

Grafy i ich zastosowania

Wiktor Kurek

Kl. VII

Szkoła Podstawowa nr 1 im. Władysława Łokietka w Skale

ul. Topolowa 25, 32-043 Skała

e-mail: sekretariat@sp1skala.edu.pl

tel: 12 389 10 34

Opiekun : mgr Iwona Mularczyk

SPIS TREŚCI

Wstęp	3
Rozdział 1. Teoria	4
Rozdział 2. Algorytmy	15
Rozdział 2.1. Algorytmy poszukiwania cyklu Eulera	16
Rozdział 2.2. Algorytmy poszukiwania najkrótszej ścieżki w grafie	17
Rozdział 2.3. Algorytmy MST	19
Rozdział 3. Zastosowania.....	20
Podsumowanie i wnioski	26
Bibliografia.....	27

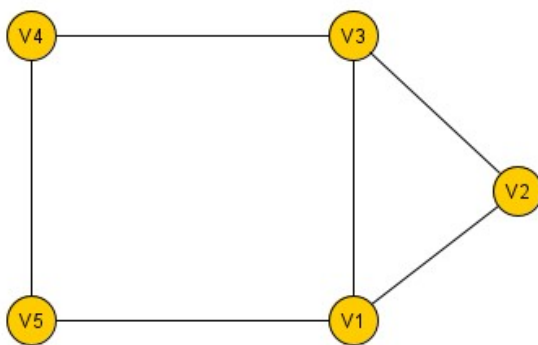
WSTĘP

Pewnego razu zaciekał mnie temat grafów. Chętnie poznałem czym jest graf, jakie pełni funkcje i do czego służy. Postanowiłem stworzyć projekt na ich temat. Na oko były bardzo fajnym tematem, tak też się okazało. Stworzenie projektu zajęło dużo czasu, ale był to czas dobrze wykorzystany. Mam nadzieję, że projekt pomoże komuś np. zrozumieć zasadę działania GPS w telefonie, i spodoba się wielu osobom.

ROZDZIAŁ 1. TEORIA

Definicja 1. *Grafem prostym* G nazywamy pewną relację między danymi obiektami, składającą się z dwóch zbiorów. Jednym z nich jest zbiór wierzchołków, który matematycznie oznaczamy jako $V(G)$, a drugim jest rodzina krawędzi, oznaczana symbolem $E(G)$. (Rodzina może zawierać elementy powtarzające się, a zbiór nie.) Graf oznaczmy $G = (V, E)$.

Przykład:



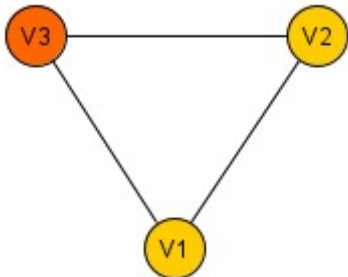
RYSUNEK 1: GRAF G

$$V(G) = \{V1, V2, V3, V4, V5\}$$

$$E(G) = (\{V1, V2\}, \{V2, V3\}, \{V1, V3\}, \{V3, V4\}, \{V4, V5\}, \{V5, V1\})$$

Definicja 2. *Wierzchołek* to punkt pewnej przestrzeni, na której zbudowany jest graf.

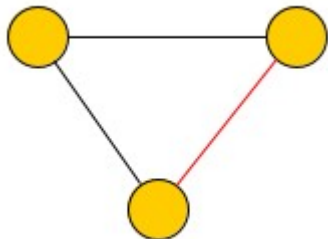
Przykład:



Jeden z wierzchołków został zakolorowany na pomarańczowo.

Definicja 3. *Krawędź* to odcinek pomiędzy wierzchołkami.

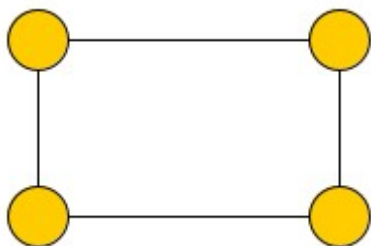
Przykład:



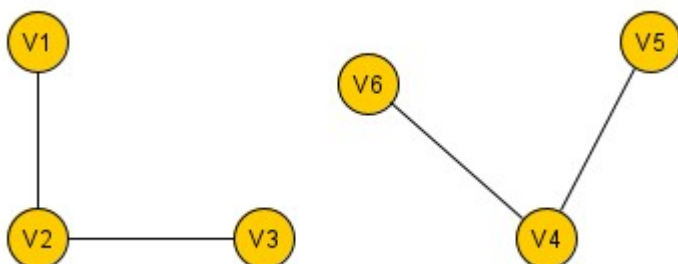
Jedna z krawędzi została pokolorowana na kolor czerwony

Definicja 4. *Graf spójny* to graf, którego można narysować nie odrywając długopisu od ręki.

Przykład:

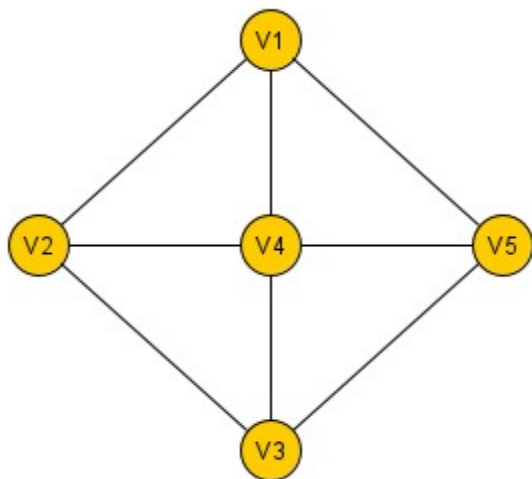


Graf niespójny to graf, którego można przedstawić za pomocą sumy dwóch grafów



Definicja 5. Stopniem wierzchołka grafu G nazywamy liczbę $\deg(V)$, która jest równa ilości krawędzi, wchodzących do danego wierzchołka.

Przykład:

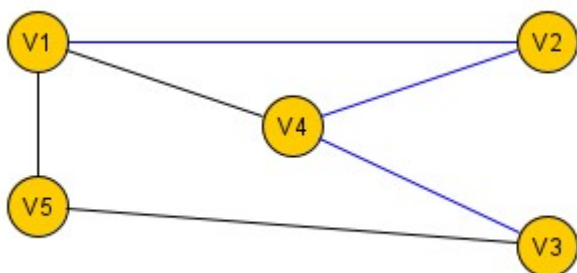


$$\deg(V1)=3 \quad \deg(V4)=4$$

RYSUNEK 2: GRAF H

Definicja 6. Trasa to linia, z której przenosimy się z jednego wierzchołka do innego, składająca się z kolejno przechodzonych krawędzi.

