Złoty, srebrny i brązowy

Ewa Lenartowicz

Zabierzów 2021

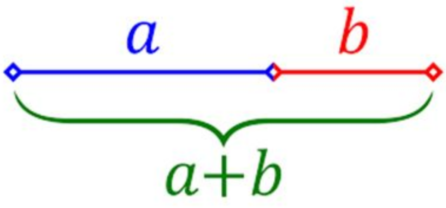
WSTĘP

Mam na imię Ewa. Jestem uczennicą klasy 5 Szkoły Podstawowej w Zabierzowie. Interesuję się sztuką, muzyką i przyrodą. Kiedy nauczyciel matematyki poprosił nas o przedstawienie ciekawego dla nas zagadnienia matematycznego wiedziałam co przedstawię. Od dawna znaną boską proporcję, która łączy moje zainteresowania. Moim zadaniem było jednak znalezienie nowych dla mnie informacji. To było wyzwanie. W swojej pracy przedstawiam najbardziej popularną złotą proporcję ale również te mniej znane nazwane srebrną i brązową. Chciałam szczególnie podziękować za otrzymane informacje pani prof. dr hab. Urszuli Foryś kierownikowi Zakładu Biomatematyki i Teorii Gier Instytutu Matematyki Stosowanej i Mechaniki Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki na Uniwersytecie Warszawskim.

Może nie wszystko jest dla mnie jasne, mama mówi, że zrozumiem więcej jak będę w starszej klasie. Starałam się zrozumieć podstawy. To czego się dowiedziałam mnie oczarowało. Przeczytajcie sami :)

ZŁOTY PODZIAŁ

Jeżeli podzielmy odcinek na dwie części tak, by stosunek długości dłuższej z nich do krótszej był taki sam, jak całego odcinka do części dłuższej to mówimy, że podzielono go w złotej proporcji.



$$\varphi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Jeżeli do równania $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ za b podstawimy długość odcinka jednostkowego to otrzymamy równanie kwadratowe

$$a^2 = a + 1$$
$$a^2 - a - 1 = 0$$

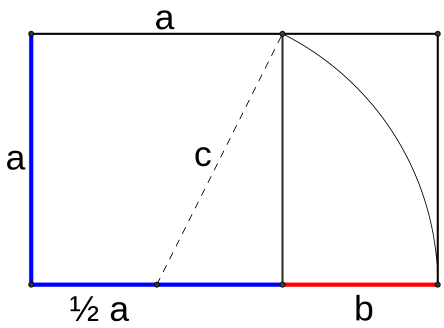
którego dodatnim rozwiązaniem jest tak zwana złota liczba $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
(Przy rozwiązaniu tego równaniu pomagał mi nauczyciel matematyki).
Jest ona liczbą niewymierną czyli o nieskończonym i nieokresowym rozwinięciu dziesiętnym dlatego jej przybliżenie to 1,618.

Po raz pierwszy w znanych nam źródłach pisanych pojęcie złotego podziału pojawia się w „Elementach” Euklidesa z Aleksandrii.

Matematyk Mark Barr zaproponował użycie pierwszej litery imienia greckiego rzeźbiarza Fidiasza, *phi*, do oznaczenia złotej liczby (φ).

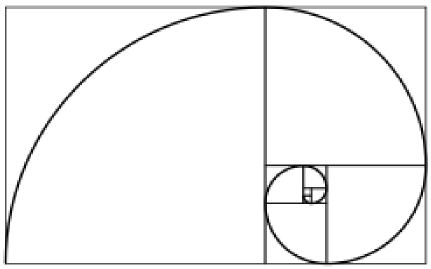
Fidiasz był starożytnym greckim rzeźbiarzem, który kierował pracami rzeźbiarskimi na ateńskim Akropolu. Później działał w Olimpii. Jedynym oryginalnym dziełem jego autorstwa, jakie zachowało się do naszych czasów, jest Partenon wraz z częścią rzeźb architektonicznych. Stworzył również figury Partenonu, które wydają się zachowywać złote proporcje.

