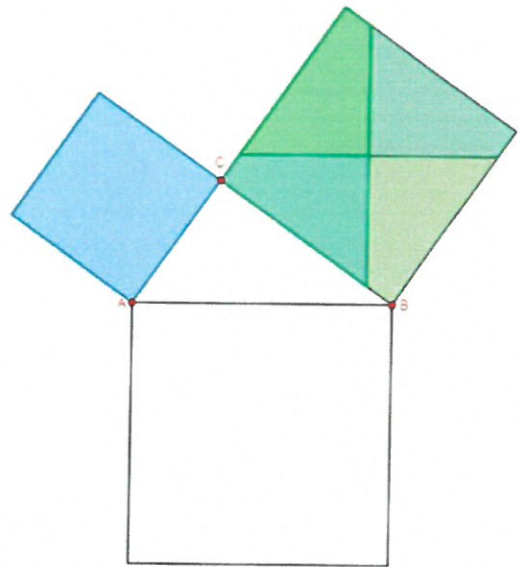
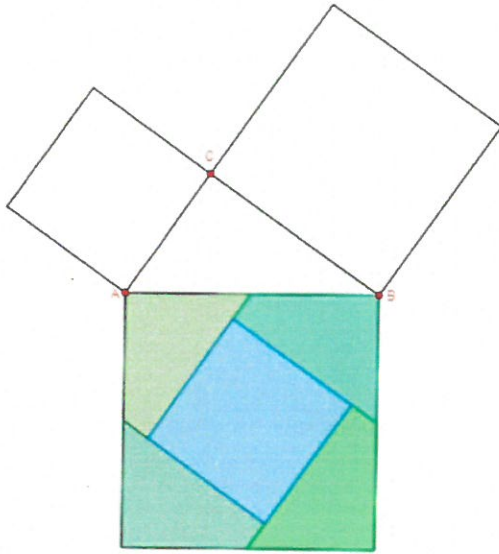
co kończy dowód.

4) Inne dowody, tzw. „mozaikowe”:

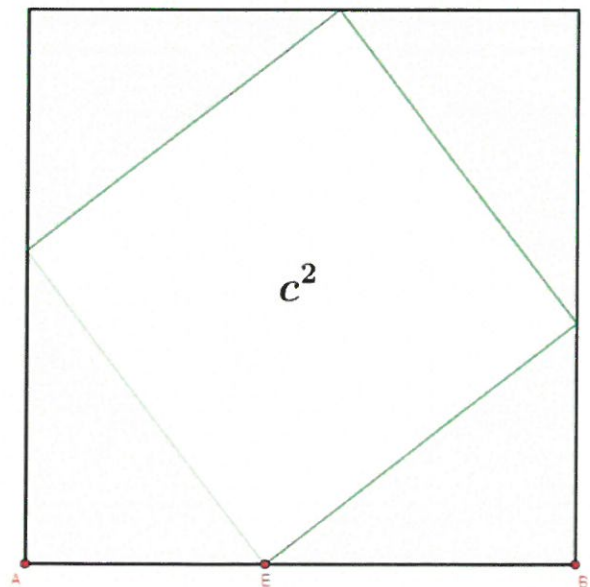
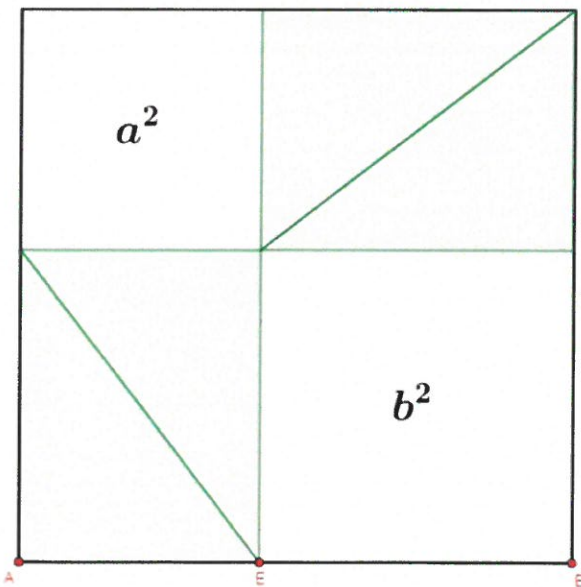
Annarizi z Arabii



Dudeney's



Chou Pei Suan Ching



6. Szczególne przypadki ☺

W związku z Twierdzeniem Pitagorasa można zauważyć szczególne przypadki które spełniają to twierdzenie. S nimi:

- Trójkąt pitagorejski i trójki pitagorejskie
- Trójkąt egipski

Trójkąt pitagorejski to taki trójkąt prostokątny, którego boki są wyrażone liczbami naturalnymi.