Przykład:



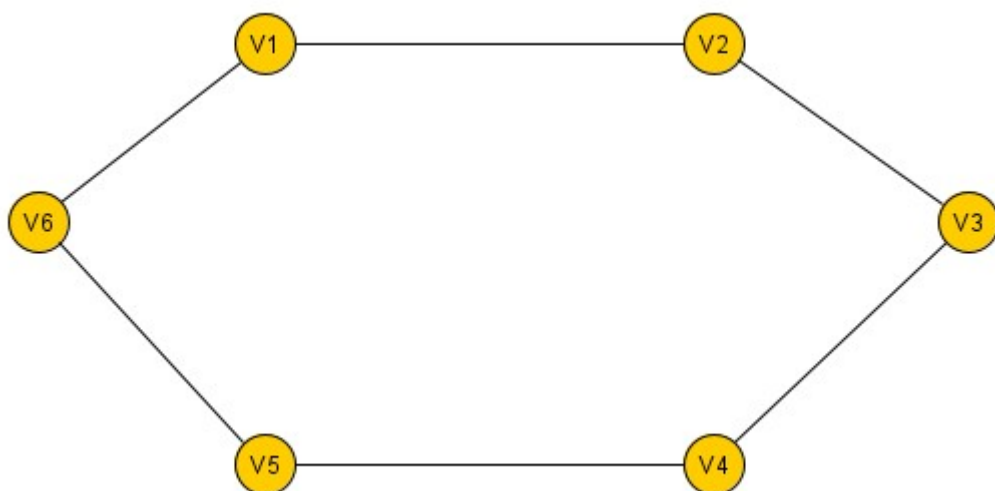
Trasa z odcinka $V1$ do $V4$ została pokolorowana na kolor niebieski. Taką trasę oznaczamy jako :

$V1 \rightarrow V2 \rightarrow V4 \rightarrow V3 \rightarrow V4$, gdzie $V1$ nazywamy wierzchołkiem początkowym, a $V4$ końcowym.

Liczbę krawędzi, która wchodzi w skład tej trasy nazywamy długością trasy.

Definicja 7. Droga to trasa, w której żaden wierzchołek nie występuje więcej niż jeden raz.

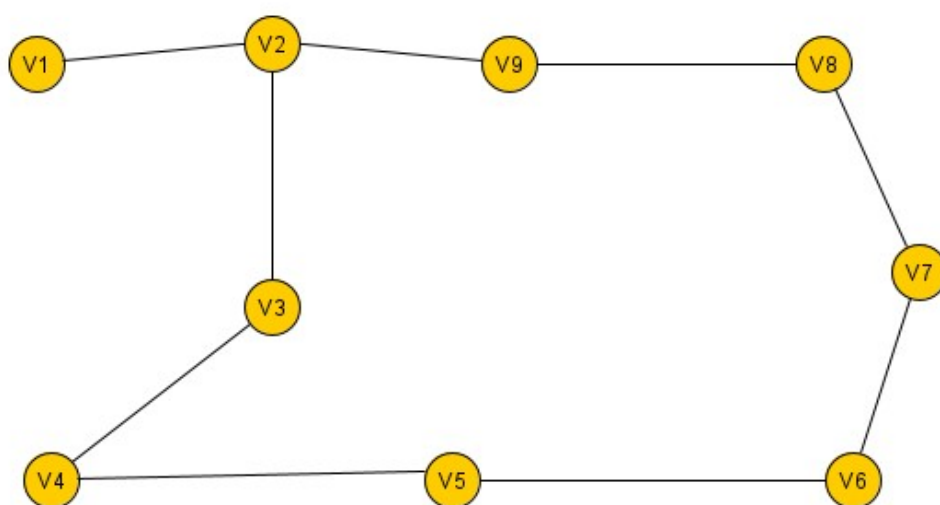
Przykład:



Droga w tym grafie to : $V2 \rightarrow V3 \rightarrow V4 \rightarrow V5 \rightarrow V6 \rightarrow V1$

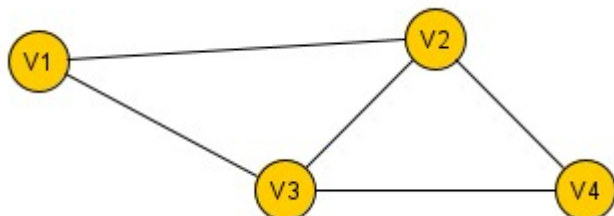
Definicja 8. Drzewo to graf, w którym każdą parę wierzchołków można połączyć jedną drogą .

Przykład:



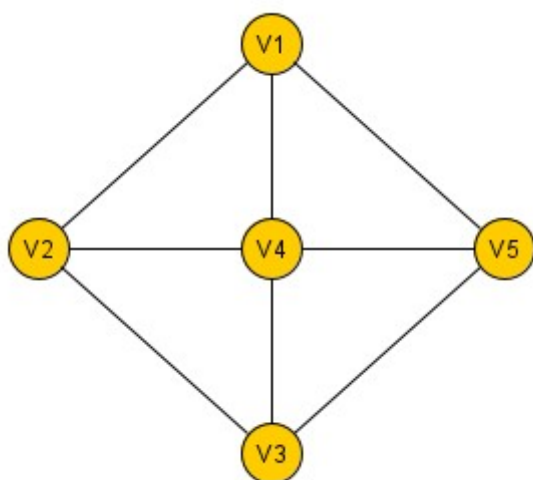
Definicja 9. *Graf planarny* to graf, który może być narysowany bez przecinania się krawędzi.

Przykład :

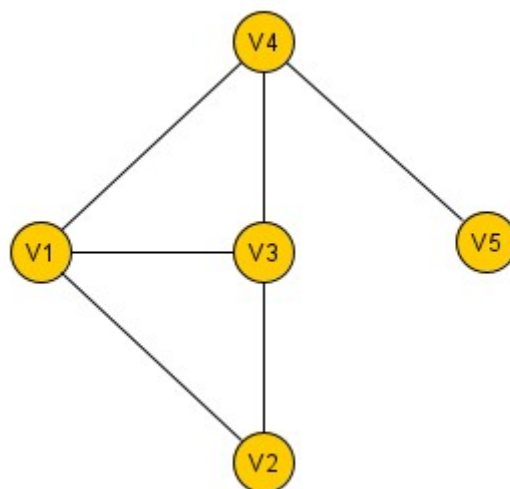


Definicja 10. *Podgrafem G'* nazywamy graf, który powstał przez usunięcie pewnej liczby wierzchołków lub krawędzi z grafu G .

