

Szkoła Podstawowa



im. K. I. Gałczyńskiego
w Jawiszowicach

Chory z urojenia ☺

**Rzeczywiste $\wedge$ urojone -
- czyli o świecie liczb zespolonych**

$$i = \sqrt{-1}$$

Autor: Paweł Nawrocki

Klasa 7

Opiekun: mgr Izabella Pest-Janusz

Spis treści:

Wstęp	2
Zbiory	3
1. Pojęcie zbioru	3
2. Rodzaje zbiorów	3
3. Przykłady zbiorów	4
4. Działania na zbiorach	5
5. Podzbiór zbioru	7
Podstawowe zbiory liczbowe	8
Zbiór liczb zespolonych	12
1. Pojęcie zbioru liczb zespolonych	12
2. Przykłady liczb zespolonych	13
3. Działania na liczbach zespolonych	13
4. Graficzny sposób przedstawienia liczb zespolonych	14
5. Wzór Eulera	15
6. Ciekawe działania przy zastosowaniu liczb zespolonych	17
Podsumowanie	23
Bibliografia	24
Opinia o uczniu	25

Wstęp

Przed dwoma laty, przygotowując się do Małopolskiego Konkursu Prac Matematycznych po raz pierwszy szerzej zająłem się liczbami - wówczas zerem i jedynką - małymi liczbami o wielkich możliwościach. Z biegiem czasu moje zainteresowanie liczbami zaczęło się rozwijać i tak stopniowo poznałem liczby zaprzyjaźnione, bliźniacze, przestępne czy doskonałe. W czasie poszukiwań i zgłębiania tego niezwykłego świata liczb natrafiłem na liczby urojone i zespolone. Wtedy narodziła się moja fascynacja, którą postanowiłem teraz przenieść na karty swojej pracy, zatytułowanej na wesoło „Chory z urojenia”.

Moja tegoroczna praca składa się z trzech części. W pierwszej krótko przedstawiam podstawowe pojęcia o zbiorach liczbowych, rodzaje zbiorów oraz działania, które można na nich wykonywać.

W drugiej części zajmuję się podstawowymi zbiorami liczbowymi, które łącznie tworzą zbiór liczb rzeczywistych. Poszukuję też odpowiedzi na kilka pytań związanych z tymi zbiorami.

Trzecią, najobszerniejszą część mojej pracy poświęciłem liczbom zespolonym, które królują nad wszystkimi zbiorami liczbowymi. Chcę pokazać czytelnikowi, że to, czego nie da się wykonać w świecie liczb rzeczywistych, jest jak najbardziej możliwe do wykonania w świecie liczb zespolonych. Poszukiwanie ciekawych problemów sprawiło mi wiele radości i mam nadzieję, że przy lekturze mojej pracy wzbudzą one zainteresowanie czytelników.

Paweł Nawrocki

ZBIORY

1. Pojęcie zbioru należy do tych pojęć matematycznych, których się nie definiuje. Uznajemy je za tak zwane pojęcie pierwotne.

Zbiór możemy określić:

→ poprzez wymienienie wszystkich jego elementów, np.:

$$X = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$$

$$N = \{ 0, 1, e, \pi, i \}$$

→ opisując własności, które mają wszystkie jego elementy, np.:

$$P = \{ x : x = 2^n \wedge n \in \mathbb{C} \}$$

Zbiór elementów x mających własność $W(x)$ oznaczamy symbolem $\{ x : W(x) \}$

$$Y = \{ x : x > 0 \wedge x < 6 \wedge x \in \mathbb{N} \}$$

Wzór Y zawiera wszystkie x , takie że $0 < x < 6$ oraz x należy do zbioru liczb naturalnych.

Moc zbioru to ilość elementów zawartych w konkretnym zbiorze liczbowym.

2. Rodzaje zbiorów

→ Zbiór, który ma skończoną liczbę elementów, nazywamy **zbiorem skończonym**, np.:

$$Z = \{ x : x > -10 \wedge x < 10 \wedge x \in \mathbb{C} \}$$

$$Z = \{ -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$$

Szczególnym zbiorem skończonym niemającym żadnych elementów (zawiera 0 elementów) jest **zbiór pusty**.

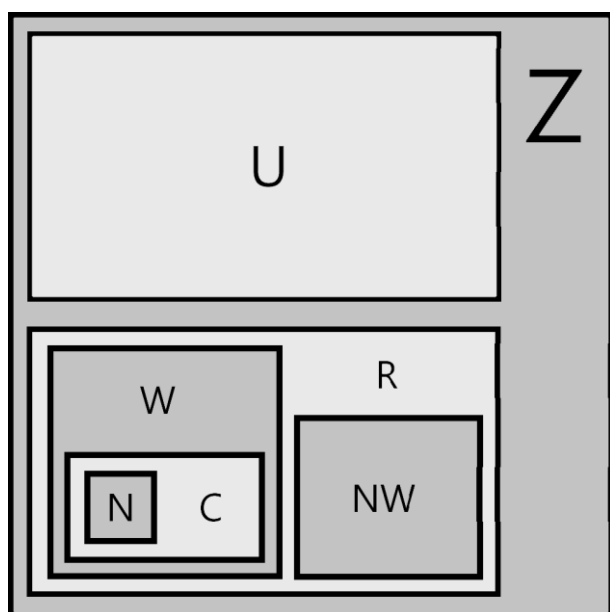
→ Zbiór, który nie jest skończony, nazywamy **zbiorem nieskończonym**, np.:

$$W = \{ 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6} \dots \}$$

3. Przykłady zbiorów

- zbiór liczb naturalnych: $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$
- zbiór liczb całkowitych: $B = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$
- zbiór liczb podzielnych przez 3: $C = \{ \dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots \}$
- zbiór liczb pierwszych: $D = \{ 2, 3, 5, 7, 11, \dots \}$
- zbiór liczb złożonych: $E = \{ 24, 36, 81, 256, 1000, \dots \}$
- zbiór liczb rzeczywistych: $F = \{ 3, 9.4, 16\frac{1}{2}, 3.(3), \dots \}$
- zbiór liczb wymiernych: $G = \{ 2, 6.3, \pi, \sqrt{2}, e, \dots \}$
- **zbiór liczb zespolonych:** $H = \{ 3+2i, 10+0.5i, \pi+i, 5, \dots \}$
- **zbiór moich ulubionych liczb:** $P = \{ x : x = 2^n \wedge n \in \mathbb{C} \}$
 $N = \{ 0, 1, e, \pi, i \}$

Graficzne przedstawienie zależności między poszczególnymi zbiorami liczb:



Źródło: opracowanie własne

- N – zbiór liczb naturalnych
- C – zbiór liczb całkowitych
- W – zbiór liczb wymiernych
- NW – zbiór liczb niewymiernych
- R – zbiór liczb rzeczywistych
- U – zbiór liczb urojonych
- Z – zbiór liczb zespolonych

4. Działania na zbiorach

Na zbiorach, jak i na liczbach, można wykonywać działania, np.:

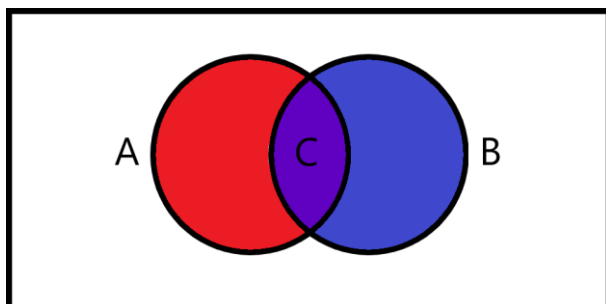
- a) dodawanie (suma),
- b) mnożenie (iloczyn),
- c) odejmowanie (różnica),
- d) dopełnienie.

a) **Sumą zbiorów** nazywa się zbiór złożony ze wszystkich elementów należących do pierwszego albo drugiego zbioru.

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$A \cup B = C, \text{ więc: } C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$



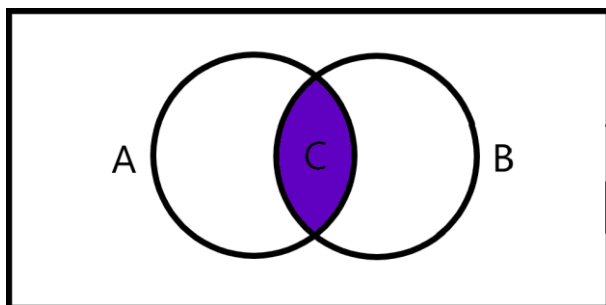
Źródło: opracowanie własne

b) **Iloczynem zbiorów** nazywa się zbiór złożony ze wszystkich elementów należących do pierwszego i drugiego zbioru.

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$A \cap B = C, \text{ więc: } C = \{2, 3\}$$



Źródło: opracowanie własne

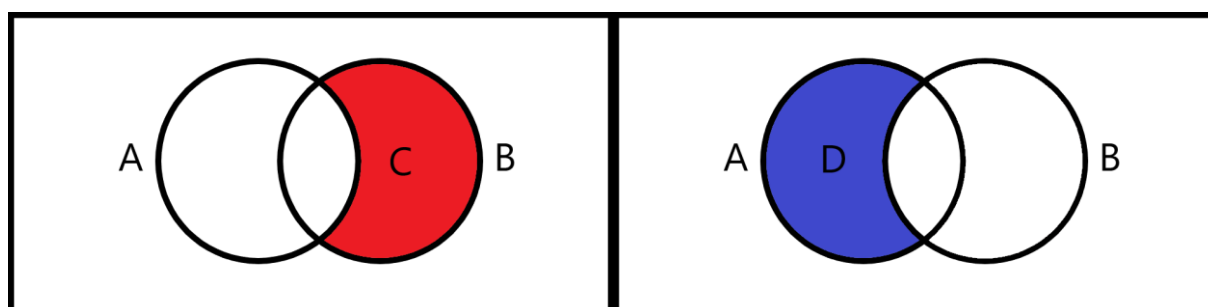
c) **Różnicą zbiorów** nazywa się zbiór złożony ze wszystkich elementów należących do pierwszego zbioru, jednocześnie nie należących do drugiego zbioru.

