# MATEMATYKA NA SZACHOWNICY

Antoni Majewski
Victoria Center,Primery School, Wrząsowice klasa VIII

**WSTĘP**

Jestem osobą uwielbiającą grać w szachy. Pewnego dnia zauważyłem zależność między liczbą pól szachownicy **n*n** oraz liczbą nieatakujących się wzajemnie hetmanów na tej szachownicy. Postanowiłem rozwinąć ten problem rozszerzając go o kolejne dwa problemy podobne do tego pierwszego, otrzymują następujące zadania:

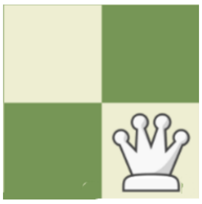
- Ile na szachownicy zmieści się nie atakujących się wzajemnie hetmanów.
- Ile na szachownicy zmieści się nie atakujących się wzajemnie wież.
- Ile zmieści się na szachownicy nie atakujących się wzajemnie skoczków.

# Problem 1 – Atakowanie się wzajemne hetmanów

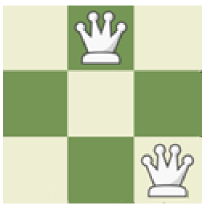
Problem ten rozwiązywałem rozpoczynając od szachownicy o wymiarach 1x1 a kończąc na tradycyjnej szachownicy 8x8.

Na planszy 1x1 oczywiście możemy ustawić jednego hetmana.

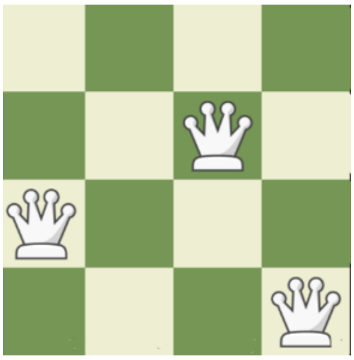
Przeszedłem do planszy 2x2 gdzie w żadnym wypadku nie dodamy kolejnego hetmana



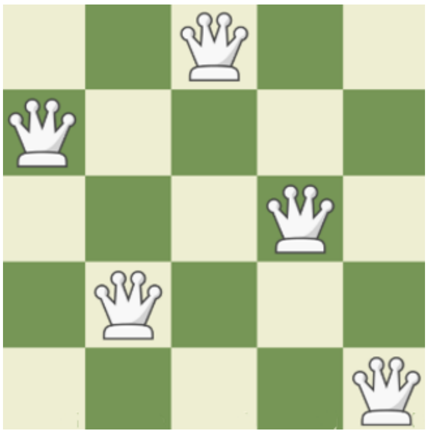
Na planszy 3x3 zmieszczą się 2 hetmani. Zauważyłem już teraz, że liczba hetmanów jest o 1 mniejsza od długości boku szachownicy.



Na planszy 4x4 zmieszczą się 3 hetmani. Tutaj również liczba hetmanów jest o 1 mniejsza od długości boku



W przypadku planszy 5x5 mamy 5 hetmanów ponieważ potem dla plansz 6x6, 7x7, 8X8 nie da się ustawić już więcej żadnego hetmana.

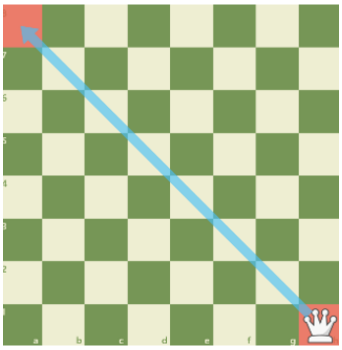


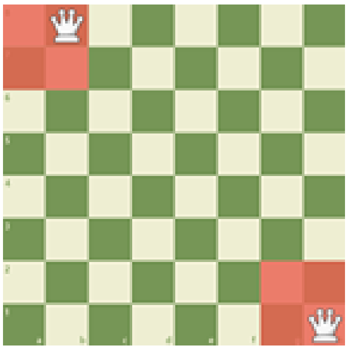
Dorysowując różnymi kolorami linie atakowania pięciu hetmanów zauważyłem, że zwiększenie liczby pól na 6x6, 7x7, 8x8 przy takim ułożeniu hetmanów 5x5 wyklucza możliwość dołożenia kolejnego hetmana.