Przykład:



RYSUNEK 4: GRAF G



RYSUNEK 3 GRAF G'

Definicja 11. *Graf pusty* to graf, którego zbiór krawędzi jest zbiorem pustym.

Graf pusty mający n wierzchołków zwykle oznaczamy N_n .

Przykład. Graf N_4

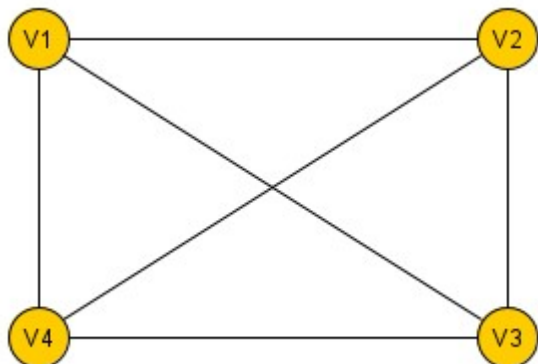


Definicja 12. *Graf pełny* to graf, w którym każda para wierzchołków jest połączona krawędzią.

Graf pełny mający n wierzchołków zwykle oznaczamy K_n . Jeśli graf pełny ma n wierzchołków to ma $\frac{n(n-1)}{2}$ krawędzi.

Przykład:

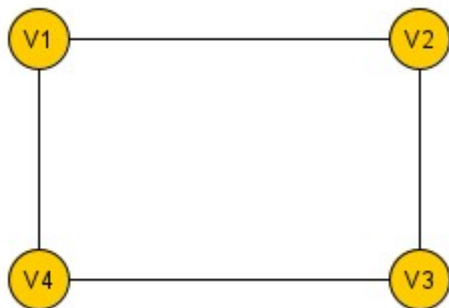
Graf K_4 .



Liczba wierzchołków : 4

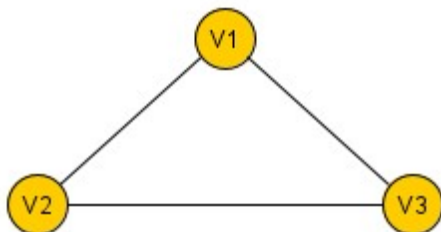
Liczba krawędzi : $\frac{4(4-1)}{2} = \frac{12}{2} = 6$

Graf niepełny to graf, w którym nie każda para wierzchołków jest połączona krawędzią



Definicja 13. *Graf regularny* to graf, w którym każdy wierzchołek ma ten sam stopień .

Przykład:



$$\text{Deg}(V1) = 2$$

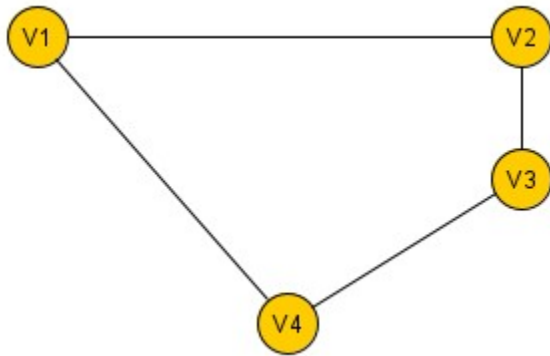
$$\text{Deg}(V2) = 2$$

$$\text{Deg}(V3) = 2$$

RYSUNEK 5: GRAF K

Definicja 14. *Graf platoński* to graf złożony z wierzchołków i krawędzi wielościanu foremnego. Istnieje pięć takich grafów.

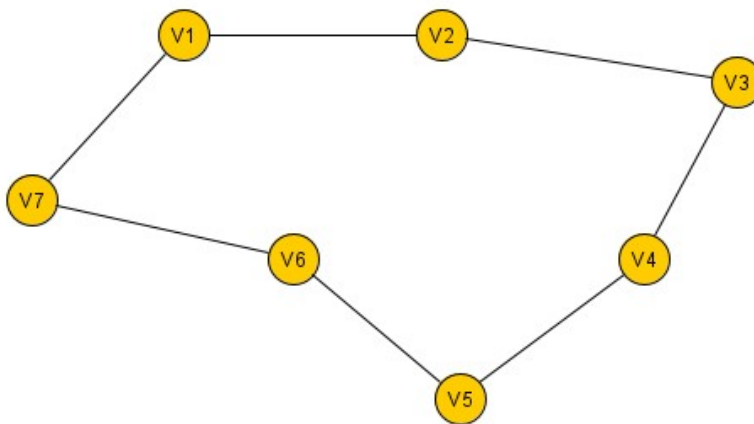
Definicja 15. *Ścieżka* to trasa, w której wszystkie krawędzie są różne.



$V1 \rightarrow V2 \rightarrow V3 \rightarrow V4$

Definicja 16. *Cykl* to ścieżka zamknięta zawierająca przynajmniej jedną krawędź, gdzie ścieżką zamkniętą nazywamy ścieżkę, w której wierzchołek początkowy pokrywa się z wierzchołkiem końcowym.

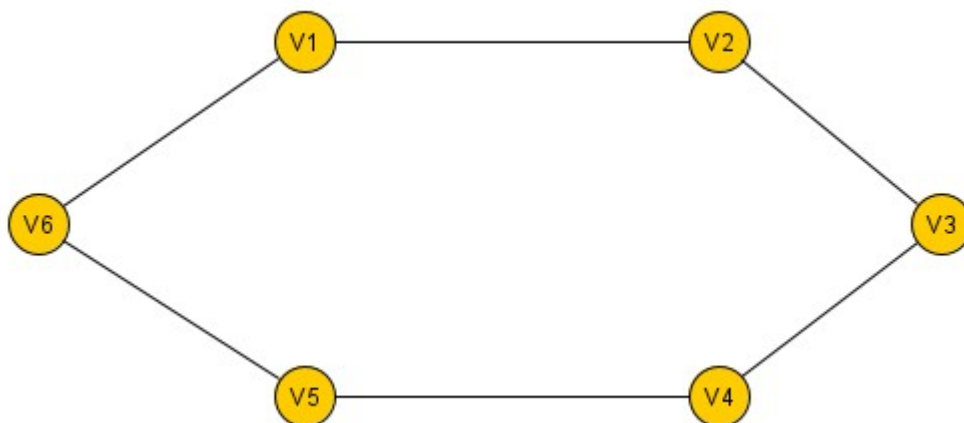
Przykład :