Trójki pitagorejskie są to liczby naturalne, które mogą być długościami boków trójkąta prostokątnego. Trójki pitagorejskie tworzą długości boków trójkątów pitagorejskich.

Trójkąt egipski jest szczególnym przypadkiem trójkąta pitagorejskiego. Jest to trójkąt prostokątny, którego boki są wyrażone przez kolejne liczby naturalne. Jest to trójkąt o bokach: 3, 4, 5.

Najprostsze trójki pitagorejskie:

- 3, 4, 5

$$\text{Bo } 3^2+4^2=9+16=25=5^2$$

- 5, 12, 13

$$\text{Bo } 5^2+12^2=25+144=169=13^2$$

- 7, 24, 25

$$\text{Bo } 7^2+24^2=49+576=625=25^2$$

- 9, 40, 41

$$\text{Bo } 9^2+40^2=81+1600=1681=41^2$$

- 11, 60, 61

$$\text{Bo } 11^2+60^2=121+3600=3721=61^2$$

itd.

<https://matfiz24.pl/twierdzenie-pitagorasa/trojkat-pitagorejski-i-egipski>

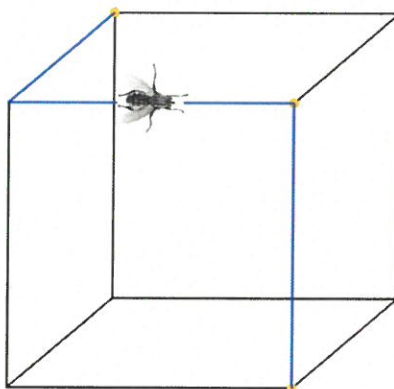
Dodatkowo z każdej trójki pitagorejskiej można utworzyć kolejne, poprzez pomnożenie jej przez dowolną liczbę naturalną. np. jeżeli trójkę 3, 4, 5 pomnożymy przez 2, otrzymamy trójkę pitagorejską 6, 8, 10. Gdy trójkę 3, 4, 5 pomnożymy przez 3 otrzymamy inną trójkę pitagorejską 9, 12, 15 itd.

7. Do czego może nam się przydać twierdzenie Pitagorasa?

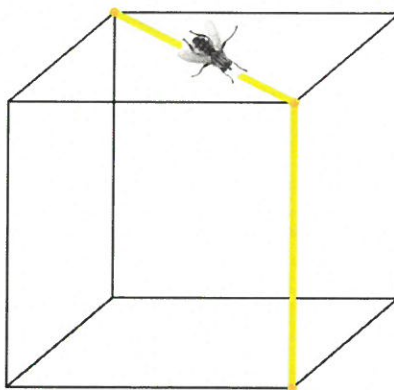
Wyobraźmy sobie, że widzimy spacerującą muchę. Mucha spaceruje po powierzchni sześcianu o krawędzi 10 cm. Którą drogą powinna pójść ta mucha, aby przejść między dwoma przeciwległymi wierzchołkami sześcianu najkrótszą drogą?

Mucha między wierzchołkami może pójść 3 krawędziami, przejść przez przekątną jednego z boków, a następnie krawędzią dojść do punktu docelowego lub... pójść jeszcze inną drogą. Tylko która jest najkrótsza?

Jeżeli mucha podążałaby krawędziami jej droga wynosiłaby 30 cm



Drugą drogę musimy obliczyć stosując twierdzenie Pitagorasa do obliczenia przekątnej boku.