Ponieważ nie dało się dodać więcej hetmanów niż 5 aż do rozszerzenia planszy do 8*8, więc wpadłem na inny pomysł.

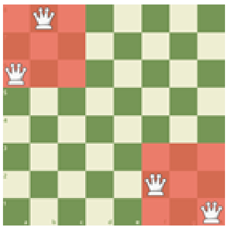
Zacznijmy jeszcze raz od początku. Postanowiłem ustawiać hetmanów od 2 stron planszy. W przypadku szachownic 1*1 postawimy oczywiście tylko 1 hetmana.

W przypadku planszy 2*2 nadal mamy 1 hetmana ale ponieważ plansze są 2 to mamy 2 hetmanów.





Tak jak przy pierwszej próbie przy szachownicy 3*3 mamy 2 hetmanów



W tym przypadku 4x4 do jednej z plansz dodałem figurę lecz do drugiej już nie damy rady jej dodać.

W przypadku szachownic 5x5 do obu damy radę dodać po hetmanie czyli mamy ich 7.

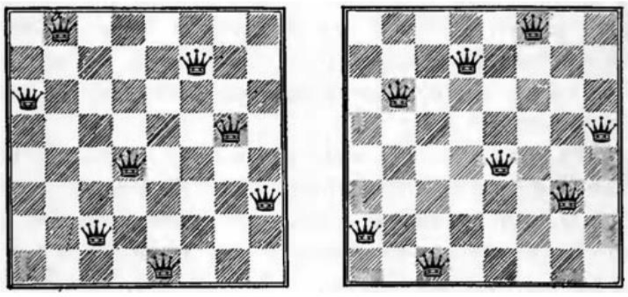
Zapewniam, że na szachownicy8x8 nie dodamy już żadnego hetmana i jest to jednocześnie maksymalna ilość hetmanów na planszy

Z przeprowadzonych prób można wyciągnąć następujące wnioski:

- maksymalna liczba hetmanów na planszy 8x8 jest równa 7
- w przypadku planszy 7x7 zmieścimy 6 hetmanów tak samo jest w innych przypadkach po za planszą 1x1,
- z tego można przypuszczać, że wzór dla liczby hetmanów dla liczby ***nxn*** pól.

$$\boldsymbol{P_{hetman\acute{o}w} = n - 1}$$

Powyższy problem postawił w 1848 r. mistrz szachowy Max Bezzel. Dwa lata później rozwiązał go matematyk niemiecki Franz Nauck. Problemem zajmował się także Carl Friedrich Gauss. Do zadania powrócono w związku z rozwojem informatyki. Współcześnie należy on do kanonu zadań ćwiczących pisanie algorytmów. Przykładowe rozwiązania pokazuje poniższy rysunek.



## Problem 2 – Atakowanie się wież

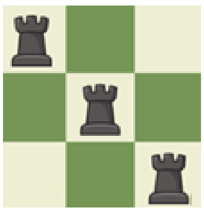
W przypadku planszy 1x1 maksymalnie zmieścimy 1 wieżę

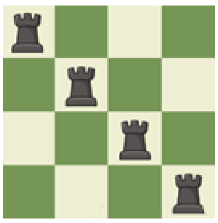
Na szachownicy 2*2 zmieścimy 2 wieże maksymalnie

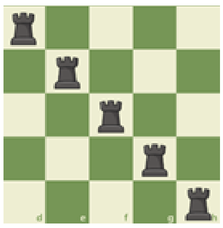
Plansza 3*3 znowu pozwala nam dodać tylko jedną wieżę. Zaczynam w tym momencie zauważać pewną zależność. Widzimy, że za każdym razem po powiększeniu planszy o 1 dodajemy jedną wieżę. Czyli dla pół 4x4 mamy cztery wieże.

