O METODZIE „DESZYFRACJI” ZADAŃ ALGEBRAICZNYCH

MIŁOSZ PŁATEK

klasa VIII b
Szkoła Podstawowa nr. 2 im. Bohaterów Westerplatte
ul. Żeromskiego 2, 32-400 Myślenice
Opiekun - mgr Michał Pawlik

Spis treści

1.Wstęp

Wiele godzin dziennie, przez kilka tygodni spędzałem wolny czas nad wyborem tematu na moją pracę. Myślę, że mogę śmiało stwierdzić, że jest to jedna z najtrudniejszych rzeczy w całej pracy.

Jak zapewne wszyscy wiedzą, w tym roku finalista OMJ, nie zapewnia pierwszeństwa w naborze do szkół średnich. Zmartwiła mnie ta informacja, ponieważ mój przyjaciel bardzo wiele godzin dziennie trenował, by dostać się do finału, tak aby móc pójść do wymarzonej szkoły, jak także wiele innych osób. Zmotywowało mnie to do napisania artykułu, który mógłby być dobrą pomocą naukową dla osób walczących o dobry wynik w III etapie OMJ. Zależało mi na omówieniu jakiejś nieznanej, intuicyjnej i uniwersalnej metody olimpijskiej, pozwalającej rozwiązywać wiele zadań, w prosty sposób, jak np. „Zasada Szufladkowa Dirichleta".

Przypomniałem sobie wtedy lekcję z Panem Michałem Pawlikiem, którego serdecznie pozdrawiam, na której rozwiązaliśmy w ciekawy sposób pewne algebraiczne zadanie. To właśnie wzorując się na tym zadaniu stworzyłem metodę „Deszyfracji Zadań Algebraicznych", którą omówiłem w tym artykule.

Mam nadzieję, że ta praca, pozwoli Wam zdobyć nowe umiejętności, a także zachęci do samodzielnej pracy, tak abyście mogli spełnić swoje marzenia.

„Nie ma takiej rzeczy, której nie można by osiągnąć pracą. Nic nie leży poza jej zasięgiem. Złe obyczaje przemienia w dobre, niszczy złe zasady, a odradza dobre. Jest w stanie uczynić z człowieka anioła."

Mark Twain

Życzę miłej lektury

Miłosz Płatek

2. Na czym polega metoda „Deszyfracji Zadań Algebraicznych”?

Metoda „Deszyfracji Zadań Algebraicznych” polega na maksymalnie możliwym stopniu wykorzystaniu treści zadania. To właśnie tam kryją się największe podpowiedzi, z czego wiele osób nie zdaje sobie sprawy. Myślę, że pełne zrozumienie tej metody, może zagwarantować znaczne podniesienie umiejętności i poziomu w zakresie algebry.

Zapewne zastanawiacie się - dlaczego w treści zadania miałyby być ukryte podpowiedzi, które pozwalałyby rozwiązać zadanie?

Odpowiedź jest prosta i jest ona związana z procesem tworzenia zadania. Trzeba zdawać sobie sprawę, że większość zadań algebraicznych jest tworzona w specyficzny sposób. Autor zadania, zazwyczaj wychodzi od jakiegoś w miarę prostego równania lub nierówności, a następnie stara się je skomplikować, tak aby zadanie stało się możliwie, jak najtrudniejsze. Dlatego taki proces tworzenia zadań, nie wymaga dużo trudu od osoby jej tworzącej, nawet jeśli tworzy trudne i skomplikowane zadanie. To podobnie jak w kryptografii - osoba mająca za zadanie zaszyfrowanie jakiejś informacji, powinna bez większego problemu, poradzić sobie z tym zadaniem. Kiedy, jednak ktoś dostaje zakodowaną wiadomość i chce ją odszyfrować, a nie zna szyfru, to staje się to dla niego o wiele trudniejsze, niż dla kodującego. Tak właśnie się dzieje, gdy dostajemy zadanie z algebry, ponieważ, dostajemy „zakodowaną wersję” równania (czyli równanie podane w zadaniu) i mamy przejść do „wersji odkodowanej” równania (czyli do wersji, od której wyszedł autor zadania), nie znając toku rozumowania, czyli szyfru. Teraz nasuwa się pytanie - co jeśli odwrócilibyśmy ten proces? Zadanie stałoby się o niebo łatwiejsze, tylko trzeba zastanowić się czy w ogóle jest to możliwe. Odpowiedź, na to pytanie jest twierdząca, ale co prawda trzeba trzymać się pewnych zasad (więcej informacji w dziale trzecim). Metodę „Deszyfracji Zadań Algebraicznych” stosuje się wtedy, kiedy w zadaniu mamy konkretnie podane co mamy udowodnić, co dzieje się w dużej ilości zadań. Jeżeli w zadaniu, mamy już podane równanie, które mamy dowieść, to jest łatwiej zastosować tą metodę niż w przypadku, w którym nie mamy, ponieważ musimy wtedy dopiero znaleźć równanie od którego wyszedł autor, ponieważ będzie ono zawsze kluczowym elementem w naszym rozwiązaniu. Jednak właśnie w tych zadaniach, w których nie mamy podanej tezy w postaci jednego równia, metoda ta pokazuje największe swoje piękno. Abyś lepiej zrozumiał, o co tu chodzi, przedstawię teraz przykład, w którym nie mamy od razu podanej tezy w postaci równania. To zadanie ma na celu także pokazanie Ci, na czym polega mniej, więcej ta metoda. W następnym dziale omówię teoretyczną stronę tej metody. Jest to bardzo ważny przykład i przeanalizuję, go bardzo dokładnie, postaram się opisać krok, po kroku jak wpaść na rozwiązanie. Pamiętaj, że tego typu analizy, jak analiza przedstawiona poniżej, bywają kluczowe, by rozwiązać zadanie.