$$A = \{ 1, 2, 3 \}$$

$$B = \{ 2, 3, 4, 5 \}$$

$$B - A = C \text{ albo } B / A = C, \text{ więc: } C = \{ 4, 5 \}$$

$$A - B = D \text{ albo } A / B = D, \text{ więc: } D = \{ 1 \}$$



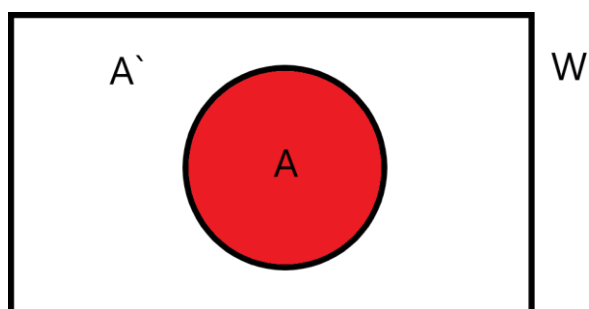
Źródło: opracowanie własne

d) **Dopełnieniem zbioru** nazywamy zbiór wszystkich elementów (pewnej ustalonej przestrzeni), które do danego zbioru nie należą.

$$A \text{ (zbiór)} = \{ 2, 3, 4 \}$$

$$W \text{ (przestrzeń)} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$$

$$A^c \text{ (dopełnienie zbioru)} = \{ 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$$



Źródło: opracowanie własne

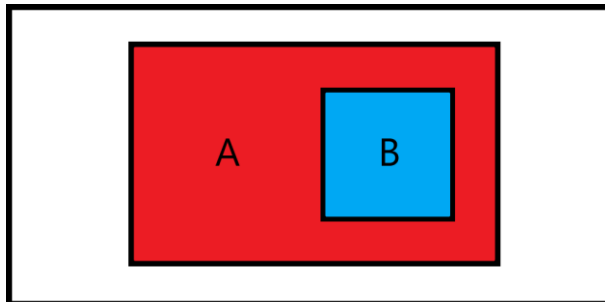
5. Podzbiorem zbioru nazywamy zbiór, który zawiera część elementów pierwotnego zbioru, ale nie zawierający żadnych innych elementów.

$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$

$B = \{ 1, 2, 4, 8 \}$

$B \subset A$

B jest podzbiorem zbioru A



Źródło: opracowanie własne

PODSTAWOWE ZBIORY LICZBOWE

1. Jednym z pierwszych zbiorów, które poznajemy, jest **zbiór liczb naturalnych**.

$$N = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \dots \}$$

Liczb naturalnych jest nieskończenie wiele. **Moc zbioru** liczb naturalnych oznacza się symbolem $\aleph_0$ albo ω .

2. Kolejny zbiór tworzą **liczby całkowite**.

$$C = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$$

$$N \subset C$$

W tym miejscu nasuwa się pytanie: czy liczb całkowitych jest więcej niż naturalnych?

Nie. Aby to udowodnić, trzeba każdy element zbioru liczb naturalnych dopasować do innego elementu ze zbioru liczb całkowitych.

Sposób postępowania:

- Wypisujemy pierwsze 10 liczb ze zbioru liczb naturalnych.
- Pod nimi zapisujemy liczby całkowite tak, aby co wyraz zmieniać znak.

W ten sposób powstaje nam następujący zapis:

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
C	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5

W ten sposób dla każdego elementu ze zbioru N dopasowaliśmy element ze zbioru C. To oznacza, że **liczb całkowitych i naturalnych jest tyle samo**.

3. Następnym zbiorem są **liczby wymierne**.

$$W = \{ x : x = p / q \wedge p \in C \wedge q \in C - \{0\} \}$$

Sprawdźmy, czy tych liczb także jest tyle samo, ile liczb naturalnych?

Tak. Aby tego dowieść, należy postępujemy w ten sposób:

- Zapisujemy liczby wymierne (dodatnie) w tabeli tak, aby z każdą kolumną licznik był coraz większy, a z każdym rzędem mianownik.

$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	...
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	...
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	...
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	...
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Źródło: opracowanie własne

- Następnie czerwonymi liniami zaznaczamy liczby tak, jak na rysunku.
- Liczby wymierne (dodatnie) połączone liniami tworzą zbiór liczb, który zapisujemy następująco:
 $W = \{ 1/1, 2/1, 1/2, 1/3, 2/2, 3/1, 4/1, 3/2, 2/3 \dots \}$
- Liczby w tej postaci możemy zapisać i porównać z liczbami naturalnymi w następujący sposób:

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8
W^+	1/1	2/1	1/2	1/3	2/2	3/1	4/1	3/2	2/3

- Liczb naturalnych jest tyle samo, co liczb wymiernych dodatnich. Po skróceniu ułamków, pominięciu powtarzających się wartości (np.: 1/1 i 2/2) oraz dopisaniu ujemnych wartości, otrzymujemy taki rezultat:

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
W	0	1	-1	2	-2	1/2	-1/2	1/3	-1/3	3	-3	4	-4	3/2	-3/2

- Z powyższego wynika, że **liczb wymiernych i naturalnych jest tyle samo.**

4. **Liczby niewymierne** to takie liczby, których nie można zapisać za pomocą ułamka zwykłego, gdzie licznik i mianownik należą do liczb całkowitych.