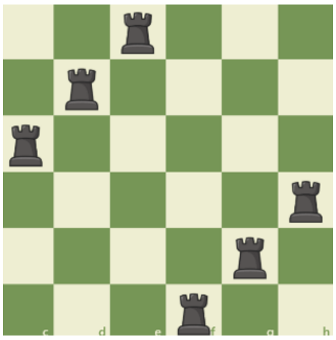
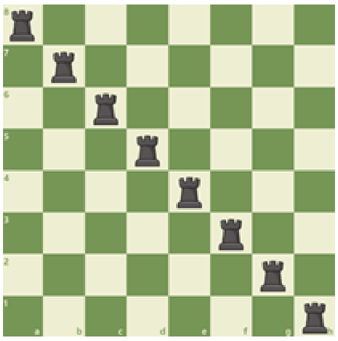
Przy planszy 5x5 podążamy tym samym rozumowaniem - nie ma możliwości dodania kolejnej figury

Nawet inne kombinacje ustawień nie pozwalają nam dodać większej ilości wież niż jednej. Podobnie jest dla 7x7  i 8x8 polowej szachownicy..







**Wnioski**

Maksymalna ilość wież nie atakujących się nawzajem zawsze będzie równa liczbie pól na boku szachownicy.

1*1 –1 wieża

2*2 – 2 wieże

3*3 – 3 wieże

I tak do 8*8 – 8 wież

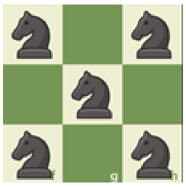
Więc wzór na liczbę wież nie atakujących się ma postać $W_n=n$

## Problem 3 – atakowanie się wzajemne skoczków

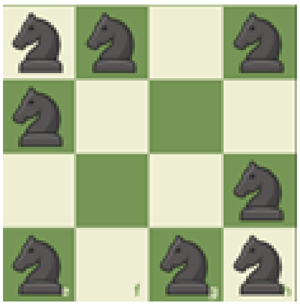
Na planszy 1*1 bez zaskoczeń postawimy jednego skoczka

Na planszy 2*2 dodamy 3 skoczki czyli mamy łącznie 4

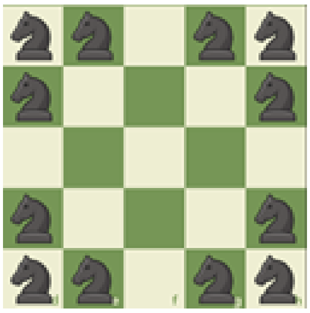
Na planszy 3*3 położymy maksymalnie 5 skoczków nieatakujących się. Nie widać żadnej zasady



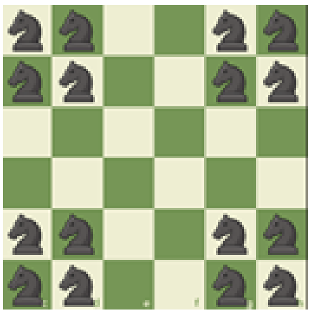
Plansza 4*4 dajemy 8 skoczków daje nam to pewną zasadę czyli dodajemy 1, a potem 3



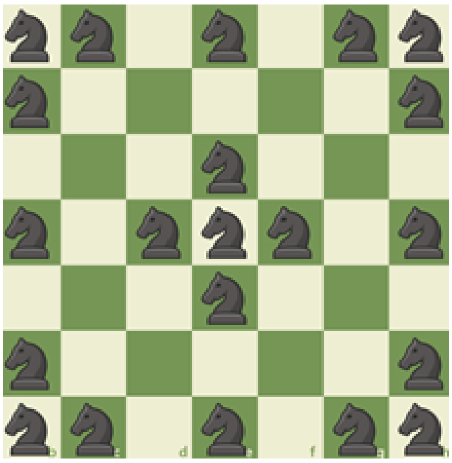
Przy szachownicy 5x5 położymy 12 skoczków i nasza zasada pada!



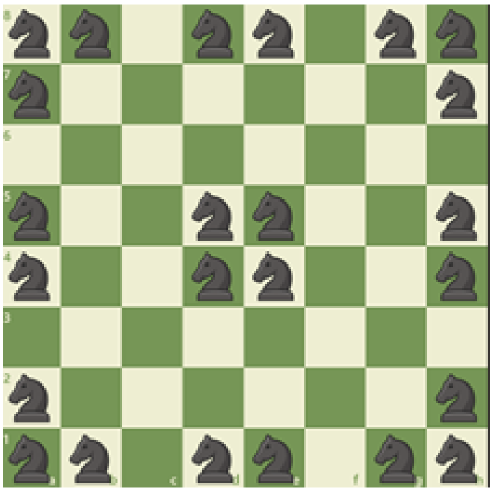
Na planszy 6*6 położymy 16 skoczków



Na planszy 7*7 zmieścimy 21 skoczków



Szachownica 8*8 pozwala umieścić 24 nieatakujących się skoczków.