Przykład 1

Dodatnie liczby całkowite a,b,c spełniają równość $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3=abc(a^3+b^3+c^3)$. Udowodnij, że iloczyn pewnych dwóch z nich jest kwadratem liczby całkowitej.

Aby zastosować metodę „Deszyfracji Zadań Algebraicznych" musimy dowiedzieć się od czego wyszedł autor tego zadania, czyli w tym przypadku, powinniśmy przedstawić tezę, w postaci jednego równania. Powinniśmy teraz także, spróbować wymyśleć to równanie i sprawdzić czy jesteśmy w stanie przekształcić to, do równania podanego w zadaniu, czyli do *„$a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3=abc(a^3+b^3+c^3)$"* (*). Zatem mamy udowodnić, że:

$ab=x^2 \quad \vee \quad ac=y^2 \quad \vee \quad cb=z^2$ (**)

(dla pewnych x,y,z należących do zbioru liczb całkowitych)

Naszym zadaniem jest teraz „połączenie tego w jedno równanie", tak , aby z tego równania wynikała powyższa zależność. Przy „łączeniu w jedno równanie", warto pamiętać o tym, że jeśli poruszamy się w liczbach całkowitych, to najczęściej chodzi o zapisanie tezy w postaci iloczynu równego zero. Zanim zabierzemy się do wymyślania równania, warto jeszcze sprawdzić czy mamy mieć po wykonaniu mnożenia jakieś liczby ze znakiem minus, a jeśli tak, to ile. Przekształcając równanie (*), otrzymujemy $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3- a^4bc - ab^4c - abc^4=0$. Zatem mamy mieć po wykonaniu mnożenia trzy jednomiany ze znakiem minus.

Podsumujmy jak ma wyglądać nasze równanie:

- po prawej stronie ma mieć liczbę zero,
- po lewej stronie ma mieć iloczyn liczb, z których **co najmniej jedna** jest równa zeru,
- po wykonaniu iloczynu ma dawać 6 jednomianów, 3 ze znakiem minus i 3 ze znakiem plus,

- musi z niego wynikać, **co najmniej jedno**, równanie spośród **trzech równań** (**).

Teraz aż narzuca się by mieć po lewej stronie równania iloczyn **trzech** wielomianów, tak by móc wywnioskować z naszej **jedynej** informacji o iloczynie po lewej stronie równania (że jeden czynnik jest równy zeru), że **co najmniej** jedno spośród **trzech** równań (**) musi zachodzić. Trzeba także pamiętać, że nie możemy używać w tym równaniu innych niewiadomych niż a,b,c. Zatem chcielibyśmy, żeby w każdym nawiasie występowała, jedna spośród liczb ab, ac lub bc, oraz kwadrat liczby całkowitej ze znakiem minus. Teraz już łatwo wpaść na równanie, od którego wyszedł autor tego zadania i jest nim:

$(ac-b^2)(ab-c^2)(bc-a^2)=0$

Wiemy już, że z niego bezpośrednio wynika teza zadania, teraz trzeba tylko sprawdzić czy jesteśmy w stanie przejść z niego do równania podanego w zadaniu.

Wymnażając lewą stronę równania, otrzymujemy:

$a^2b^2c^2-ac^4b-ab^4c+b^3c^3-a^4bc+a^3b^3+a^3c^3-b^2c^2a^2=0$

Redukując wyrazy podobne otrzymujemy:

$b^3c^3+a^3b^3+a^3c^3-ac^4b-ab^4c-a^4bc=0$

Przenosząc trzy pierwsze od prawej jednomiany na prawą stronę równania i wyciągając abc przed nawias, otrzymujemy podane równanie z zadania.

Co kończy dowód.

Uwaga: Pamiętaj, że nie musisz zapisywać całego takiego rozumowania w czystopisie, na konkursie. Polecam zastosowanie tej metody w brudnopisie tak, aby znaleźć poprawną drogę do rozumowania, a następnie zapisać to rozumowanie w naturalny sposób.