$V3 \rightarrow V4 \rightarrow V5 \rightarrow V6 \rightarrow V7 \rightarrow V1 \rightarrow V2 \rightarrow V3$

Definicja 17. *Graf Eulera* to graf spójny, w którym istnieje zamknięta ścieżka która zawiera każdą krawędź grafu

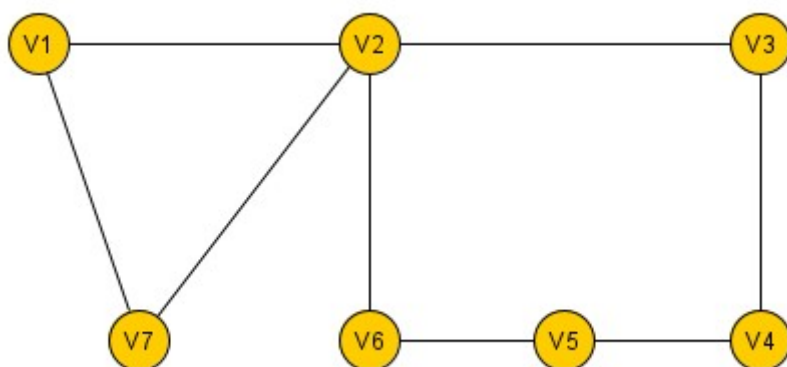
Przykład :



V1-V2-V3-V4-V5-V6

Definicja 18. *Cykl Eulera* w grafie G to ścieżka zamknięta zawierająca każdą krawędź grafu G . (Aby cykl przechodził przez każdą krawędź przechodzić tylko raz.)

Przykład:



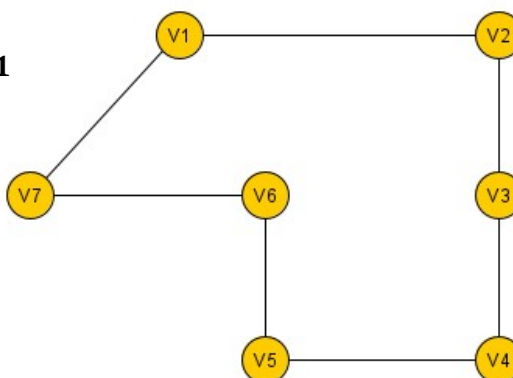
V1 → V2 → V3 → V4 → V5 → V6 → V2 → V7 → V1

Twierdzenie (Eulera): Graf spójny G jest grafem Eulerowskim wtedy i tylko wtedy, gdy stopień każdego wierzchołka grafu G jest liczbą parzystą.

Definicja 19. *Cykl Hamiltona* to zamknięta ścieżka przechodząca tylko raz przez każdy wierzchołek grafu G . oprócz wierzchołka początkowego i końcowego.

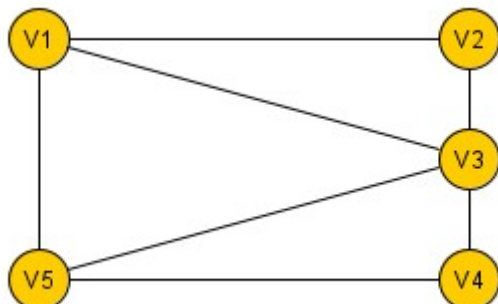
Przykład:

V1 → V2 → V3 → V4 → V5 → V6 → V7 → V1



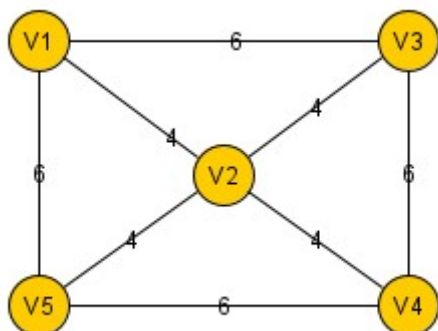
Definicja 20. *Graf Hamiltona* to graf, który spełnia warunki podane w definicji dziewiętnastej.

Przykład:



Definicja 21. *Graf ważony* to graf, w którym każdej krawędzi przypisana jest pewna wartość liczbową.

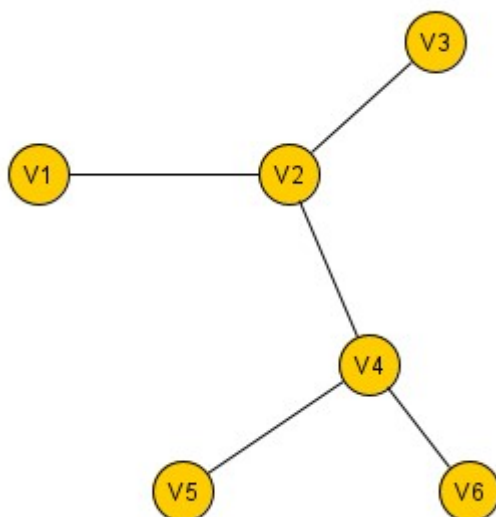
Przykład.



Waga 6 na krawędzi $\{V1, V3\}$ może oznaczać np. długość drogi 6km pomiędzy miastem V1, a V3.

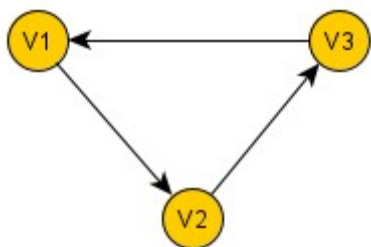
Definicja 22. *Las* to graf który nie zawiera cykli.

Przykład :



Definicja 23. *Graf skierowany* to graf, w którym pojawiają się strzałki, które oznaczają poruszanie się w wyznaczonym kierunku zgodnie z strzałką.

Przykład.



Strzałka pomiędzy V1, a V3 może oznaczać, że pomiędzy skrzyżowaniem V1, a V3 istnieje droga jednokierunkowa, którą możemy się poruszać tylko ze skrzyżowania V3 do V1, nie na odwrót.

Definicja 24. *Drzewo Rozpinające* to drzewo, które zawiera wszystkie wierzchołki Grafu G, zaś zbiór krawędzi drzewa jest podzbiorem zbioru krawędzi grafu.