Droga = 10 cm (długość krawędzi) + x (długość przekątnej boku)

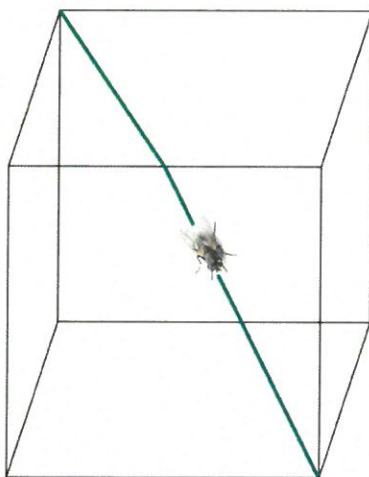
$$x^2 = 10^2 + 10^2 = 100 + 100 = 200$$

$$x = \sqrt{200}$$

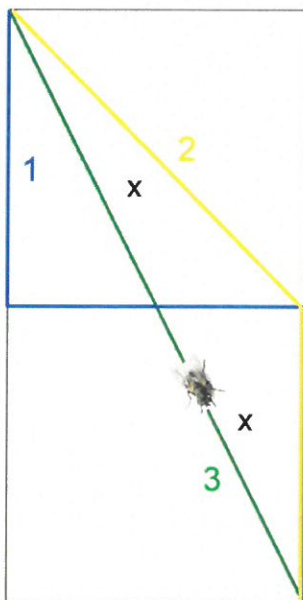
$$x \approx 14,14$$

$$\text{Droga} = 10 \text{ cm} + 14,14 \text{ cm} = 24,14 \text{ cm}$$

Okazuje się jednak, że mucha wybrała zupełnie inną drogę:



Do obliczenia długości trzeciej drogi również musimy wykorzystać twierdzenie Pitagorasa. Aby przekonać się czy instynkt naszej muchy działa sprawnie: najprościej będzie rozłożyć dwie ściany po których idzie mucha na płasko.



Na rysunku możemy zobaczyć, że droga muchy składa się z dwóch przeciwprostokątnych w trójkątach, których boki mają długość: krawędzi sześciokąta (przyprostokątna), połowy długości krawędzi sześciokąta (przyprostokątna) oraz x .

$$\text{Droga} = 2x$$

$$x^2 = 5^2 + 10^2$$

$$x^2 = 25 + 100 = 125$$

$$x = \sqrt{125}$$

$$x = 11,18 \text{ cm}$$

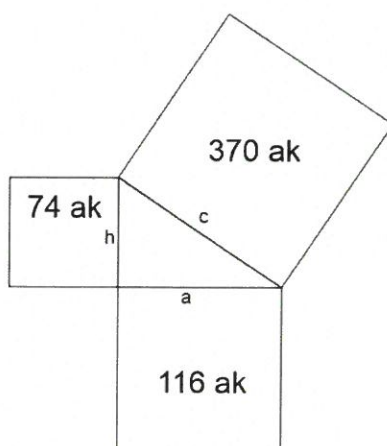
$$2x = 11,18 \text{ cm} + 11,18 \text{ cm} = 22,36 \text{ cm}$$

Dzięki zastosowaniu Twierdzenia Pitagorasa możemy się przekonać, że mucha jest bardzo mądra, ponieważ wybrała najkrótszą drogę.

A teraz przenieśmy się do 1800 roku i problemu który w zadaniu opisał Sam Lloyd.

<http://pitagoras.pl/twierdzenie-pitagorasa.php>

Wyobraźmy sobie trójkątne jezioro otoczone z trzech stron kwadratowymi działkami przylegającymi do jego brzegów. Ile wynosi pole jeziora jeżeli przylegające do niego kwadratowe działki mają pola: 370 akrów, 116 akrów i 74 akry?



Zanim zaczniemy rozwiązywać zadanie krótkie wytłumaczenie. Akr to jednostka miary powierzchni używana w krajach anglosaskich. Był to obszar, który mógł zostać zaorany przez pług zaprzęgnięty w woły w ciągu jednego dnia. 1 akr to 4046,86 metrów kwadratowych, czyli inaczej 0,40 hektara.