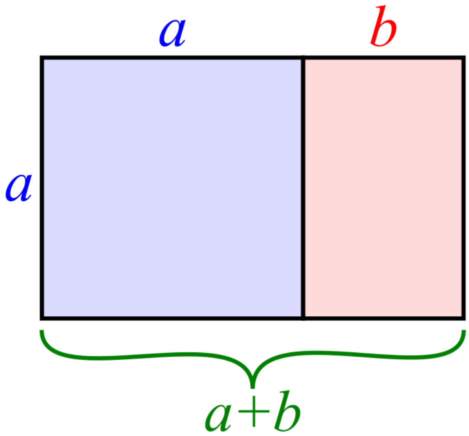
Zbudujmy teraz złoty prostokąt według poniższej konstrukcji.

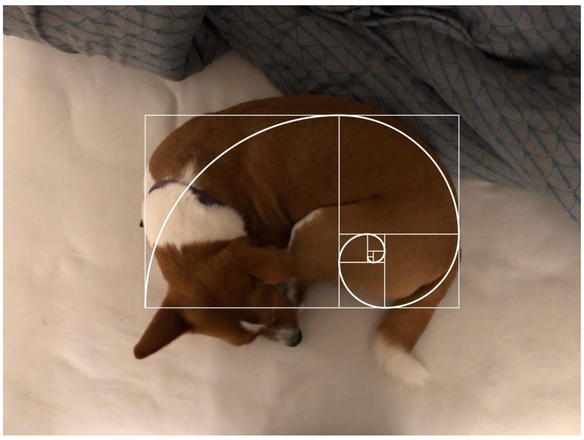


Rysujemy kwadrat. Z połowy jego podstawy zakreślamy łuk o promieniu opartym na jego naprzeciwległym wierzchołku. Z miejsca przecięcia łuku z przedłużeniem odcinka podstawy budujemy prostokąt.

W złotym prostokącie możemy narysować ćwiartki okręgów w taki sposób aby powstała złota spirala.







Mój pies Drab też jest złoty

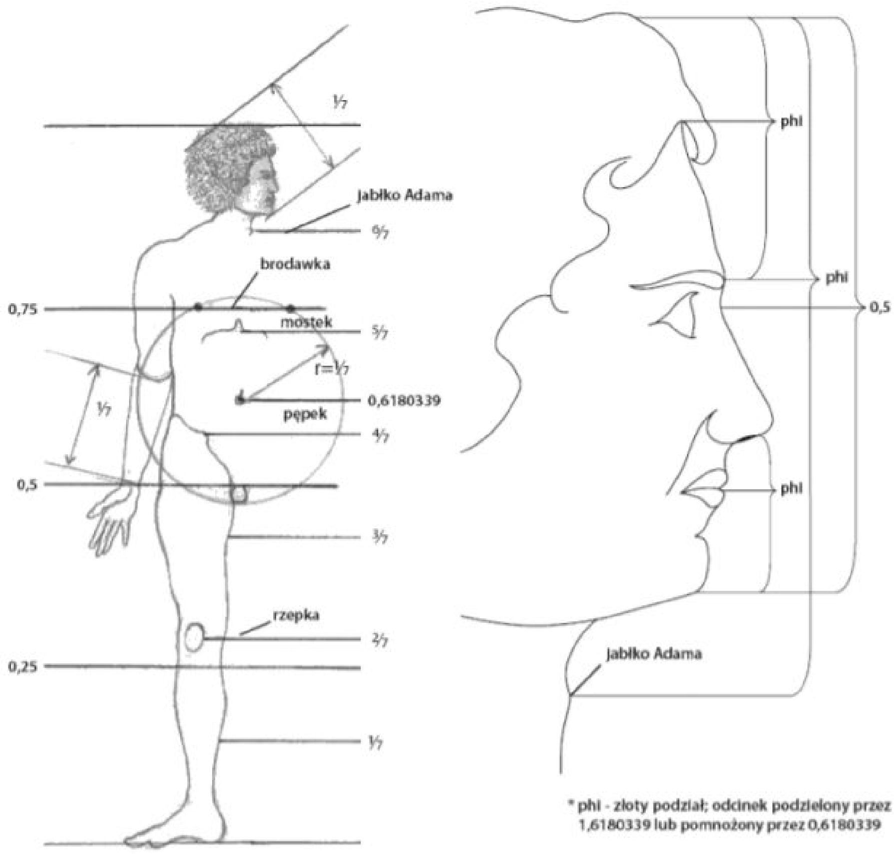
Złoty podział zwany jest częściej w sztuce boską proporcją. Ten miły podział dla ludzkiego oka jest synonimem piękna i harmonii. Oto kilka wyszukanych przeze mnie przykładów występowania złotej proporcji:

Anatomia człowieka:

W ludzkim ciele, zarówno cała postać, jak i wiele poszczególnych części podlega prawom złotego cięcia np.:

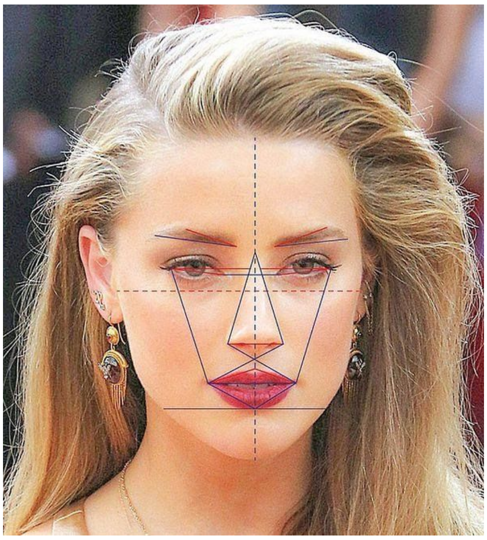
- odległość od biodra do podłogi / odległość od kolana do podłogi
- odległość od czubka głowy do pępka / odległość od ramienia do pępka
- odległość od łokcia do nadgarstka / odległość od nadgarstka do czubka palców
- odległość od ramienia do łokcia / odległość od pachy do łokcia

Podobne zależności znajdziemy mierząc palce u nóg, stawy dłoni, odległości między kręgami.

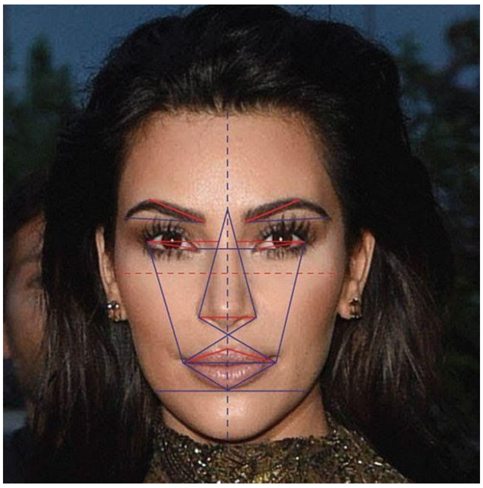


Złota proporcja również przejawia się w pięknie ludzkiej twarzy.
Londyński chirurg zmierzył twarze gwiazd, biorąc pod uwagę układ oczu, brwi, nos, usta czy brodę.

Najbardziej zbliżony do ideału wynik otrzymała twarz Amber Heard, która miała 91,85%.



Drugie miejsce na liście zajmuje Kim Kardashian z wynikiem 91,39%.



Muzyka:

Współcześni muzycy również wykorzystują złotą proporcję, np.:

•długość pomiędzy dźwiękami piosenki “Woman no cry”- Bob Marley lub “Let it be”- The beatles jest równa 1: 1,618.

•Jan Sebastian Bach używał złotego podziału. Złote cięcie pojawia się tam nie tylko w budowie frazy ale również w harmonice i przebiegu linii melodycznych poszczególnych instrumentów.