Liczby niewymierne wraz z liczbami wymiernymi tworzą **zbiór liczb rzeczywistych** (wszystkie liczby na osi liczbowej).

Sprawdźmy, czy liczb niewymiernych jest tyle samo, co liczb naturalnych?

Tym razem nie. Nie da się dopasować każdej liczby ze zbioru liczb niewymiernych do liczb naturalnych. Aby tego dowieść, postępujemy w następujący sposób:

- Czy jesteśmy w stanie określić, jaka jest pierwsza liczba dodatnia niewymierna?
Może 0.000000001? albo 0.00000...000001?
- Moc zbioru liczb NW jest nieskończona niepoliczalna, nie da się policzyć wszystkich tych liczb, nie da się nawet zacząć.
- Spróbujmy dopasować liczby NW do N.

N	NW
0	0.34618795521389764645090220076653928285695792356921...
1	3.88379545208194000000509421214079954220976520572405...
2	9.37954091179886318905571507073210578220560138750703...
3	2.93872565609233877650012855430847022897530348267750...
4	1.111...
5	3.75029727506928072137643240927002496249064208103959...
6	1.24816326412825651210242048409681921638432768655261...

- Gdybyśmy dopasowywali te liczby w nieskończoność, chcąc zapisać je „wszystkie”, to czy udowodnilibyśmy ich równoliczność? Nie.
- Za pomocą tych liczb dałoby się zrobić nową unikatową liczbę, której wcześniej nie było.

Stwórzmy nową liczbę:

- Zapisujemy „0.” i do tej liczby dopisujemy pierwszą liczbę po przecinku z pierwszej liczby dodać jeden, następnie drugą liczbę po przecinku z drugiej liczby dodać jeden i tak dalej.

Pierwsza liczba z pierwszej liczby +1 to 4 , druga z drugiej +1 to 9. Trzecia +1 to 0 (jeżeli tą liczbą było 9, to zapisujemy 0) i tak dalej...

- Składamy w całość tą liczbę i powstaje: 0,4908283...

Taka liczba nie może się pojawić w naszym nieskończonym ciągu, ponieważ w pierwszej liczbie nie zgadza się pierwsza liczba po przecinku ($3 \neq 4$), druga z drugą ($8 \neq 9$) i tak dalej...

- Z tego wynika, że nie da się zapisać wszystkich liczb NW, ponieważ zawsze można stworzyć nową unikalną niepowtarzalną liczbę. Natomiast liczby naturalne da się napisać wszystkie (nie fizycznie, ale w myślach).
Wniosek: **liczb niewymiernych jest więcej niż liczb naturalnych.**

ZBIÓR LICZB ZESPOLONYCH

1. Zbiorem, który wyróżnia się wśród innych znanych mi zbiorów, jest **zbiór liczb zespolonych**.

Liczyby zespolone są rozszerzeniem liczb rzeczywistych.

W zbiorze liczb rzeczywistych nie można wyciągać pierwiastków z liczb ujemnych, natomiast w zbiorze liczb zespolonych można wykonać takie działanie.

Pierwiastek (parzystego stopnia) z liczby ujemnej jest tzw. liczbą urojoną i zapisujemy go za pomocą jednostki urojonej i .

Liczbę i definiujemy:

$$i^2 = -1$$

Liczbę zespoloną zapisujemy w postaci: **$a + bi$** ,

gdzie **$a, b \in \mathbb{R}$** ,

w tym:

a - część rzeczywista liczby zespolonej,

b - część urojona liczby zespolonej,

i - jednostka urojona.

Można ją zapisać w postaci:

$$\sqrt{-1} = i$$

I w tym miejscu pojawia się ciekawe zagadnienie:

Dlaczego $\sqrt{-1} = i$ to nie jest błąd?

W młodszych klasach myślałem, że działanie $5 - 8$ to błąd albo że $1 : 3$ jest niewykonalne, lecz później dowiedziałem się, że te działania są wykonalne, a nawet proste!

W szkole podstawowej uczymy się zazwyczaj, że nie da się pierwiastkować liczb ujemnych, gdy stopień tego pierwiastka jest parzysty.

Widząc $i^2 = -1$ można pomyśleć, że to błąd. Jednak jest to wykonalne, tak samo jak działania $1 : 3$ albo $5 - 8$.

2. Przykłady liczb zespolonych

$$7 + 2i$$

$$13$$

$$2i$$

$\pi + i$, gdzie π jest częścią rzeczywistą

$$\operatorname{Re}(\pi + i) = \pi$$

a częścią urojoną jest 1 ($1 \cdot i = i$)

$$\operatorname{Im}(\pi + i) = 1$$

3. Działania na liczbach zespolonych

Liczyby zespolone można np. dodawać, odejmować, dzielić, mnożyć, pierwiastkować, potęgować itd.