**Wnioski**

Skoczków na planszy nieatakujących się pomieścimy.

1x1 –1 skoczek
2x2 – 4 skoczki
3x3 – 5 skoczków
4x4 – 8 skoczków
5x5 – 12 skoczków
6x6 – 16 skoczków
7x7 – 21 skoczków
8x8 – 24 skoczki
Czy widzimy tu jakąś szczególna zasadę? Może jakiś wzór?

Niestety nie udało mi się zauważyć żadnego wzoru na liczbę ustawień nieatakujcych się skoczków.

# Problem 4 Obejście skoczkiem szachownicy

Problem skoczka szachowego to zadanie polegające na obejściu skoczkiem wszystkich pól planszy tak, żeby na każdym polu stanąć raz i tylko raz.

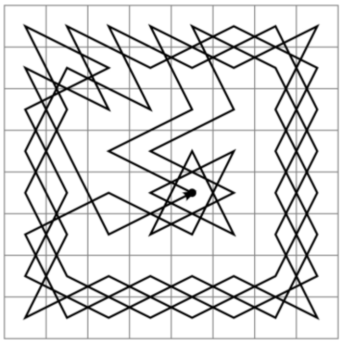
Jeśli skoczek może po ostatnim ruchu wrócić na pole, z którego zaczynał, to mówimy o zamkniętej ścieżce skoczka szachowego. Jeśli skoczek może obejść wszystkie pola, ale po ostatnim ruchu nie może wrócić na startowe pole, to mówimy o ścieżce otwartej.

Czy to możliwe i w jaki sposób obejść skoczkiem wszystkie pola szachownicy 8x8, przy czym na każdym polu być tylko jeden raz i wrócić do punktu wyjścia?

Zadaniem tym zajmował się między innymi słynny matematyk szwajcarski Leonard Euler. W liście Christiana Goldbach z 26 czerwca 1756 r. podał jeden z przypadków rozwiązań. Przypadek ten dotyczył takich ruchów skoczkiem, które rozpoczynają się w rogu szachownicy (oczywiście wystarczy uwzględnić jeden róg, bo pozostałe uzyskamy poprzez obrót wokół środka szachownicy).

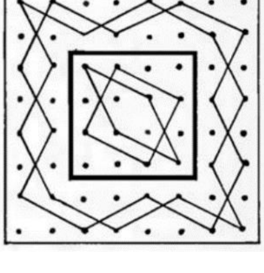
Poniżej pokazujemy jedno z możliwych rozwiązań Eulera. Kolejne ruchy numerowane są kolejnymi liczbami.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 54 | 49 | 40 | 35 | 56 | 47 | 42 | 33 |
| 39 | 36 | 55 | 48 | 41 | 34 | 59 | 46 |
| 50 | 53 | 38 | 57 | 62 | 45 | 32 | 43 |
| 37 | 12 | 29 | 52 | 31 | 58 | 19 | 60 |
| 28 | 51 | 26 | 63 | 20 | 61 | 44 | 5 |
| 11 | 64 | 13 | 30 | 25 | 6 | 21 | 18 |
| 14 | 27 | 2 | 9 | 16 | 23 | 4 | 7 |
| 1 | 10 | 15 | 24 | 3 | 8 | 17 | 22 |



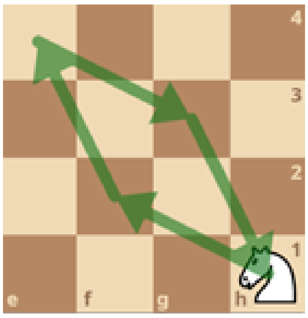
Euler uzyskiwał swoje rozwiązania zakrywając pola na których stanął skoczek monetami. Zadanie to w literaturze nazywa się problemem szachowym Eulera.