3. Teoretyczna strona metody „Deszyfracji Zadań Algebraicznych ”.

1. Metodę „Deszyfracji Zadań Algebraicznych”, można stosować wtedy i tylko wtedy, gdy zadanie jest zadaniem algebraicznym.
2. Metodę „Deszyfracji Zadań Algebraicznych”, można stosować wtedy i tylko wtedy, gdy mamy podane w treści zadanie pewne równanie/nierówność i na jego podstawie mamy udowodnić <u>tezę</u> lub sprawdzić prawdziwość pewnej <u>hipotezy</u>.
   <u>Postępowanie w zadaniu, w którym mamy dowieść tezę:</u>
3. Pierwszym etapem, w trakcie korzystania z metody „Deszyfracji Zadań Algebraicznych” jest wyznaczenie/znalezienie pojedynczego równania/nierówności (w zależności od tego czy w treści zadanie mamy dane równanie czy nierówność), takiego, że zachodzi jedna z poniższych własności:
   - Z tego równania wynika teza (nazwijmy je wtedy - „równaniem tezowym”/ „nierównością tezową”),
   - Z antytezy wynika równanie (nazwijmy je wtedy – „równaniem antytezowym” / „nierównością antytezową”),

   Każde takie równanie/nierówność , nazwijmy także „wersją początkową” , ponieważ jej wyznaczenie jest pierwszym etapem w tej metodzie, a także dlatego , że od niej właśnie wyszedł autor przy tworzeniu zadania.

4. Następnym krokiem w stosowaniu tej metody jest przekształcenie ”wersji początkowej”, do równania/nierówności, dla którego łatwo można już określić prawdziwość.
   a) Jeżeli wyszliśmy od „równania tezowego” lub „nierówności tezowej”, to będziemy dążyć do:
      - ✓ równania/nierówności podanej w treści zadania (ponieważ, wiemy że jest prawdziwe),
      - ✓ równania/nierówności, której łatwo możemy już wykazać prawdziwość (np. nierówność $a^2+b^2 \geq 0$, dla pewnych liczb rzeczywistych a,b):

b) Jeżeli wyszliśmy od „równania antytezowego” lub „nierówności antytezowej”, to będziemy dążyć, do:
   - równania/nierówności, które jest sprzeczne, z równaniem/nierównością podaną w treści zadania,
   - równania/nierówności, którego łatwo możemy wykazać sprzeczność (np. równania $a^2+b^2 = -1$, dla pewnych liczb rzeczywistych a,b).

5. Jeżeli dotarliśmy do dowolnej strzałki w odpowiednim podpunkcie (a,b), wynikającym z rodzaju wybranej przez nas „wersji początkowej”, to dowód tezy jak i zadania jest zakończony.

Uwaga: Pamiętaj, że do przekształceń „wersji początkowej”, można używać tylko i wyłącznie „dozwolonych” przekształceń w tej metodzie. „Dozwolone” przekształcenia dzielą się na dwie części, pod względem tego jaki typ „wersji początkowej” wybraliśmy.

a) Gdy przekształcamy „równanie tezowe” lub „nierówność tezową”, to możemy tylko stosować:
   - Zwykłe, równoważne przekształcenia algebraiczne,
   - Przekształcenia wykorzystujące równanie/nierówność daną w zadaniu.

b) Gdy przekształcamy „równanie antytezowe” lub „nierówność antytezową”, to możemy tylko stosować:
   - Zwykłe, równoważne przekształcenia algebraiczne,
   - Przekształcenia wykorzystujące równanie/nierówność daną w zadaniu,
   - Przekształcenia wykorzystujące wcześniej wyznaczoną „wersję początkową”, czyli wykorzystujące „równanie antytezowe” / „nierówność antytezową”.

Pamiętaj, że: jeżeli w zadaniu mamy daną hipotezę, to powinniśmy najpierw zdecydować, czy będziemy próbować dowieść jej prawdziwości, czy fałszywości, a następnie spróbować wykonać analogiczne rozumowanie, jak powyżej dla tezy. Jeżeli próbujesz dowieść hipotezę, to powinieneś podstawić za „tezę”, słowo hipoteza, a jeżeli będziesz próbował obalić hipotezę, to powinieneś podstawić za „tezę”, słowo anty-hipoteza. Pamiętaj, także, że anty (anty-hipoteza), oznacza hipotezę, ponieważ podwójne zaprzeczenie to prawda.

4. O pożytku z równoważnych „wersji początkowych”.

Równoważna „wersja początkowa”, jest to „wersja początkowa”, będąca równoważna hipotezie/anty-hipotezie lub tezie/antytezie

Główna metoda poszukiwania równoważnych „wersji początkowych”, w postaci równania, to wcześniej wspominana w „przykładzie 1”, metoda przedstawienia „wersji początkowej”, w postaci iloczynu liczb równego zero. Wiemy, wtedy, że jeden czynnik jest równy zero i z niego właśnie chcemy wywnioskować równoważność „wersji początkowej” i hipotezy/anty-hipotezy/tezy/antytezy.