ROZDZIAŁ 2. ALGORYTMY

Człowiekiem, który jest uważany za wynalazcę teorii grafów był matematyk Leonhard Euler, który rodził się 15 kwietnia 1707 roku, zmarł 18 września 1873 w Petersburgu. Jest uznawany za jednego z najwybitniejszych matematyków w historii. Teoria grafów to dział matematyki zajmujący się badaniem własności grafów. Opublikowany w 1736 roku opis zagadnienia mostów królewskich przez Leonarda Eulera jest uznawany za pierwszą pracę na temat teorii grafów. Zagadnienie mostów królewskich to problem, nad którym głowili się mieszkańcy Królestwa, a który w XVIII wieku napisał Leonhard Euler. Przez Królewiec przepływała rzeka Pregola, w której znajdowały się dwie wyspy. Ponad rzeką przerzucono siedem mostów, z których jeden łączył obie wyspy, a pozostałe łączyły wyspy z brzegami rzeki. Problem, który zaniepokoił Eulera był następujący: Czy można przejść kolejno przez wszystkie mosty tak, żeby każdy przekroczyć tylko raz? Opublikowany w 1741 roku przez Eulera Opis zagadnienia w pracy **Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis w Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae**, jest uznawany za pierwszą pracę na temat teorii grafów. Euler udowodnił, że jest to niemożliwe, a decyduje o tym nieparzysta liczba wylotów mostów zarówno na każdą z wysp, jak i na oba brzegi rzeki. Pierwszy podręcznik dotyczący teorii grafów został napisany przez Dénes Kóniga, został opublikowany w 1936 roku. Wydana w 1969 roku kolejna książka Franka Harary'ego została „Uznana na całym świecie za kompletny podręcznik na ten temat”, i pozwoliła matematykom, chemikom, inżynierom elektrycznym oraz naukowcom społecznym porozumieć się ze sobą. Harary podarował wszystkie datki na zafundowanie Nagrody Pólya. Pierwsze użycie określenia „graf” przypisywane jest Jamesowi Josephowi Sylvesterowi – matematykowi angielskiego pochodzenia.

Algorytm to ciąg czynności lub sposób postępowania prowadzący do wykonania określonego zadania lub rozwiązania problemu w skróconym czasie.

Cykl Eulera to taki cykl w grafie, który przechodzi przez każdą krawędź dokładnie raz. Jeżeli w danym grafie możliwe jest utworzenie takiego cyklu, to jest on nazywany cyklem Eulera.

Przykładowe Zastosowanie :

Przykładowym zastosowaniem może być listonosz, który wyrusza z poczty aby dostarczyć listy. Chciałby on dostarczyć listy wszystkim ludziom, nie przechodząc przez jedną ulicę dwa razy. W tej sytuacji pomoże mu Algorytm poszukiwania cyklu Eulera.

Potrzebujemy taki cykl po to aby np. w jak najkrótszym czasie przejść trasę, którą chcemy wykonać. Gdy np. ktoś chce dojechać do wyznaczonego celu i chce zaoszczędzić jak najwięcej paliwa.

Ten cykl wyznaczają poniższe algorytmy ↓ :

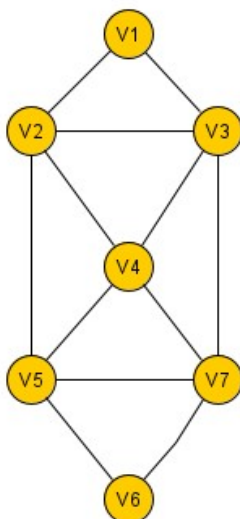
1. Algorytm Fleury'ego

Algorytm Fleury'ego został wynaleziony w 1883 roku.

Instrukcja :

- Startujemy od dowolnego wierzchołka .
- Przechodzimy przez dowolne krawędzie, które są styczne z obecnie rozważanym wierzchołkiem i zaznaczamy je kolorem, oraz zapamiętujemy ich kolejność.
- W każdym kroku unikajmy mostów (możemy w ostateczności), gdzie mostem nazywamy krawędź, której usunięcie sprawi, że graf będzie niespójny.
- Podpunkty napisane wyżej stosujemy aż do wyczerpania wszystkich krawędzi , a zaznaczone krawędzie tworzą kolejno drogę Eulera .

Przykład:



1-3-7-6-5-7-4-3-2-5-4-2-1

Algorytm poszukiwania najkrótszej ścieżki w grafie jest to zagadnienie polegające na wyszukaniu w grafie ścieżki, łącząca dwa wierzchołki, której suma wag krawędzi jest jak najmniejsza.

Przykładowe Zastosowanie :

Z algorytmu Dijkstry można skorzystać przy obliczaniu najkrótszej drogi do danej miejscowości. Wystarczy przyjąć, że każdy z punktów skrzyżowań dróg to jeden z wierzchołków grafu, a odległości między punktami to wagi krawędzi. Na tej zasadzie działa np. znane wszystkim Google Maps.

Czy są inne tego typu algorytmy? Tak.

Algorytm Bellmana

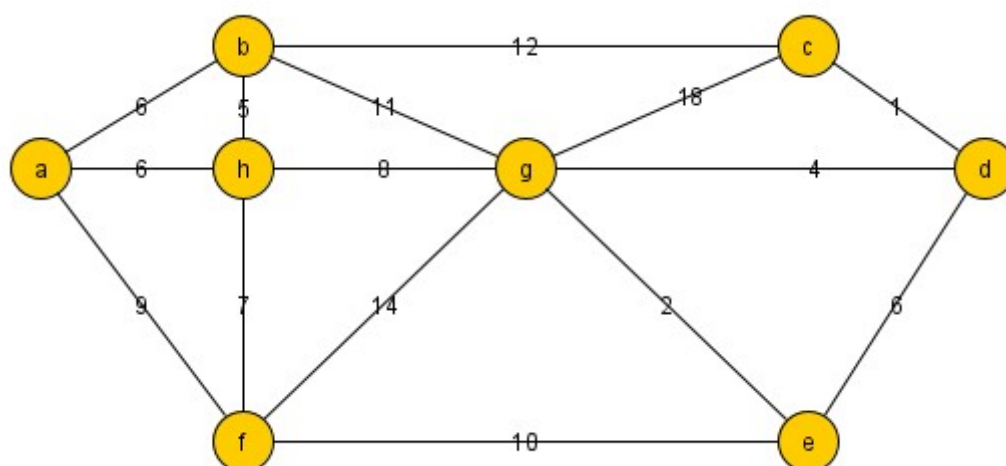
1. Algorytm Dijkstry

Algorytm Dijkstry został wynaleziony w 1956 roku przez Edsgera W. Dijkstrę. Opublikowany został 3 lata później. Autor urodzony został w maju 1930 roku, zmarł w Sierpniu 2002 roku.