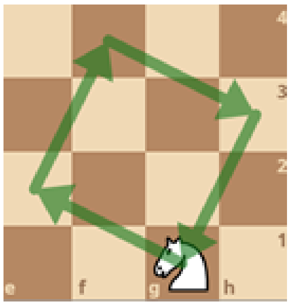
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | b | c | d | a | b | c | d |
| c | d | a | b | c | d | a | b |
| b | a | a′ | b′ | c′ | d′ | d | c |
| d | c | c′ | d′ | a′ | b′ | b | a |
| a | b | b′ | a′ | d′ | c′ | c | d |
| c | d | d′ | c′ | b′ | a′ | a | b |
| b | a | d | c | b | a | d | c |
| d | c | b | a | d | c | b | a |



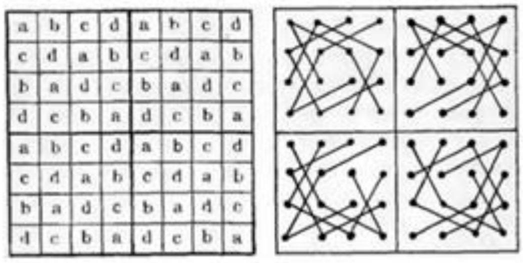
Skoczek może obskoczyć sektor (nie cały) kreśląc romb lub kwadrat (rysunek powyżej).

Zaczynając od rogu można okrążać sektor po kwadracie lub rombie tak jak na poniższym rysunku.

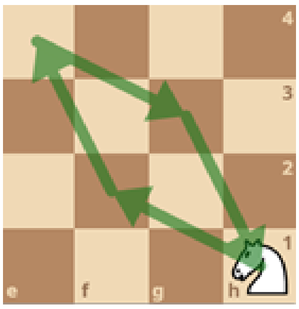


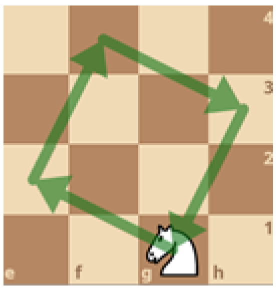




Aby rozwiązać ten problem musimy podzielić szachownice na 4 sektory każdy po 16 pól

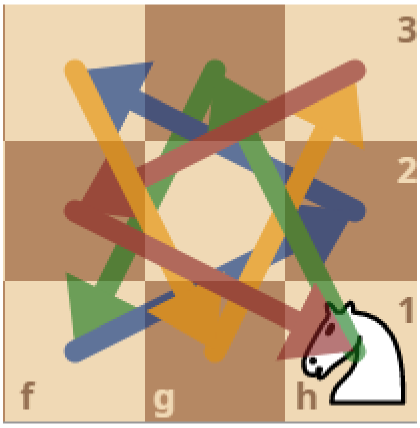



Skoczek może obskoczyć sektor (nie cały) kreśląc romb lub kwadrat,  Więc zaczynając od rogu można okrążać sektor po kwadracie lub rombie

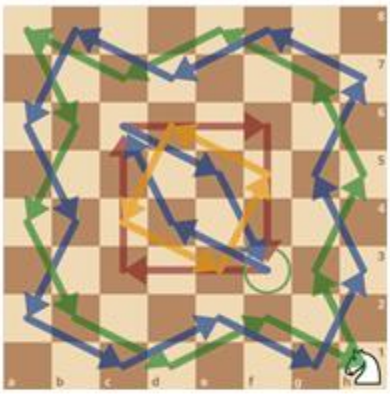



Po obwodzie szachownicy można przejść w sposób przedstawiony poniżej

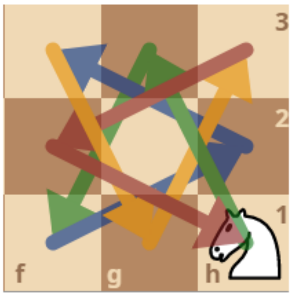



W pierwszym przypadku (plansza 1*1) to plansze obchodzimy w 0 ruchów, lecz to jest zdegenerowany przypadek