Pożytek z równoważnych „wersji początkowych”, w zadaniach z hipotezą:

- ✓ Pozwala na jednoczesne badanie prawdziwości, jak i nieprawdziwości hipotezy, na co zwykła „wersja początkowa”, nam nie pozwala.
- ✓ Jeżeli używając dozwolonych przekształceń dojdziemy, do równania/nierówności podanej w zadaniu, lub do innego równania/nierówności, której możemy łatwo dowieść prawdziwość, to hipoteza jest prawdziwa.
- ✓ Jeżeli używając dozwolonych przekształceń dojdziemy, do równania/nierówności sprzecznego z równaniem/nierównością podaną w zadaniu, lub do innego równania/nierówności, której możemy łatwo dowieść nieprawdziwość, to hipoteza jest nieprawdziwa.

Pamiętaj, że: stosowanie metody poszukiwania równoważnych „wersji początkowych”, w zadaniach, w których mamy do udowodnienia tezę, także jest bardzo przydatne. Co prawda nie korzystamy wtedy z ich własności, jednak pozwala nam to w szybki i skuteczny sposób znaleźć potrzebną nam „wersję początkową”.

5. Jak znaleźć „wersję początkową” będącą nierównością?

W poprzednim rozdziale, omówiłem technikę znajdowania równoważnych „wersji początkowych”, będącą bardzo pomocną techniką, w zadaniach, w których mamy dane równanie. Okazuje się, jednak, że ta technika nie jest użyteczna w zadaniach, w których w treści mamy podaną pewną nierówność. Jest to spowodowane, tym, że omawiana wcześniej technika polega na zapisaniu równości zera i iloczynu pewnych liczb, więc nie będzie się przy jej użyciu w stanie stworzyć „wersji początkowej” będącej nierównością.

Główna metoda poszukiwania „wersji początkowej”, będącej nierównością, jest bardzo podobna, do metody poszukiwania równoważnych „wersji początkowych”. Polega ona na przedstawieniu „wersji początkowej”, w postaci iloczynu liczb większych/większych bądź równych/mniejszych bądź równych/ mniejszych, od zera. Z ujemności/dodatniości, pewnego czynnika chcemy, żeby wynikała teza/antyteza/hipoteza/anty-hipoteza, lub żeby z tezy/antyteza/hipotezy/anty-hipotezy, można było wywnioskować prawdziwość „wersji początkowej”. W dużej liczbie przypadków, ale nie we wszystkich, ta metoda zwraca równoważne „wersje początkowe” w postaci nierówności. Myślę, że lepiej zrozumiesz tą metodę, jeśli wytłumaczę ją teraz na przykładzie.

Przykład 2

Dane są dodatnie liczby a,b,c,d spełniające nierówność: $a(a + b + c) \le d(d - b - c)$. *Sprawdź, czy z odcinków o długościach a,b,c,d można zbudować czworokąt.*

Mamy podaną hipotezę, oraz daną nierówność, więc możemy zastosować metodę „Deszyfracji Zadań Algebraicznych”. Teraz należy wyznaczyć „wersję początkową” w postaci nierówności. Zanim, jednak za to się zabierzemy powinniśmy się zastanowić, czy będziemy chcieć dowieść prawdziwość, czy nie prawdziwość owej hipotezy. Po obu stronach równania, po wykonaniu mnożenia występuje tyle samo jednomianów, jednak po stronie która ma większą wartość, aż dwa jednomiany mają znak minus, co sugeruje, że hipoteza może być nie prawdziwa, więc powinniśmy najpierw zacząć od badania anty-hipotezy.

Wystarczy dowieść, że:
$a + b + c \leq d \ \lor \ a + b + d \leq c \ \lor \ a + c + d \leq b \ \lor \ b + c + d \leq a$

Czyli wykazać, że:

$a + b + c - d \leq 0 \ \lor \ a + b - c + d \leq 0 \ \lor \ a - b + c + d \leq 0 \ \lor \ -a + b + c + d \leq 0$

Wnioskując, z metody opisanej w tym temacie, chcielibyśmy zapisać „wersję początkową", w postaci iloczynu pewnych liczb, których iloczyn jest mniejszy bądź równy zero, tak, żeby wśród czynników, występował co najmniej jeden z powyższych wielomianów (lewa strona równania) i żeby musiał być ujemny lub równy zero.