Architektura i sztuka:

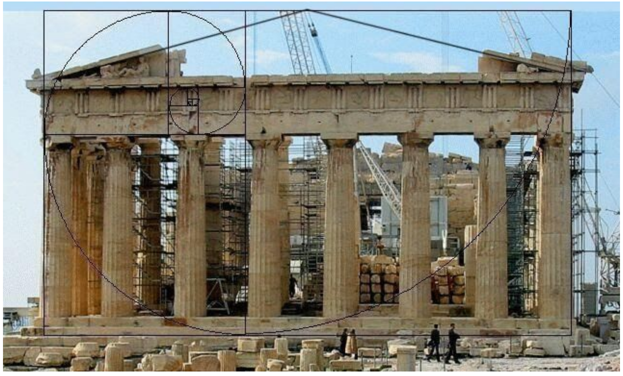
Leonardo Da Vinci była zafascynowany liczbą ϕ. Umieszczał ją praktycznie w każdym obrazie. Szczególnym tego przykładem jest bladożółty rysunek z nagim mężczyzną “Człowiek witruwiański”.

Przykłady:

Obraz “Mona Lisa” (okładka mojej pracy).

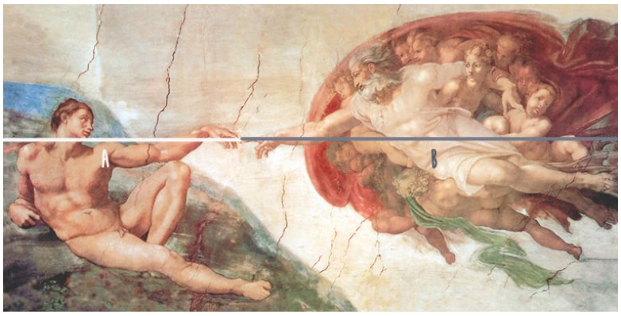
Obraz “Ostatnia wieczerza”.

Panteon w Grecji był budowany według złotej spirali.



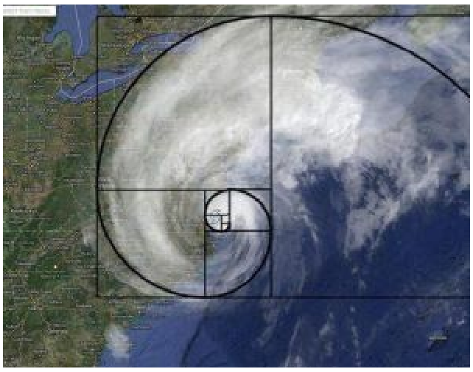
Obraz “Gwiaździsta noc” Van Gogha

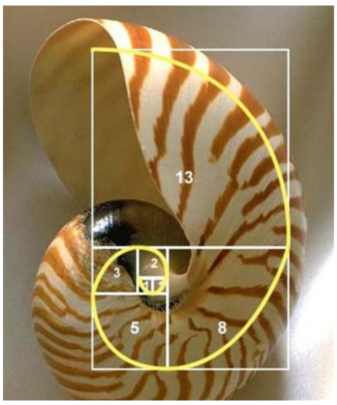
Boską proporcję użył w swoim fresku „Stworzenie Adama” Michał Anioł.



Przyroda:

Natura również uwielbia proporcje. Znajdziemy ją w galaktykach, u zwierząt i roślin oraz nawet huragan wiruje według złotej proporcji. Rogi zwierząt formują się według złotej proporcji.





Innym przykładem występowania złotej liczby w przyrodzie są muszle zwierząt. Przekrój jego muszli (wypełnionej głównie powietrzem) ukazuje, iż pasuje ona idealnie do złotego prostokąta, a jej łuki mieszczę się po ćwierć okręgu w każdym ze złotych kwadratów.

Złote proporcje są bardzo dobrze widoczne w świecie flory.

Zaobserwujemy ją też we wzroście roślin. Rośliny takie jak np. słonecznik formują swoje liście po spirali tak że każdy liść jest obrócony w stosunku do kolejnego o kąt 137,5 stopnia czyli złoty kąt. Dzięki temu nie przysłaniają się wzajemnie.Pastorał paproci również jest złoty.