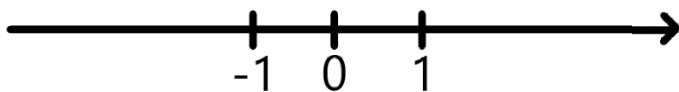
Dodawanie: $(2 + 3i) + (3 + 2i) = 2 + 3 + 3i + 2i = 5 + 5i$

Odejmowanie: $(2 + 3i) - (3 + 2i) = 2 - 3 + 3i - 2i = -1 + i$

Mnożenie: $(2 + 3i) \cdot (3 + 2i) =$
 $= 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2i + 3i \cdot 3 + 3i \cdot 2i =$
 $= 6 + 4i + 9i + 6i^2 =$
 $= 6 + 13i + 6i^2 =$
 $= 6 + 13i + 6 \cdot (-1)^* =$
 $= 6 - 6 + 13i = 13i \quad * (i^2 = -1)$
Stąd wynika, że: $(2 + 3i) \cdot (3 + 2i) = 13i$

4. Graficzny sposób przedstawiania liczb zespolonych

Liczby rzeczywiste można zapisać na osi liczbowej:



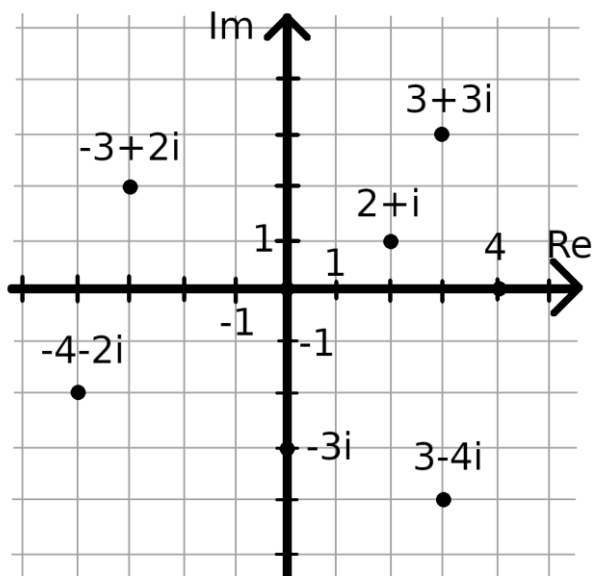
Źródło: opracowanie własne

Natomiast liczby zespolone można zapisać na płaszczyźnie zespolonej.

Każdej liczbie zespolonej $z = a + bi$ odpowiada uporządkowana para liczb (a, b) .

Możemy interpretować liczby zespolone jako **punkty na płaszczyźnie**.

Na osi x-ów będziemy zaznaczać część rzeczywistą liczby zespolonej, a na osi y-ów część urojoną.

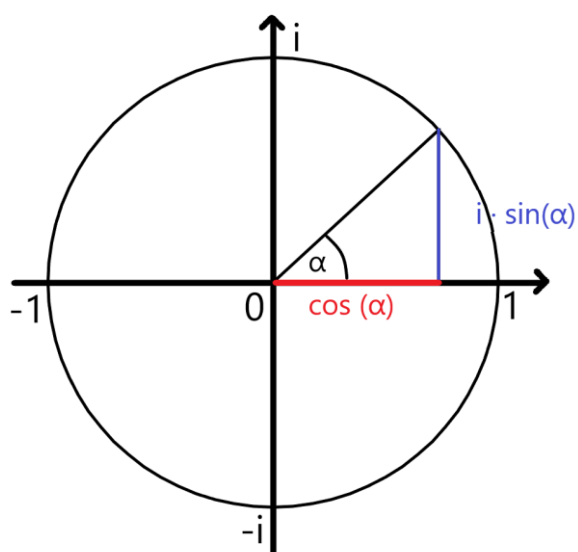


Źródło: opracowanie własne

5. Wzór Eulera

Jednym ze wzorów związanych z liczbami zespolonymi jest **wzór Eulera**. Za pomocą tego wzoru możemy m.in. pierwiastkować i potęgować liczby zespolone.

$$e^{ai} = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha) \quad (1)$$



Źródło: opracowanie własne

e to liczba Eulera i wynosi około 2,71828182845904
sin i **cos** to funkcje trygonometryczne.

Przykłady zastosowania wzoru Eulera:

Przykład 1:

$$\alpha = 2n\pi \quad (360^\circ n) \quad (n - \text{dowolna liczba naturalna})$$

$$e^{2\pi ni} = \cos(2\pi n) + i \cdot \sin(2\pi n)$$

$$\cos(2\pi n) = 1 \quad \sin(2\pi n) = 0, \text{ więc:}$$

$$e^{2\pi ni} = 1 \quad (2)$$

Przykład 2:

$$\alpha = \pi/2 \text{ (90°)}$$

$$e^{\pi/2 \cdot i} = \cos(\pi/2) + i \cdot \sin(\pi/2)$$

$$\cos(\pi/2) = 0 \quad \sin(\pi/2) = 1, \text{ więc:}$$

$$e^{\pi/2 \cdot i} = i \quad \backslash^2 \quad (3)$$

$$e^{\pi/2 \cdot i \cdot 2} = i^2$$

$$e^{\pi i} = -1 \quad \backslash +1$$

$$e^{\pi i} + 1 = 0 \quad \rightarrow \text{Według wielu jest to najpiękniejszy wzór matematyki, bo wykorzystujemy przy nim 5 stałych wartości: 0, 1, e, \pi, i.}$$

Przykład 3:

Ile wynosi $\sqrt{i}$?

Czy takie działanie da się w ogóle wykonać? Tak.