Teraz musimy się jeszcze zastanowić, który wybrać. Jeżeli przerzucimy wszystko na lewą stronę nierówności w nierówności danej w zadaniu, to otrzymamy:

$(a + b)^2 - d(d- b - c) \leq 0$ *(*)*

Co sugeruje, nam, że nasz czynnik w naszej „wersji początkowej", z którego wynikałaby anty-hipoteza, powinien to być: (a+b+c-d), ponieważ, jak łatwo zauważyć przy każdym jednomianie, w których występuje niewiadoma „d", będzie „stał" znak minus. Teraz można już wydedukować, lub znaleźć metodą prób i błędów, że nasza „nierówność anty-hipotezowa", powinna być postaci

$(a + b + c - d)(a + d) \leq 0$

Wiemy, że z tej nierówności wynika anty-hipoteza, ponieważ skoro liczby a,d są dodatnie to liczba (a+b+c-d) musi być ujemna. Wymnażając nawiasy otrzymujemy:

$a^2 + ad + ab + bd + ac + cd - da – d^2 \leq 0$

$a(a + b + c) \leq d(d-b-c)$

Dotarliśmy do nierówności, podanej w zadaniu. Skąd wynika bezpośrednio, że anty-hipoteza jest prawdziwa, czyli że z odcinków, o długościach a,b,c,d nie da się zbudować czworokąta.

Co kończy rozwiązanie zadania.

6. Praktyczne zastosowanie metody „Deszyfracji Zadań Algebraicznych”.

W tym rozdziale skupimy się na najważniejszej rzeczy w procesie opanowywania metody „Deszyfracji Zadań Algebraicznych”, czyli na praktycznych zastosowaniach w zadaniach olimpijskich. Przedstawiłem tutaj kilka przykładów podstawowych zastosowań tej metody w zadaniach, w większości mojego własnego autorstwa. Zadania zostały opatrzone w pełne rozwiązaniami, tak abyś lepiej poczuł się w tym temacie i zrozumiał, jaki duży potencjał ma ta metoda. W tym dziale postanowiłem wprowadzić nowość w opisach rozwiązań i opisać cały tok rozumowania, oraz wszystkie wiążące się z nim pomysły. Mam nadzieję, że po tym rozdziale zrozumiesz tą metodę co najmniej tak dobrze jak ja, dzięki czemu będziemy mogli, wspólnie cieszyć się jej pięknem (:

Zadanie 1 (zawody II stopnia XIV OMJ)

Liczby rzeczywiste x oraz y spełniają nierówność $x^2 + x \le y$. Udowodnij, że $y^2 + y \ge x$.

Wiemy, co konkretnie trzeba udowodnić, więc możemy zastosować metodę „Deszyfracji Zadań Algebraicznych”. Na początek warto zauważyć, że mamy już podaną „wersję początkową” będącą „nierównością tezową” ($y^2 + y \ge x$.), co znacznie już upraszcza nam rozwiązywanie zadania. Skutkuje, to tym, że wiemy już jakich przekształceń możemy używać, (zgodnie z tym co przedstawiłem w „Uwadze” w dziale 3) oraz do jakiej postaci mamy dążyć (dwa pierwsze strzałki, w podpunkcie „a” w punkcie 4 w dziale 3). Zatem teraz, będziemy się starać przekształcić tą „nierównością tezową” do właśnie takiej postaci. A zatem:

$y^2 + y \ge x$

Zgodnie z dozwolonymi przekształceniami, wykorzystujemy nierówność $x^2 + x \le y$, otrzymując:

$y^2 + (x^2 + x) \ge x$

$y^2 + x^2 \ge 0$

Co kończy dowód (ponieważ dotarliśmy do nierówności, która zawsze jest spełniona, bo suma kwadratów dwóch liczb rzeczywistych nie może być ujemna).

Zadanie 2

Liczby rzeczywiste a,b,c spełniają równanie $a^2c + c^2a + b^2c = ab^2 + ac^2 + bc^2$. Udowodnij, że a=b v a=c v c=a.

Wiemy, co konkretnie trzeba udowodnić, więc możemy zastosować metodę „Deszyfracji Zadań Algebraicznych”. Tym razem nie mamy podanej „wersji początkowej”. Więc naszym zadaniem będzie właśnie znalezienie jej. Teraz, możemy zastosować technikę wyznaczania równoważnych wersji początkowych, by próbować znaleźć potrzebną nam „wersję początkową”. Pamiętaj, że kluczowa w tej metodzie jest własność, że co najmniej jeden czynnik, po lewej stronie równania jest równy zero, zawsze wtedy gdy po prawej stronie równania występuje liczba zero. Z każdego czynnika równego zero, będziemy chcieli, żeby wynikała w tym przypadku teza. Teraz, wspomagając się tezą podaną w zadaniu, już łatwo wpaść na „równanie tezowe”:

$(a-b)(b-c)(c-a)=0$

Teraz pozostało sprawdzić, czy jest ono równoważne z podanym równaniem w zadaniu lub czy jesteśmy w stanie uprościć go do równania, którego możemy już łatwo wykazać prawdziwość. Po wymnożeniu nawiasów, otrzymujemy:

$abc - a^2b - ac^2 + a^2c - b^2c + ab^2 + bc^2 – abc = 0$

Redukując wyrazy podobne i przenosząc na prawą stronę jednomiany ze znakiem minus, otrzymujemy równanie dane w zadaniu.

Co kończy dowód.