Instrukcja :

- Na początek oznaczamy wierzchołek startowy liczbą 0, a wszystkie inne wierzchołki otrzymują tymczasową cechę równą -.
- Badamy wszystkie wierzchołki , które połączone są bezpośrednią krawędzią z wierzchołkiem s.
- Wszystkie te wierzchołki otrzymują cechy, które są równe wagom krawędzi łączących te wierzchołki, a cecha, która ma najmniejszą wartość zostaje uznana za stałą, możemy ją podkreślić.
- Wierzchołek, który obecnie ma najmniejszą wartość staje się nowym wierzchołkiem początkowym, a jego cecha staje się stałą
- Opisane powyżej czynności wykonujemy, aż dojdziemy do ostatniego wierzchołka r. Można kontynuować algorytm, aż do wyczerpania wszystkich wierzchołków, a wtedy otrzymamy najkrótszą ścieżkę od wierzchołka s do wszystkich pozostałych wierzchołków.

Przykład :



Etap	a	b	c	d	e	f	g	h	waga	ścieżka
1.	0	∞	-	-	-	-	-	-	0	a
2.		<u>6</u>	-	-	-	9	-	6	6	a-b
3.			18	-	-	9	17	<u>6</u>	6	a-h
4.			18	-	-	<u>9</u>	14		9	a-f
5.			18	-	19		<u>14</u>		14	a-h-g
6.			18	18	<u>16</u>				16	a-h-g-e
7.			<u>18</u>	18					18	a-b-c
8.				<u>18</u>					18	a-h-g-d

ROZDZIAŁ 2.3. ALGORYTMY MST

Algorytm MST jest to algorytm wyznaczania minimalnego drzewa rozpinającego danego grafu o najmniejszej z możliwych wag, takie w którym nie istnieje dla tego grafu inne drzewo rozpinające o mniejszej sumie wag krawędzi. Skrót *MST* oznacza – minimalne drzewo rozpinające – drzewo rozpinające danego grafu o najmniejszej z możliwych wag. Skrót pochodzi od angielskiej nazwy *minimum spanning tree*.

Przykładowe Zastosowanie :

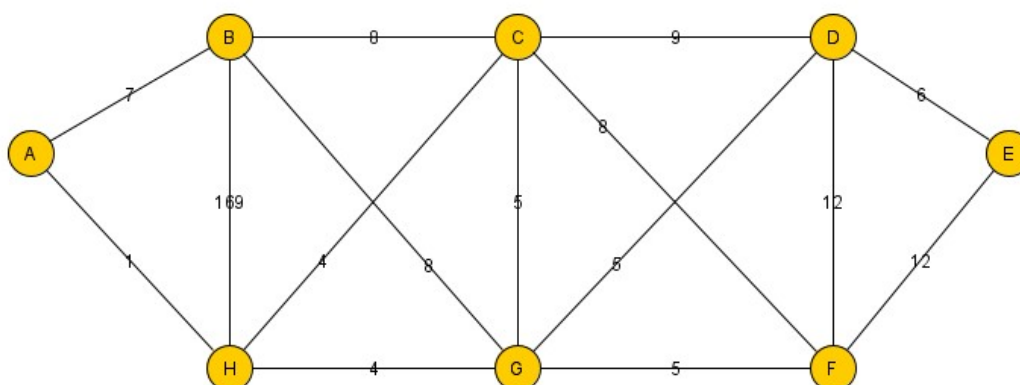
W pewnym miasteczku wszystkie drogi są zablokowane, a burmistrz chce je odnowić, aby z każdego miejsca można było dojechać wszędzie i wydać jak najmniej na naprawę dróg. Pomoże mu w tym Algorytm MST a jednym z tych algorytmów jest np. Algorytm Kruskala.

Znajdujący się poniżej algorytm wynalazł William Kruskal, urodzony 10 października 1910 roku, zmarł 21 kwietnia 2005.

Instrukcja :

- W tabeli zapisujemy wagi krawędzi kolejno od najmniejszej do największej.
- Wybieramy i zaznaczamy krawędź z najniższą wagą .
- Wybieramy kolejną krawędź o najniższej wadze, pamiętając o tym, aby nie tworzył cyklu.
- Algorytm powtarzamy aż do wyczerpania wszystkich krawędzi, a te już wybrane tworzą minimalne drzewo rozpinające.

Przykład :



A-H H-C H-G C-G G-D G-F D-E A-B B-C C-F B-G C-D F-E D-F B-H

1 4 4 5 5 5 6 7 8 8 8 9 12 12 16

Za pomocą algorytmu Dijkstry wyznaczę najkrótsze możliwe drogi od mojego domu do ważnych miejsc w miasteczku, które są wierzchołkami i zostały zaznaczone kolorem pomarańczowym.

Przystąpmy do algorytmu :

Algorytm ten postanowiłem wykonać na kartce, dlatego, że tabelka okazała się być bardzo duża. Kartka na której został przeprowadzony algorytm została sklejona z kilku mniejszych kartek wielkości A4. Poniżej wstawiam zdjęcie wykonanej przeze mnie tabelki:

Etap	dom 0	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	V11	V12	V13	V14	V15	szkoła	zabka	kościół	policeja	paczka	przystanek	apteka	osrodek	parczkowat	poqotowice	waga 0	ścieżka dom
1.																												
2.		30m																									30	dom → V1
3.			80m																								80	dom → V1 → V2
4.				180m																							80	dom → V1 → V15
5.				180m																							100	dom → V1 → V15 → paczka
6.				180m																							120	dom → V1 → V15 → przystanek
7.				180m																							130	dom → V1 → V2 → V3
8.				180m - 580m																							140	dom → V1 → V14
9.				180m - 580m																							160	dom → V1 → V14 → zabka
10.				180m - 580m																							180	dom → V1 → V15 → V13
11.				180m - 580m																							190	dom → V1 → V2 → V3 → V4
12.				650m - 580m - 300m																							190	dom → V1 → V15 → paczka → kościół
13.				650m - 580m - 300m																							290	dom → V1 → V15 → paczka → kościół → V11
14.				650m - 580m - 300m - 340m																							250	dom → V1 → V15 → paczka → kościół → V11 → V12
15.				650m - 580m - 300m - 340m																							300	dom → V1 → V2 → V3 → V4 → V8
16.				650m - 580m - 340m																							340	dom → V1 → V15 → paczka → kościół → V11 → V10
17.				650m - 580m - 480m																							380	dom → V1 → V15 → paczka → kościół → V11 → V10 → policja
18.				650m - 580m - 480m																							360	dom → V1 → V2 → V3 → V4 → V8 → poqotowice
19.				650m - 580m - 480m																							420	dom → V1 → V14 → szkoła
20.				650m - 580m - 480m																								dom → V1 → V15 → paczka → kościół → V11 → V10 → V9
21.				650m - 580m																							580	dom → V1 → V2 → V3 → V6
22.				650m - 780m																							600	dom → V1 → V2 → V3 → V6 → osrodek
23.				650m - 780m																							650	dom → V1 → V2 → V3 → V4 → V5
24.				780m																							660	dom → V1 → V2 → V3 → V6 → osrodek → apteka
25.				780m																							680	dom → V1 → V2 → V3 → V4 → V5 → parczkowat
26.				780m																							780	dom → V1 → V2 → V3 → V6 → V7

Jak widać tabelka jest bardzo duża. Poniżej wstawie jedno duże zdjęcie w postaci skanu, oraz dwóch połów aby lepiej było wszystko widać.

Etap	dom	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	V11	V12	V13	V14	V15	szkółka	zabka	kościół	poliśia	pošta	przyśtawek	opłeka	osłodek	paszkonat	pagotowie	waga	świeża dom
1.	0																									0		
2.		30m																								30	dom → V1	
3.			80m																							80	dom → V1 → V2	
4.																										80	dom → V1 → V15	
5.																										100	dom → V1 → V15 → pošta	
6.																										120	dom → V1 → V15 → przyśtawek	
7.																										130	dom → V1 → V2 → V3	
8.																										140	dom → V1 → V14	
9.																										160	dom → V1 → V14 → zabka	
10.																										180	dom → V1 → V15 → V13	
11.																										190	dom → V1 → V2 → V3 → V4	
12.																										190	dom → V1 → V15 → pošta → kościół	
13.																										290	dom → V1 → V15 → pošta → kościół → V11	
14.																										250	dom → V1 → V15 → pošta → kościół → V12	
15.																										300	dom → V1 → V2 → V3 → V4 → V8	
16.																										340	dom → V1 → V15 → pošta → kościół → V11 → V10	
17.																										380	dom → V1 → V15 → pošta → kościół → V11 → V10 → poliśia	
18.																										360	dom → V1 → V2 → V3 → V4 → V8 → pagotowie	
19.																										420	dom → V1 → V14 → szkółka	
20.																											dom → V1 → V15 → pošta → kościół → V11 → V10 → V9	
21.																										580	dom → V1 → V2 → V3 → V6	
22.																										600	dom → V1 → V2 → V3 → V6 → osłodek	
23.																										650	dom → V1 → V2 → V3 → V4 → V5	
24.																										660	dom → V1 → V2 → V3 → V6 → osłodek	
25.																										680	dom → V1 → V2 → V3 → V4 → V8	
26.																										780	dom → V1 → V2 → V3 → V6 → V7	

Poniżej skany dwóch połówek.

Etap	dom	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	V11	V12	V13	V14	V15	szkota	zabka	kościot	polija
1.	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2.		(30m)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3.		(80m)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	140m	80m	-	-	-	-
4.				120m	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	140m	(80m)	-	-	-	-
5.				120m	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	180m	140m	-	-	-	-
6.				120m	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	180m	140m	-	-	190m	-
7.			(120m)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	180m	140m	-	-	190m	-
8.					190m	580m	-	-	-	-	-	-	-	-	180m	(140m)	-	-	190m	-
9.					190m	580m	-	-	-	-	-	-	-	-	180m		420m	(160m)	190m	-
10.					190m	580m	-	-	-	-	-	-	-	-	(180m)		420m		190m	-
11.					(190m)	580m	-	-	-	-	-	-	-	340m			420m		190m	-
12.					650m	580m	300m	-	-	-	-	-	-	310m			420m		(190m)	-
13.					650m	580m	300m	-	-	-	(230m)	310m					420m			-
14.					650m	580m	300m	340m	-	-	-	(250m)					420m			-
15.					650m	580m	(300m)	340m	-	-	-	-					420m			-
16.					650m	580m	-	(340m)	-	-	-	-					420m			-
17.					650m	580m	-	480m	-	-	-	-					420m		(380m)	-
18.					650m	580m	-	480m	-	-	-	-					420m			-
19.					650m	580m	-	480m	-	-	-	-					(420m)			-
20.					650m	580m	-	(480m)	-	-	-	-								-
21.					650m	(580m)	-	-	-	-	-	-								-
22.					650m	780m	-	-	-	-	-	-								-
23.					(650m)	780m	-	-	-	-	-	-								-
24.						780m	-	-	-	-	-	-								-
25.						780m	-	-	-	-	-	-								-
26.						(780m)	-	-	-	-	-	-								-

Powyżej pierwsza część. Poniżej druga część.