Wiemy, że:

$$\sqrt[m]{n} = n^{\frac{1}{m}}, \text{ więc:}$$

$$\sqrt{i} = i^{\frac{1}{2}}$$

Z tych obliczeń wynika, że:

$$e^{\pi/2 \cdot i} = i \quad \backslash^{\frac{1}{2}} \quad (\text{ze wzoru 3})$$

$$e^{\pi/4 \cdot i} = \sqrt{i}$$

$$\cos(\pi/4) + i \cdot \sin(\pi/4) = \sqrt{i} \quad (\text{ze wzoru 1})$$

$$\cos(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sin(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ więc}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{i}$$

$$\text{Podsumowując: } \sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}$$

6. Ciekawe działania przy zastosowaniu liczb zespolonych

Wielu działań w matematyce nie można rozwiązać na liczbach rzeczywistych, a da się je wykonać na liczbach zespolonych, np.:

$$1^x = 2$$

Na pierwszy rzut oka to działanie jest niewykonalne, bo:

$$1^5 = 1, \quad 1^{100} = 1, \quad 1^{-256} = 1 \quad \text{nawet } 1^0 = 1$$

Przykład 1: Jak przeprowadzić powyższe działanie z wykorzystaniem liczb zespolonych?

- Zaczynamy od przekształcenia tego równania do postaci logarytmicznej:

$$1^x = 2$$

$$\log_1 2 = x \quad a^b = c \Leftrightarrow \log_a c = b$$

$$x = \frac{\ln 2}{\ln 1}, \text{ ponieważ } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \log_e a = \ln a$$

Logarytm naturalny ($\ln$), to logarytm o podstawie e .

Zauważmy, że w mianowniku jest $\ln 1$ ($\log_e 1$), czyli $e^x = 1$.

Wiemy, że jakakolwiek liczba rzeczywista (bez zera) podniesiona do potęgi zero wynosi 1. Więc jaki będzie wynik?

- Ze wzoru (2), który wcześniej wyprowadziłem wynika, że:

$$e^{2\pi ni} = 1$$

Kiedy więc użyjemy liczb zespolonych, wynikiem $\ln(1)$ będzie $2\pi ni$.

- Podstawiamy pod $\ln(1)$ $2\pi ni$.

$$x = \frac{\ln 2}{2\pi ni} \quad \cdot \frac{i}{i}$$

$$x = \frac{i \ln 2}{2\pi ni^2}$$

- Otrzymujemy następujący wynik: $1^x = 2 \Leftrightarrow x = -\frac{i \ln 2}{2\pi n}$, gdzie $n \neq 0$.

Przykład 2: Jak obliczyć, ile wynosi i^i ?

$$\begin{aligned} i^i &= \\ &= (e^{\frac{\pi i}{2}})^i = & \text{(ze wzoru 3)} \\ &= e^{-\frac{\pi}{2}} & (4) \end{aligned}$$

Przykład 3: Ile wynosi $\sqrt[i]{i}$?

$$\begin{aligned} \sqrt[i]{i} &= \\ &= i^{\frac{1}{i}} = \quad / \wedge \frac{i}{i} \\ &= i^{\frac{i}{-1}} = \\ &= i^{-i} = \\ &= \frac{1}{i^i} = \\ &= \frac{1}{e^{-\frac{\pi}{2}}} = & \text{(ze wzoru 4)} \\ &= e^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

i^i jest odwrotnością $\sqrt[i]{i}$

Przykład 4:

Za pomocą wzoru Eulera można także udowodnić jedynkę trygonometryczną.

$$e^{ai} = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha) \quad (5)$$

$$e^{(-\alpha)i} = \cos(-\alpha) + i \cdot \sin(-\alpha)$$

$$e^{-ai} = \cos(\alpha) - i \cdot \sin(\alpha) \quad (6)$$

Wzór (6) wynika z parzystości i nieparzystości funkcji trygonometrycznych.

- **Obliczamy sinusa** za pomocą różnicy wzorów (5) i (6):

$$e^{\alpha i} = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)$$

$$e^{-\alpha i} = \cos(\alpha) - i \cdot \sin(\alpha)$$

$$e^{\alpha i} - e^{-\alpha i} = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha) \quad / \text{ skracamy } \cos(\alpha)$$

$$e^{\alpha i} - e^{-\alpha i} = 2i \cdot \sin(\alpha) \quad / : 2i$$

$$\sin(\alpha) = \frac{e^{\alpha i} - e^{-\alpha i}}{2i}$$

- **Obliczamy cosinusa** za pomocą sumy wzorów (5) i (6):

$$e^{\alpha i} = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)$$

$$e^{-\alpha i} = \cos(\alpha) - i \cdot \sin(\alpha)$$

$$e^{\alpha i} + e^{-\alpha i} = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha) + \cos(\alpha) - i \cdot \sin(\alpha) \quad / \text{ skracamy } i \cdot \sin(\alpha)$$

$$e^{\alpha i} + e^{-\alpha i} = 2 \cdot \cos(\alpha) \quad / : 2$$

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{\alpha i} + e^{-\alpha i}}{2}$$

- **Dodajemy kwadraty tych funkcji.**

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= \left(\frac{e^{\alpha i} - e^{-\alpha i}}{2i} \right)^2 + \left(\frac{e^{\alpha i} + e^{-\alpha i}}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{(e^{\alpha i} - e^{-\alpha i})^2}{-4} + \frac{(e^{\alpha i} + e^{-\alpha i})^2}{4} = \\ &= -\frac{e^{2\alpha i} - 2e^0 + e^{-2\alpha i}}{4} + \frac{e^{2\alpha i} + 2e^0 + e^{-2\alpha i}}{4} = \end{aligned}$$

$$\frac{-e^{2\alpha i} + 2 - e^{-2\alpha i} + e^{2\alpha i} + 2 + e^{-2\alpha i}}{4} =$$

$$= \frac{2 + 2}{4} = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \text{c.n.d.}$$

Przykład 5: Jak obliczyć wszystkie wyniki pierwiastkowania danego stopnia?