Zadanie 3

Dane są dodatnie liczby rzeczywiste a,b,c spełniające równanie $a^6 + b^6 + c^6 + 2a^2b^2c^2 = a^4(a^2+b^2) + b^4(c^2+a^2) + c^4(b^2+a^2)$. Sprawdź, czy zawsze odcinków o długościach a,b,c można zbudować trójkąt.

Mamy podaną hipotezę, oraz dane równanie, więc możemy zastosować metodę „Deszyfracji Zadań Algebraicznych”. Tym razem także nie mamy podanej „wersji początkowej”, więc będziemy musieli ją znaleźć. Oczywiście narzuca się wykorzystanie nierówności trójkąta, do wyznaczenia jej, ale pamiętaj, że jeżeli w treści zadania mamy podane pewne równanie, to chcemy także przedstawić „wersję początkową” w postaci równania, a nie w postaci nierówności. Teraz chcielibyśmy znaleźć jedną z czterech „wersji początkowych”, związanych z tą hipotezą (są 4, ponieważ 2 mogą być, gdy dowodzimy prawdziwość hipotezy i 2 mogą być, gdy dowodzimy, nie prawdziwość hipotezy). Warto zwrócić uwagę, na to jak powiązane jest równanie podane w zadaniu z trójkątami. Jak łatwo zauważyć występuje tam wiele potęg z wykładnikami równymi dwa. Czy coś Ci to sugeruje? Oczywiście chodzi o trójkąty prostokątne! Wiemy także, że jeżeli zachodzi równość $x^2+y^2=z^2$ (dla pewnych liczb dodatnich x,y,z), to z odcinków x,y,z zawsze możemy zbudować trójkąt i jest to trójkąt prostokątny. Sugeruje nam to, że powinniśmy dowodzić prawdziwość hipotezy. Wykorzystując tą własność, możemy spróbować skonstruować „równanie hipotezowe”. W tym przypadku także, będziemy chcieli szukać równoważnej „wersji początkowej”. W naszym przypadku chcielibyśmy wykorzystać trójkąty prostokątne, więc z każdego czynnika powinno wynikać jedno z równań: $a^2+b^2=c^2$, $c^2+b^2=a^2$, $a^2+c^2=b^2$. Co już mówi nam, że „równanie hipotezowe”, powinno mieć następującą postać: $(c^2+b^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$

Teraz pozostało, tylko dojść do równania podanego w zadaniu lub innego na pewno prawdziwego równania. Wymnażając nawiasy, otrzymujemy: $c^2a^4+c^2a^2b^2-c^4a^2+c^4a^2+c^4b-c^6-a^2b^2c^2-c^2b^4+c^4b^2+b^2a^4+b^4a^2-b^2a^2c^2+b^2c^2a^2+b^4c^2-c^4b^2-$ $-a^2b^4 - b^6 + c^2b^4 - a^6 - a^4b^2 + c^2a^4 - a^4c^2 - a^2b^2c^2 + a^2c^4 + a^4b^2 + a^2b^4 - a^2b^2c^2 = 0$
Redukując wyrazy podobne i przenosząc jednomiany ze znakiem minus na prawą stronę równania, otrzymujemy:

$a^6 + b^6 + c^6 + 2a^2b^2c^2 = a^4a^2 + a^4b^2 + b^4c^2+b^4a^2 + c^4b^2+ c^4a^2$

Co dowodzi prawdziwości hipotezy (ponieważ to równanie jest równoważne równaniu podanemu w zadaniu).

Zadanie 4

Dane są dodatnie liczby rzeczywiste a,b,c spełniające równanie $a^3 + b^3 + c^3 + 2abc = c^2 (a + b) + a^2 (c + b) + b^2(a + c)$. Udowodnij, że z docinków o długościach a,b,c nie można zbudować trójkąta.

Wiemy, co konkretnie trzeba udowodnić, więc możemy zastosować metodę „Deszyfracji Zadań Algebraicznych". Teraz powinniśmy szukać „wersji początkowej". Jak już pisałem nie chcemy nierówności, jeżeli mamy podane równanie w zadaniu, więc także i tu nierówność trójkąta na nic się nie zda. W tym przypadku powinniśmy znaleźć równanie, z którego wynikałaby teza, czyli, że suma każdych dwóch odcinków jest mniejsza bądź równa trzeciemu odcinkowi, lub równanie, które wynikałoby z antytezy, czyli, że suma każdych dwóch odcinków jest większa niż trzeci odcinek. Jak łatwo zauważyć, jeżeli $a+b=c \vee a+c=b \vee b+c=a$ to teza jest spełniona, co sugeruje, że powinniśmy spróbować skonstruować „równanie tezowe". Stosując metodę opisaną w powyższych zadaniach (zapisanie warunków w postaci iloczynu równego zero), łatwo już wpaść, że powyższą własność, można zapisać w postaci:

$$(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) = 0$$

z którego oczywiście wynika teza, bo $a+b=c \vee a+c=b \vee b+c=a$ (ponieważ jeden czynnik w tym iloczynie, musi być równy zero).