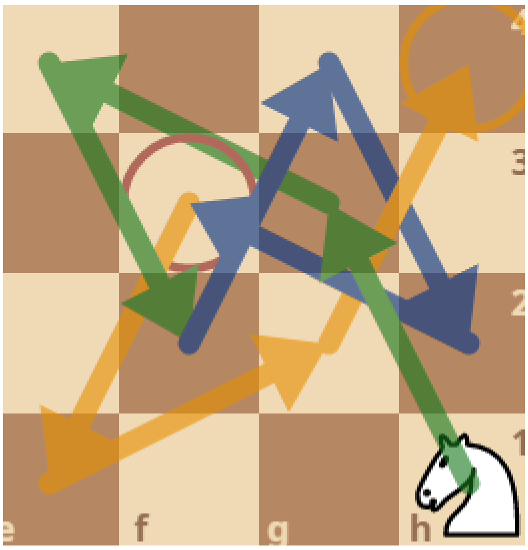


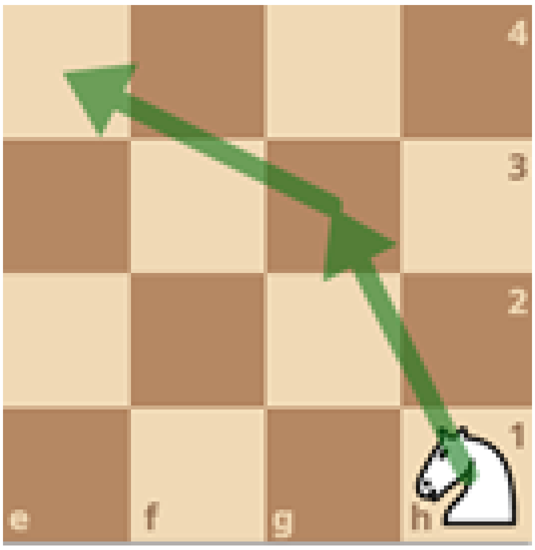
2*2 nie daje nam żadnej opcji na obejście szachownicy gdyż skoczek nie ma nawet miejsca na wykonanie ruchu.

W 3*3 nie damy rady obejść planszy ponieważ nie ma opcji wejścia ani wyjścia na środkowe pole.

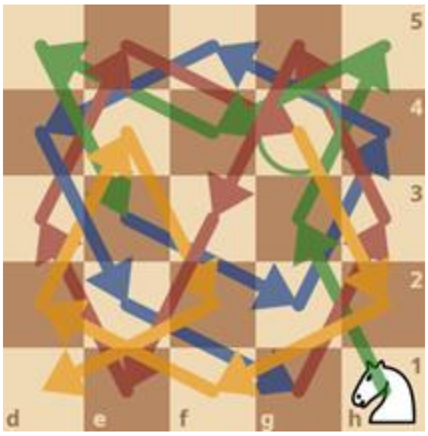




Planszy 4x4 także nie obejdziemy, ponieważ nie damy rady dojść do rogów. Pierwsze 2 rogi obejdziemy bez problemu lecz do 2 kolejnych nie damy rady ponieważ do do rogu dojdziemy przez dwa centralne pola na skos od siebie. Gdy w trakcie obchodzenia na planszę i wejdziemy na jedno z tych pól do rogu potem mamy jedno pole odejścia z tego pola musimy wejść na róg bo inaczej już nigdy go nie odwiedzimy, a gdy już na nim jesteśmy to nie mamy drogi wyjścia



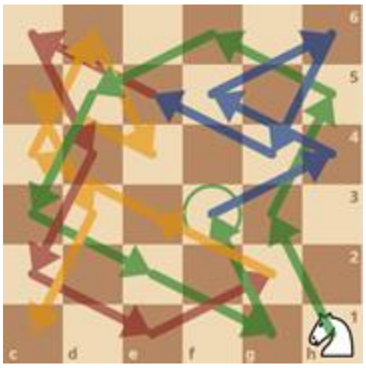



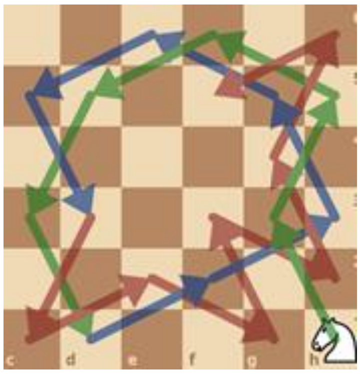

5*5 obejdziemy z łatwością w 24 ruchów na 25 pól.