<http://pitagoras.pl/twierdzenie-pitagorasa.php>

Zaczniemy od wypisania danych. Na podstawie rysunku możemy zauważyć, że :

$$a = \sqrt{116} \approx 10,77$$

$$h = \sqrt{74} \approx 8,60$$

$$c = \sqrt{370} \approx 19,23$$

Na podstawie wypisanych danych możemy obliczyć pole jeziora. Wiemy, że jezioro jest trójkątem prostokątnym, więc do obliczenia jego pola wykorzystamy wzór $P = \frac{1}{2} * a * h$.

$$P = \frac{1}{2} * 10,77 * 8,60 = 46,311 \text{ akra}$$

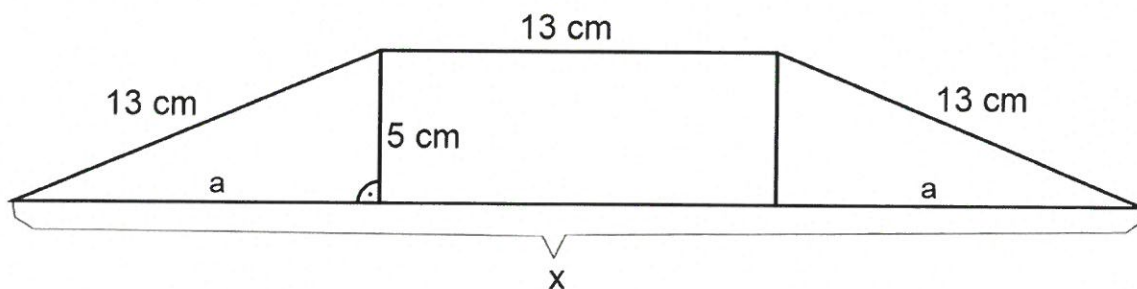
A teraz zamieńmy nasz wynik na jednostki układu metrycznego (używanego w Polsce)

1 akr to 0,40 ha więc aby otrzymać wynik w hektarach musimy pomnożyć 46,311 * 0,40.

$$46,31 \text{ akra} * 0,40 = 18,74 \text{ ha}$$

Skoro znamy już wielkość pola jeziora możemy sformułować odpowiedź. Pole jeziora wynosi 18,74 ha.

Zmieniając trochę dziedzinę w której wykorzystywane jest twierdzenie Pitagorasa przejdźmy do budownictwa. Wyobraźmy sobie dach karmnika dla ptaków w kształcie trapezu. Ramiona trapezu i krótsza podstawa mają po 13 cm, a wysokość ma długość 5 cm. Jaką długość będzie miała dłuższa podstawa trapezu tj. podstawa naszego dachu?



Patrząc na rysunek wiemy, że $x = 2a + 13$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa możemy obliczyć a .

$$a^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$$

$$a = \sqrt{144} = 12$$

Znając a możemy obliczyć długość podstawy naszego dachu.

$$x = 2 * 12 \text{ cm} + 13 \text{ cm} = 24 \text{ cm} + 13 \text{ cm} = 37 \text{ cm}$$

Zgodnie z powyższymi obliczeniami długość podstawy dachu karmnika wynosi 37 cm.

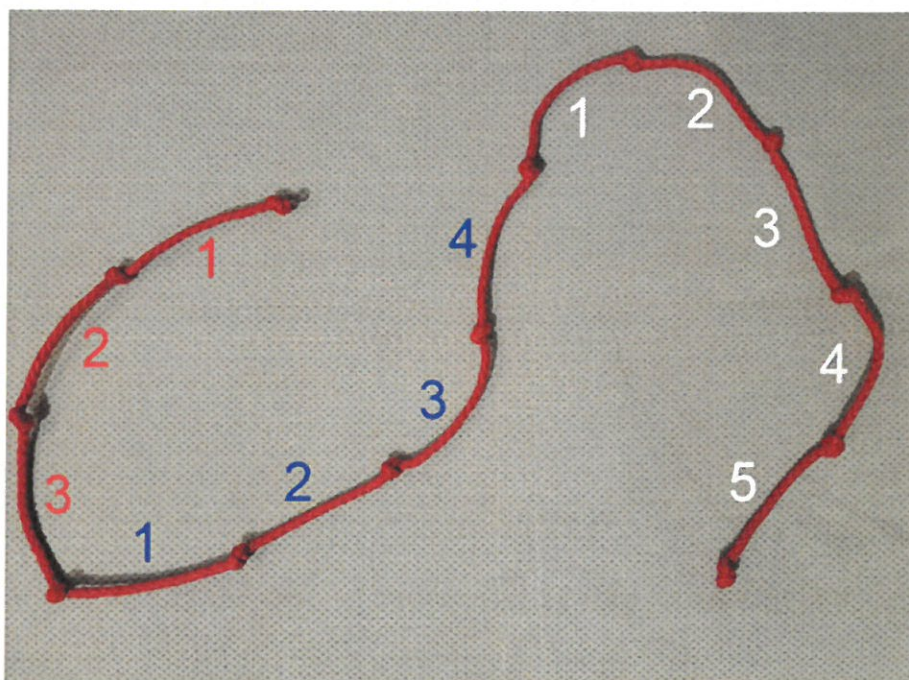
[Link do zadania](#)