V15	szkółka	zabka	kościół	polija	paczka	przystanek	apteka	osrodek	paczkomat	pagotowie	waga	ścieżka dom
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	30	dom → V1
80m	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	80	dom → V1 → V2
(80m)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	80	dom → V1 → V15
-	-	-	-	-	(100m)	120m	-	-	-	-	100	dom → V1 → V15 → <u>paczka</u>
-	-	-	190m	-	-	(120m)	-	-	-	-	120	dom → V1 → V15 → <u>przystanek</u>
n	-	-	190m	-	-	-	-	-	-	-	130	dom → V1 → V2 → V3
m	-	-	190m	-	-	-	-	-	-	-	140	dom → V1 → V14
-	420m	(160m)	190m	-	-	-	-	-	-	-	160	dom → V1 → V14 → <u>zabka</u>
-	420m	-	190m	-	-	-	-	-	-	-	180	dom → V1 → V15 → V13
-	420m	-	190m	-	-	-	-	-	-	-	190	dom → V1 → V2 → V3 → V4
-	420m	-	(190m)	-	-	-	-	-	-	-	190	dom → V1 → V15 → paczka → <u>kościół</u>
-	420m	-	-	-	-	-	-	-	-	-	290	dom → V1 → V15 → paczka → <u>kościół</u> → V11
-	420m	-	-	-	-	-	-	-	-	-	250	dom → V1 → V15 → paczka → <u>kościół</u> → V11 → V12
-	420m	-	-	-	-	-	-	-	-	-	300	dom → V1 → V2 → V3 → V4 → V8
-	420m	-	-	-	-	-	-	-	680m	360m	340	dom → V1 → V15 → paczka → <u>kościół</u> → V11 → V10
-	420m	-	-	-	-	-	-	-	680m	360m	380	dom → V1 → V15 → paczka → <u>kościół</u> → V11 → V10 → <u>polija</u>
-	420m	-	-	-	-	-	-	-	680m	(360m)	360	dom → V1 → V2 → V3 → V4 → V8 → <u>pagotowie</u>
-	(420m)	-	-	-	-	-	-	-	680m	-	420	dom → V1 → V14 → <u>szkółka</u>
-	-	-	-	-	-	-	-	-	680m	-	-	dom → V1 → V15 → paczka → <u>kościół</u> → V11 → V10 → V9
-	-	-	-	-	-	-	-	-	680m	-	580	dom → V1 → V2 → V3 → V6
-	-	-	-	-	-	-	-	(600m)	680m	-	600	dom → V1 → V2 → V3 → V6 → <u>osrodek</u>
-	-	-	-	-	-	660m	-	680m	-	-	650	dom → V1 → V2 → V3 → V4 → V5
-	-	-	-	-	-	(660m)	-	680m	-	-	660	dom → V1 → V2 → V3 → V6 → <u>osrodek</u> → <u>apteka</u>
-	-	-	-	-	-	-	-	(680m)	-	-	680	dom → V1 → V2 → V3 → V4 → V8 → <u>paczkomat</u>
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	780	dom → V1 → V2 → V3 → V6 → V7

Na zielono w kolumnie ścieżka zostały podkreślone właśnie te miejsca do których chciałem wyznaczyć najkrótsze drogi od mojego domu który w grafie został oznaczony wierzchołkiem w kolorze niebieskim do ważnych miejsc które zostały oznaczone wierzchołkiem w kolorze pomarańczowym. Przy okazji zostały wyznaczone najkrótsze drogi od mojego domu do wszystkich skrzyżowań.

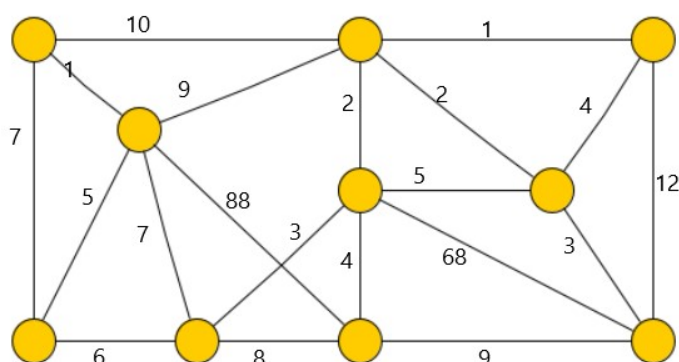
Przykładowo najkrótsza droga od mojego domu do paczkomatu w mojej miejscowości wynosi **680m** a najkrótsza z możliwych dróg do tego paczkomatu to:

dom → V1 → V2 → V3 → V4 → V8 → PACZKOMAT. Co zostało wyznaczone w kroku nr 25.

II. Zastosowanie

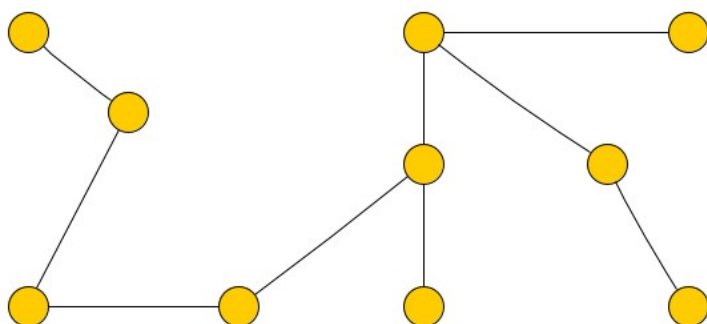
Kolejne zastosowanie grafu w życiu codziennym pokaże z użyciem algorytmu MST problemu tzn. zabłoconego miasta. W tym mieście znajduje się tylko kilka domów oraz instytucje takie jak szkoła czy sklepy. Lecz w tym mieście nie ma utwardzonych dróg. Są tylko wydeptane przez mieszkańców polne dróżki, które w czasie deszczu robią się zabłocone i bardzo ciężko się poruszać. Mieszkańcy chcą zrobić zrzutkę pieniędzy na kamień do utwardzenia dróg. Chcą utwardzić drogi w taki sposób, aby z każdego domu do każdego innego miejsca można było dojechać utwardzoną drogą. Chcą też jak najmniej wydać pieniędzy bo mieszkańcy nie są zbyt hojni na zrzutkę. Problem polega na tym, aby utwardzić minimalną (najkrótszą) długość w kilometrach dróg. Problem będziemy mogli rozwiązać za pomocą algorytmu MST po sprowadzeniu do teorii grafów.

Poniżej graf ważony miasta :



1 1 2 2 3 3 4 4 5 5 6 6 7 7 8 9 9 10 12 68 88

Minimalne drzewo rozpinające tego grafu :



Aby mieszkańcy zapłacili jak najmniej powinni utwardzić powyższe drogi, czyli drogi, które tworzą minimalne drzewo rozpinające dróg ich miasta. Drzewo to spina wszystkie miejsca drogami, których suma długości jest najmniejsza z możliwych.

PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Podsumowując po napisaniu pracy będę pamiętał, którą drogą chodzić szybciej do wyznaczonych miejsc. Projekt na pewno przyda się w codziennym funkcjonowaniu. Praktycznie cały projekt pisałem sam, parę rzeczy streściłem z książki, którą umieściłem poniżej w bibliografii. Rysunki grafów wymyślałem i tworzyłem sam w programie *Yed Graph editor*. Każde zdanie starałem się pisać swoimi słowami. Po napisaniu tego projektu uświadomiłem sobie, że grafy mają bardzo duże zastosowanie w życiu codziennym w bardzo wielu dziedzinach się pojawiają i to na każdym korku a szczególnie tam gdzie nigdy byśmy o tym nie pomyśleli.

Mam nadzieję, że projekt się podobał :).

BIBLIOGRAFIA

1. Robin J. Wilson - Wprowadzenie do teorii grafów