Plansza 6*6 jest nie do obejścia jak przy 4*4 tylko tym razem mamy problem zarówno z polami bocznymi jak i rogami.

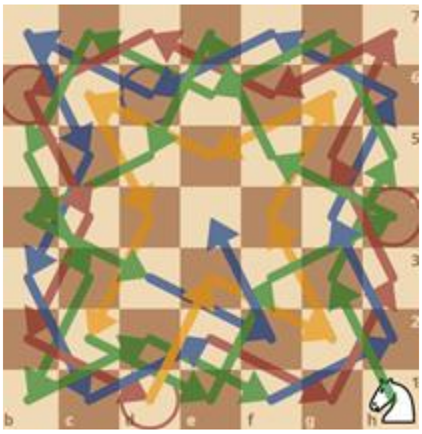
Tutaj uzyskanie rogu było przeszkodą



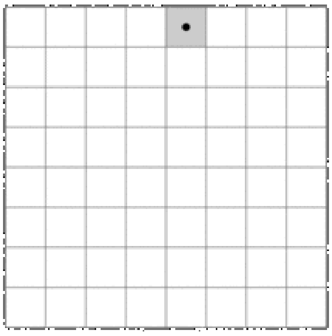

A tutaj już nigdy nie wejdziemy na pole h4.

Szachownicę 7wwwwwwww7 obejdziemy w 48 ruchów robiąc pewnego rodzaju pętlę



Planszę 8x8 obejdziemy w ten sam sposób co 7x7.

I na koniec animacja ilustrująca ruchy skoczka



**Źródło:**

# Problem 5 – problem szachownicy

Przez „szachownicę” rozumie się niżej prostokątną planszę złożoną z jednakowych kwadratów w kolorze białym i czarnym, niekoniecznie umieszczonych naprzemiennie (jak w klasycznej szachownicy, która jest szczególnym przypadkiem opisanej niżej). Używane figury król i wieża poruszają się zgodnie z zasadami gdry w szachy. Okazuje się, że:

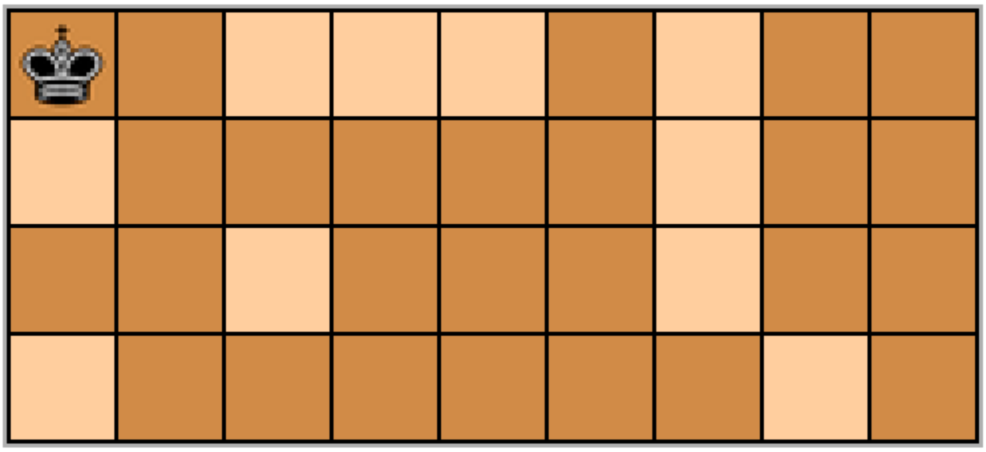
Jeśli:

- pole w lewym górnym rogu i pole w prawym dolnym rogu szachownicy są czarne
- nie istnieje droga po białych polach łącząca górną lub prawą krawędź szachownicy z dolną lub lewą krawędzią, po której mogłaby przejść wieża,

to:

król może przejść po czarnych polach od lewego górnego do prawego dolnego rogu.

Przykładem tego problemu jest poniższa szachownica.



Antoni Majewski