8. Twierdzenia pochodne do twierdzenia Pitagorasa.

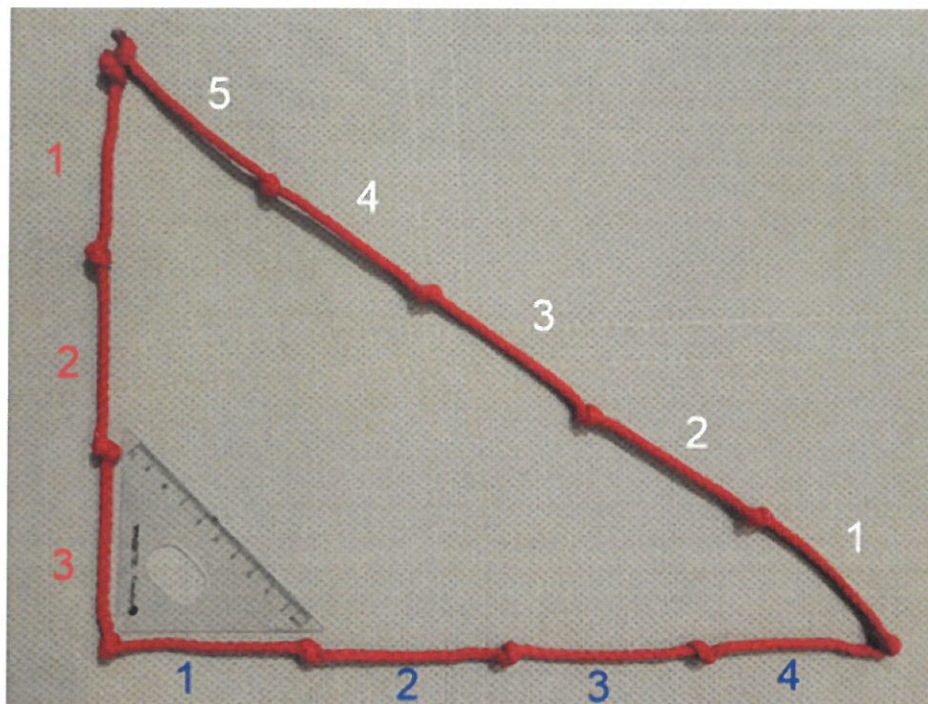
W praktyce, twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa mówiące że: jeśli długości boków a , b , c trójkąta spełniają zależność $a^2 + b^2 = c^2$, to trójkąt jest prostokątny, przy czym boki a i b są najkrótszymi bokami tego trójkąta, a bok c jest najdłuższym, wykorzystywano prawdopodobnie już w Egipcie do wyznaczania kątów prostych. Egipcjanom służył do tego prawdopodobnie trójkąt o bokach 3, 4 i 5 jednostek zwany obecnie trójkątem egipskim, którego konstrukcję pokażę przy wykorzystaniu czerwonego sznurka 😊.

Na sznurku w równej odległości wykonujemy 13 węzłów w równych odległościach. Dadzą nam one 12 równych odcinków.

Pierwsze 3 odcinki będą stanowiły najkrótszy bok trójkąta (przyprostokątny), kolejne 4 odcinki to drugi bok trójkąta (przyprostokątny), a kolejnych 5 odcinków będzie stanowiło przeciwprostokątną.



Po naprężeniu sznurka otrzymamy trójkąt o bokach 3,4,5 – który jest na pewno prostokątny. Ja do pokazania kąta prostego wykorzystałam ekierkę. Dowodem Egipcjan są piramidy, które stoją do dziś!!!



Kolejnym pomocnym twierdzeniem (szczególnie przy rozwiązywaniu zadań na matematyce 😊) jest twierdzenie mówiące, że jeśli długości boków trójkąta oznaczmy literami a , b , c w taki sposób, że $a \leq b \leq c$ oraz $a^2 + b^2 < c^2$, to trójkąt jest rozwartokątny, jeśli zaś $a^2 + b^2 > c^2$, to trójkąt jest ostrokątny.