Wymnażając czynniki po lewej stronie równania i redukując wyrazy podobne otrzymujemy:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 2abc - c^2a - c^2b - a^2c - a^2b - b^2a - b^2c = 0$$

Przenosząc jednomiany ze znakiem minus, na prawą stronę równania, otrzymujemy:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 2abc = c^2a + c^2b + a^2c + a^2b + b^2a + b^2c$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + 2abc = c^2 (a + b) + a^2 (c + b) + b^2(a + c)$$

Co kończy dowód (ponieważ, doszliśmy do równania podanego w treści zadania, wychodząc od „równania tezowego", wykonując tylko dozwolone przekształcenia).

Zadanie 5

Dane są niezerowe liczby rzeczywiste a,b,c,d spełniające równanie:
$a^2(a-c-b-d) = d(bc-ac-ab)$.
Sprawdź, czy liczba „a", zawsze jest różna od każdej z pośród liczb b,c,d.

Mamy podaną hipotezę, oraz dane równanie, więc możemy zastosować metodę „Deszyfracji Zadań Algebraicznych". Teraz, tak jak w dwóch ostatnich przykładach, musimy znaleźć „wersję początkową". Na pierwszy rzut oka już widać, że to zadanie jest podobne do zadania 2, które już omawialiśmy, ponieważ tutaj także chodzi o pewne równości/nierówności, między niewiadomymi danymi w zadaniu. Sugeruje nam, to że może być nie trudno znaleźć „równanie anty-hipotezowe", ponieważ chcielibyśmy zapisać podobne równanie co w zadaniu 2, a teza tam była odwrotna, bo była związana z udowodnieniem pewnych równości. Wiemy, że anty-hipoteza, ma postać: a=b v a=c v a=d. Zapisując w postaci równania, dostajemy:

$(a-b)(a-c)(a-d) = 0$

Zastosowaliśmy metodę iloczynu równego zero, więc wyznaczyliśmy równoważną „wersję początkową". W zadaniu mamy podaną hipotezę, więc możemy skorzystać z własności równoważnych „wersji początkowych", w celu sprawdzenia, czy nasza anty-hipoteza, jest prawdziwa czy fałszywa.

$a^3 - a^2d - a^2c + acd - a^2b + abd + bca - bcd = 0$

$a^2(a-c-b-d) = d(bc - ac - ab) - abc$

Teraz możemy odjąć obustronnie równanie dane w zadaniu, otrzymując:

$abc = 0$

Sprzeczność (skoro liczby a,b,c są różne od zera, to ich iloczyn nie może być równy zeru).

Zatem doszliśmy do nieprawdziwości anty-hipotezy, stosując tylko dozwolone przekształcenia. Zatem nasza hipoteza, musi być prawdziwa.

Co kończy dowód.

7. Olimpiada algebraiczna

W tym rozdziale postanowiłem przedstawić 5 zadań, w większości mojego autorstwa, przeznaczonych do samodzielnego rozwiązania, tak abyś mógł sprawdzić zdobytą wiedzę. Nie bez, przypadku zamieściłem tutaj 5 zadań, chciałem bowiem, abyś poczuł się, jak na OMJ. Postaraj się rozwiązać tyle zdań, ile jesteś w stanie, w czasie trzech godzin. Jeśli jednak, nie uda Ci się rozwiązać jakiegoś zadnia, to zajrzyj do podpowiedzi, które zamieściłem w następnym dziale, lub do działu 9, gdzie przedstawiłem skrótowe rozwiązania.

Życzę powodzenia (;

Zadanie 1

Liczby całkowite a,b,k spełniają równanie $a^{k+1}+b^{k+1}=ab(1+a^{k-1}b^{k-1})$. *Udowodnij, że co najmniej jedna z liczb a i b jest k-tą potęgą liczby całkowitej.*

Zadanie 2

Dane są dodatnie liczby całkowite a,b spełniające równanie $a^2 = b(a + ab - b^2)$. *Wykaż, że liczba a lub liczba ab jest kwadratem liczby całkowitej.*

Zadanie 3

Dane są niezerowe liczby a, b, c spełniające równanie:
$-a^2 = ac + ab + bc$
Udowodnij, że jeśli $|a| \geq |b| \geq |c|$, *to z odcinków o długościach* $|a|,|b|,|c|$ *można zbudować trójkąt.*

Zadanie 4

Dany jest czworokąt ABCD, w którym $|AB|= a$, $|BC|=b$, $|CD|=c$, $|DA|=d$. *Liczby a,b,c,d spełniają nierówność:*
$(b+d)(b+d-2a) + (c+a)(c-a) < 0$

Udowodnij, że w czworokąt ABCD nie da się wpisać okręgu.

Zadanie 5

Sprawdź, czy istnieją niezerowe, wymierne liczby a,b,c spełniające równanie: $a^2b^2 = 2c^2(a^2+b^2-2c^2)$.

8. Podpowiedzi do zadań

Zadanie 1

Zauważ, że jeżeli zachodzi równość: $a - b^k = 0$, to teza jest spełniona.