Wiemy, że jeżeli mamy pierwiastek x stopnia z jakiejś liczby, wtedy jest możliwe uzyskanie x wyników tego działania, np.

$$\sqrt{4} = 2 \text{ albo } -2$$

Ale jeżeli mamy $\sqrt[3]{8}$, to wtedy wynikiem jest liczba 2. Powstaje pytanie: czy są możliwe jakieś inne wartości?

Sposób postępowania:

Aby policzyć wszystkie wyniki pierwiastkowania należy:

- podzielić 360 na x (stopień pierwiastka), tj.:
dla naszego przykładu $\sqrt[3]{8}$, czyli $360 : 3 = 120$ (kąt alfa);
- znaleźć najprostszy pierwiastek, czyli w naszym przypadku 2;
- podstawić do działania uzyskane wartości, tj.:

$$p \cdot (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha))^n$$

p – nasz najprostszy pierwiastek

n – liczby naturalne od 0 do x-1 (w naszym przypadku 2)

$$x_1 = 2 \cdot (\cos(120) + i \cdot \sin(120))^0$$

$$x_1 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$x_2 = 2 \cdot (\cos(120) + i \cdot \sin(120))^1$$

$$x_2 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$x_2 = 2 \cdot \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = -1 + i\sqrt{3}$$

$$x_2 \approx -1 + 1.73205i$$

$$x_3 = 2 \cdot (\cos(120) + i \cdot \sin(120))^2$$

$$x_3 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$x_3 = 2 \cdot \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$x_3 = 2 \cdot \frac{(-1 + i\sqrt{3})^2}{4}$$

$$x_3 = \frac{1 - 2i\sqrt{3} + (-1 \cdot 3)}{2}$$

$$x_3 = \frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{2}$$

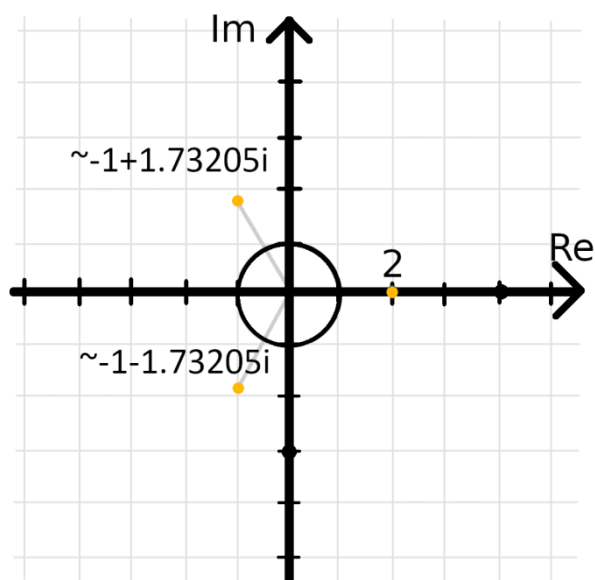
$$x_3 = \frac{2(-1 - i\sqrt{3})}{2}$$

$$x_3 = -1 - i\sqrt{3}$$

$$x_3 \approx -1 - 1.73205i$$

Odpowiedź: Z powyższych obliczeń wynika, że $\sqrt[3]{8}$ nie tylko równa się 2, a także wynosi: $-1 + i\sqrt{3}$ albo $-1 - i\sqrt{3}$.

Wyniki powyższych obliczeń przedstawiłem na płaszczyźnie zespolonej.



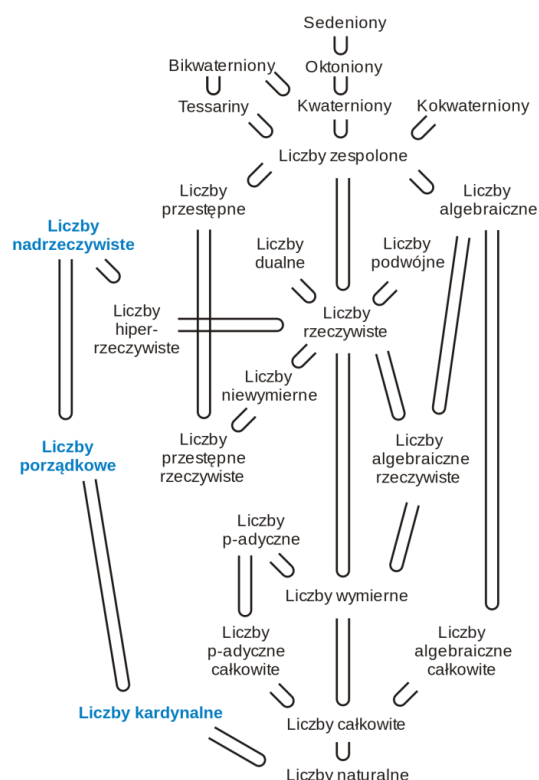
Źródło: opracowanie własne

Na powyższych przykładach przedstawiłem tylko 5 wybranych problemów, które można rozwiązać za pomocą liczb zespolonych. Oczywiście istnieje dużo więcej możliwości, np. potęgowanie liczb zespolonych czy obliczanie ich modułu.