9. Podsumowanie.

Jak widać z na podstawie przytoczonych przykładów, Twierdzenie Pitagorasa jest bardzo ważne i przydatne w życiu codziennym.

Mam nadzieję, że po przeczytaniu tej pracy wszystkie osoby, które do tej pory nie pamiętały równania $a^2 + b^2 = c^2$ już nigdy o nim nie zapomną 😊.

10. Bibliografia:

1. <https://matfiz24.pl/twierdzenie-pitagorasa/trojkat-pitagorejski-i-egipski>
2. <http://pitagoras.pl/twierdzenie-pitagorasa.php>
3. https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwj9hYOsUpb2AhVBiYsKHXWuCEwQFnoECBYQAQ&url=https%3A%2F%2F15matematyka.jimdo.com%2Fapp%2Fdownload%2F13075510136%2FZastosowanie%2Btwierdzenia%2BPitagorasa%2Bw%2Bzadaniach%2BBrachunkowych-test.pdf%3Ft%3D1488825157&usg=AOvVaw0ioYUMiMSGBZe_ox0w9Yxr
4. <https://swiatmatematyki.pl/teksty/BIOGRAFIA%20PITAGORASA.pdf>
5. https://www.tomaszgrebski.pl/viewpage.php?page_id=919
6. <https://matfiz24.pl/twierdzenie-pitagorasa/definicja>
7. https://matmanaluzie.pl/twierdzenie-pitagorasa-definicja-zadania/?qclid=Cj0KCQiA09eQBhCxARIsAAYRiymQ-a9RMBDXaOq2UM4msiCKULDWVAQ_AJeE6Fhy7YK2shgEwc3UresaApTxEALw_wcB

Opinia opiekuna

Temat pracy wybrany samodzielnie przez uczennicę w uzgodnieniu z nauczycielem. Ewa uczęszcza na kółko matematyczne, systematycznie podejmuje się rozwiązywania ciekawych i trudniejszych zadań.

Praca pisana samodzielnie, w czasie pisania uczennica korzystała z konsultacji z nauczycielem pogłębiając wybrane zagadnienia.

Opiekun:

o. Sławomir Dziadkiewicz SP

mgr Sławomir Dziadkiewicz

Załącznik nr 1.

**Dane uczestnika do celów realizacji Małopolskiego Konkursu Prac
Matematycznych zakończonego Małopolską Sesją Matematyczną**

Imię i nazwisko autora pracy	Ewa Śmietana
Adres do korespondencji	oś. 2 Pułku Lotniczego 1/49, 31-867 Kraków
Adres e-mailowy	akwietniewska@wp.pl
Numer telefonu	730 255 700
Dane adresowe Szkoły	Szkoła Podstawowa Zakonu Pijarów w Krakowie, ul. Dzielskiego 1, 31-465 Kraków Telefon: 12 413 66 44 e-mail: sekretariat.sp@pijarzy.pl
Imię i nazwisko nauczyciela (opiekuna)	mgr. Sławomir Dziadkiewicz

Ewa Śmietana

(imię i nazwisko uczestnika Konkursu)

Kraków, 27.02.2022

(miejscowość i data)

Zgoda

na przetwarzanie danych osobowych do celów realizacji Małopolskiego Konkursu Prac Matematycznych zakończonego Małopolską Sesją Matematyczną.

Wyrażam zgodę na przetwarzanie danych osobowych mojego dziecka – uczestnika Konkursu dla potrzeb niezbędnych do realizacji Konkursu, zgodnie z Ustawą o ochronie danych osobowych z dnia 10 maja 2018 r.

Wyrażam zgodę na otrzymywanie informacji marketingowych drogą e-mailową o kolejnych edycjach Konkursu.

Wyrażam zgodę na zamieszczanie wizerunku mojego dziecka utrwalonego na zdjęciach i filmikach – uczestnika Konkursu dla potrzeb niezbędnych do realizacji Konkursu, zgodnie z Ustawą o ochronie danych osobowych z dnia 10 maja 2018 r.

Zostałam poinformowana że podanie danych jest dobrowolne i przysługuje mi prawo dostępu do treści danych mojego dziecka oraz ich poprawienia.



(czytelny podpis składającego oświadczenie)