Zadanie 2

Zauważ, że jeżeli zachodzi równość: $a - b^2 = 0$, to teza jest spełniona.

Zadanie 3

Zauważ, że jeśli $|a| = |b| \vee |a| = |c|$, to z odcinków o długościach $|a|$, $|b|$, $|c|$ można zbudować trójkąt.

Zadanie 4

Spróbuj wykorzystać metodę opisaną w dziale 5. Pamiętaj, że wpisać okrąg w czworokąt, da się wtedy i tylko wtedy, gdy $a+c=b+d$.

Zadanie 5

Spróbuj znaleźć „równanie anty-hipotezowe”, wykorzystując pierwiastek z dwóch.

9. Skrótowe rozwiązania

W tym rozdziale przedstawiam skrótowe rozwiązania zadań z działu 7. Postanowiłem, że w przedstawionych tutaj rozwiązaniach, zamieszczę tylko niezbędne informacje pozwalające zrozumieć rozwiązanie. Podjąłem taką decyzję, ponieważ myślę, że w dziale 6 zostało wszystko wystarczająco dokładnie opisane, tak że stosowanie tego samego sposobu prezentowania rozwiązań, byłoby niepotrzebne i mogłoby zniechęcić czytelnika.

Zadanie 1

Naszą „własnością początkową" jest „równanie tezowe", postaci:
$(a - b^k)(b - a^k) = 0$.
Wymnażając nawiasy, otrzymujemy:

$ab - a^{k+1} - b^{k+1} + b^k a^k = 0$

$a^{k+1}+b^{k+1}=ab(1+a^{k-1}b^{k-1})$

Dotarliśmy do równania podanego w zadaniu – co kończy dowód.

Zadanie 2

Naszą „własnością początkową" jest „równanie tezowe", postaci:
$(a - b^2)(ab – b^2) = 0$.
Wymnażając nawiasy, otrzymujemy:

$a^2b – ab^2 – ab^3 + b^4 = 0$

$a^2 – ab – ab^2 + b^3 = 0$

$a^2 = b(a + ab – b^2)$

Dotarliśmy do równania podanego w zadaniu – co kończy dowód.

Zadanie 3

Naszą „własnością początkową" jest „równanie tezowe", postaci:
$(a + b)(a + c) = 0$.
Wymnażając nawiasy, otrzymujemy:

$a^2 + ac + ab + bc = 0$

$-a^2 = ac + ab + bc$

Dotarliśmy do równania podanego w zadaniu – co kończy dowód.

Zadanie 4

Naszą „własnością początkową” jest „nierówność tezowa”, postaci:

$(a+c-b-d)(a-b-c-d) < 0$

Ponieważ, musi zachodzić $a+c-b-d > 0$ (z czego wynika, już teza, bo wpisać okrąg w czworokąt, da się wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi równość $a+c=b+d$), bo tylko jeden czynnik może być ujemny, a jest już nim „a-b-c-d” (wynika to z nierówności długości boków w czworokącie).

$a^2-ab-ac-ad+ac-bc-c^2-cd-ba+b^2+bc+bd-ad+bd+cd+d^2 < 0$

$a^2+ b^2 - c^2 + d^2 - 2ad - 2ab + 2bd < 0$

$(b+d)(b+d-2a) + (c+a)(c-a) < 0$

Dotarliśmy do równania podanego w zadaniu – co kończy dowód.

Zadanie 5

Naszą „własnością początkową” jest „równanie anty-hipotezowe”, postaci:

$(a-\sqrt{2}c)(b-\sqrt{2}c)=0$ (jeśli c, jest wymierne, to liczba b lub a musi być niewymierna, bo któraś z nich musi być równa $\sqrt{2}c$ (wykorzystujemy tu fakt, że iloczyn wymiernej i niewymiernej daje zawsze liczbę niewymierną, oczywiście jeśli nie mnożymy przez liczbę zero)

Gdzie $\sqrt{2}c$, oznacza pierwiastek z dwóch pomnożony przez c.

$ab - \sqrt{2}ca - \sqrt{2}cb + 2c^2=0$

$ab + 2c^2= \sqrt{2}c(a + b)$

Podnosząc do kwadratu, otrzymujemy:

$a^2b^2 +4c^2ab + 4c^4 = 2c^2 (a^2 + 2ab + b^2)$

$a^2b^2 + 4c^4 = 2c^2a^2 + 2c^2b^2$

$a^2b^2 = 2c^2 (a^2+b^2-2c^2)$

Dotarliśmy do równania podanego w zadaniu – co dowodzi prawdziwości „anty-hipotezy”, zatem nie istnieją wymierne liczby a,b,c spełniające warunki zadania.

10. Źródła

- 12 Skrypt Internetowego kółka Olimpiady Matematycznej Juniorów 2019/2020
- Zadania z II stopnia XIV Olimpiady Matematycznej Juniorów
- Okładka została zaprojektowana przy użyciu zasobów z portalu freepik.com