SREBRNY I BRĄZOWY PODZIAŁ

Srebrny podział jest daleko mniej popularny, może dlatego, że nie był znany w starożytności. Nie udało mi się ustalić kto pierwszy użył takiej nazwy.
Otóż srebrną liczbą jest $1 + \sqrt{2}$ czyli w przybliżeniu 2,414. Na pewno pytacie dlaczego ta liczba jest srebrną liczbą? Przypomnijmy sobie równanie, którego rozwiązaniem była złota liczba

$$a^2 - a - 1 = 0$$

Z przesłanych informacji od pani U.Foryś moja pani od matematyki wyjaśniła mi, że istnieje ścisły związek pomiędzy proporcjami na podstawie równań, z których się je oblicza.
Otóż złota liczba jest rozwiązaniem równania postaci: $x = 1 + \frac{1}{x}$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$

srebrna liczba jest rozwiązaniem równania postaci: $x = 2 + \frac{1}{x}$

$$x^2 - 2 \cdot x - 1 = 0$$

$$x = 1 + \sqrt{2} \approx 2,414$$

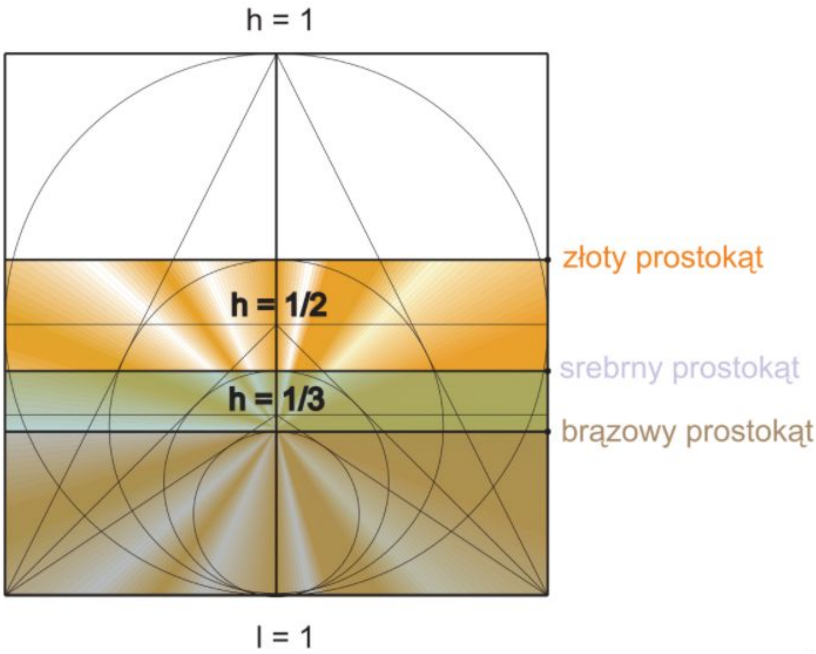
brązowa liczba jest rozwiązaniem równania postaci: $x = 3 + \frac{1}{x}$

$$x^2 - 3 \cdot x - 1 = 0$$

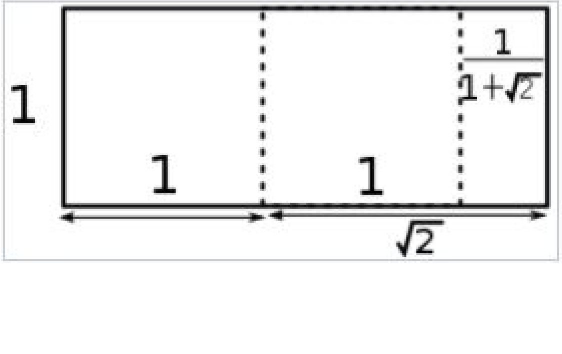
$$x = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 3,303$$

Ktoś by mógł powiedzieć, że nic specjalnego (tak jak ja na początku z moją panią od matematyki). Okazało się, że kto szuka ten znajdzie. Polak Janusz Kapusta, architekt i twórca ciekawej bryły K-dron na stałe mieszkający w USA odkrył geometryczny związek tych trzech proporcji. Kontynuacja tej konstrukcji dała ciekawy rezultat w postaci nowego ciągu podziałów odcinka, w którym podział złoty i srebrny są podziałami początkowymi a otrzymane w ten sposób prostokąty mają podobne własności jak złoty prostokąt.