Świat liczb zespolonych jest fascynujący, a przede mną czeka z pewnością jeszcze wiele ciekawych problemów do zgłębienia.

Liczby zespolone znajdują zastosowanie w wielu dziedzinach nauki, z czego nie zdajemy sobie często sprawy. W matematyce pomagają np. przy wyznaczaniu pierwiastków wielomianów oraz układów równań, rozwiązywaniu problemów całkowych i różniczkowych lub tworzeniu fraktali. W fizyce kwantowej są wykorzystywane do opisywania funkcji falowej, a w fotografii i informatyce do kompresji i przechowywania obrazów w formacie jpg.

Oczywiście zbiory nie kończą się na liczbach zespolonych, są jeszcze kwaterniony, oktoniony, sedeniony i wiele wiele innych, ale to już zupełnie nowa historia...



Źródło: <https://pl.wikipedia.org/wiki/Liczba>

Bibliografia:

Leksiński Wacław, Nabiałek Ireneusz, Żakowski Wojciech: *Matematyka dla studiów eksperymentalnych*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1981

Ciesielski Krzysztof, Pogoda Zdzisław: *Matematyczna Bombonierka*, Demart, Warszawa 2017

Kurczak Marcin, Kurczab Elżbieta, Świda Elżbieta: *Matematyka. Podręcznik do liceów i techników klasa 1*, Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro, Warszawa 2012

Pawłowski Henryk: *Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum - zakres rozszerzony*, Operon 2020

Netografia:

[dostęp styczeń 2021]

<https://www.matemaks.pl/liczby-zespolone.html>

http://rasokolowski.strony.wi.ps.pl/glowna_pliki/matdyskr2.pdf

<https://bigosmatematyczny.pl/liczby-zespolone/>

<https://www.youtube.com/watch?v=PFtQ7X6-3z8>

<https://www.youtube.com/watch?v=WuaBtDHWrv0>

<https://www.youtube.com/watch?v=wuHVpuGjeI4>

<https://www.youtube.com/watch?v=cQLcNf2depl>

<https://www.youtube.com/watch?v=6JHSqml1uTc>

Opinia

Paweł Nawrocki uczęszcza do klasy siódmej w Zespole Szkolno-Przedszkolnym nr 6 w Jawiszowicach. Jest uczniem, któremu nie wystarcza wiedza zdobywana w szkole. Szczególne zainteresowanie przedmiotami ścisłymi powoduje, że jego wiadomości i umiejętności znacznie przewyższają wiedzę i umiejętności równolatków. Ponadto uczeń ma ogromne chęci poznawcze, twórczo i analitycznie podchodzi do problemów matematycznych i nie tylko, również fizycznych i chemicznych. Samodzielnie zapoznaje się z fachową literaturą oraz korzysta z polskich i obcojęzycznych publikacji internetowych. Praca z Pawłem jest dla nauczyciela ciągłym wyzwaniem, uczeń wszędzie dostrzega zależności i próbuje przenieść je na język matematyki.

Paweł jest pomysłodawcą tematu pracy i jej samodzielnym wykonawcą. Interesuje się wieloma zagadnieniami, ale szczególną uwagę poświęca liczbom.

Wsparcie i pomoc ze strony rodziców, którzy motywują syna, zachęcają do pracy oraz aktywnie uczestniczą w realizacji jego przedsięwzięć, ma znaczący wpływ na rozwój i sukcesy Pawła.

Izabella Pest-Janusz

Bibliografia i netografia

Leksiński Wacław, Nabiłek Ireneusz, Żakowski Wojciech: *Matematyka dla studiów eksperymentalnych*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1981

Ciesielski Krzysztof, Pogoda Zdzisław: *Matematyczna Bombonierka*, Demart, Warszawa 2017

Kurczak Marcin, Kurczab Elżbieta, Świda Elżbieta: *Matematyka. Podręcznik do liceów i techników klasa 1*, Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro, Warszawa 2012

Pawłowski Henryk: *Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum - zakres rozszerzony*, Operon 2020

<https://www.matemaks.pl/liczby-zespolone.html>

http://rasokolowski.strony.wi.ps.pl/glowna_pliki/matdyskr2.pdf

<https://bigosmatematyczny.pl/liczby-zespolone/>

<https://www.youtube.com/watch?v=PFtQ7X6-3z8>

<https://www.youtube.com/watch?v=WuaBtDHWrv0>

<https://www.youtube.com/watch?v=wuHVpuGjel4>

<https://www.youtube.com/watch?v=cQLcNf2depl>

<https://www.youtube.com/watch?v=6JHSqml1uTc>