Zacznijmy od kwadratu jednostkowego, w który wpisujemy trójkąt równoramienny o podstawie i wysokości równej bokowi kwadratu (rysunek poniżej pochodzi z prezentacji pani U.Foryś). W ten trójkąt wpisujemy koło. Prosta styczna i równoległa do podstawy trójkąta wyznacza złoty prostokąt. Jeżeli teraz zbudujemy trójkąt równoramienny o podstawie równej jeden a wysokości równej $\frac{1}{2}$ a następnie wpiszemy w ten trójkąt koło to prosta styczna i równoległa do podstawy trójkąta wyznaczy nam srebrny prostokąt. Jeżeli powtórzymy konstrukcję dla trójkąta o wysokości $\frac{1}{3}$ otrzymamy brązowy prostokąt. I tak dalej kolejne proporcje.



I to jest niesamowita informacja.
Udało mi się znaleźć ciekawe zastosowanie srebrnej proporcji, w której stosunek mniejszego boku do większego ma się jak 0,4142 : 1
•w kinach jest to proporcja ekranu panoramicznego (ekran klasyczny jest w złotej proporcji)



ZAKOŃCZENIE

Złoty podział fascynował wielu intelektualistów. Można powiedzieć, że inspirował myślicieli wszystkich dziedzin.

Ciekawostką jest, że w Polsce złota proporcja nie jest tak często wykorzystywana. Na wydziale Architektury Akademii Krakowskiej były prowadzone badania nad występowaniem złotej proporcji w architekturze polskiej. W swojej pracy badawczej Beata M.Vogt dopatrzyła się występowania złotej proporcji w polskiej architekturze w około 8 % losowo wybranych obiektach. Często występowała ze srebrną proporcją, która okazała się dominująca, bez powiązania z konkretnym stylem, epoką czy modą.

Jestem zadowolona ze swojego projektu. Na początku bardzo się obawiałam tego wyzwania i nie podjęłabym się gdyby nie mój nauczyciel matematyki. Dowiedziałam się wielu nowych informacji z matematyki. To niesamowite, że korespondowałam z Panią Profesor w Warszawy :)
W przyszłości może napiszę do Pana Kapusty ;)

ŹRÓDŁA

1. zdjęcie Mona Lisy: https://images.app.goo.gl/eqDEvgjbFnXT7Vse9
2. zdjęcie złotej spirali: https://www.google.pl/url?sa=i&url=https%3A%2F%2Fbigosmatematyczny.pl%2Fzlota-proporcja%2F&psig=AOvVaw184Yee33Gl60HsTE5MffSs&ust=1610993857136000&source=images&cd=vfe&ved=0CAkQjhxqFwoTCIiDqfTJo-4CFQAAAAAdAAAAABAL
3. film na YouTube pod tytułem “Tajemniczy ciąg Fibonacciego. Złota liczba. Boska proporcja”, autor: Mirosław Zelent. https://youtu.be/wb7kPaM8cfg
4. Rysunek człowieka: https://images.app.goo.gl/6MfQadqsAj2oDyqNA
5. Zdjęcie “gwiaździsta noc”: https://images.app.goo.gl/JwCzBUzwDbsTEJfR9
6. http://www.pg17.idl.pl/projekty/Przyroda/LiczbaFi.pdf
7. Zdjęcia najpiękniejszych kobiet świata: https://images.app.goo.gl/c7Z4ZgrAQSqrXWao7
8. http://lambda.ckziu.jaworzno.pl/2019/03/28/zloty-podzial-czym-jest-i-gdzie-go-znajdziemy/
9. https://pl.wikipedia.org/wiki/Srebrny_podzia%C5%82
10. http://www.katedra.uksw.edu.pl/posiedzenia/pos21.htm
11. Prezentacja Urszuli Foryś “Projekt matematyka”