

Katolickie Liceum Ogólnokształcące im. Jana Pawła II w Skawinie, ul. Ks.
Troski 17a, 32 – 050 Skawina, tel. 012 276 32 15, e – mail. zks@zks.nq.pl

W rytmie matematyki

Matematyczne struktury w muzyce

Autor: Michał Janek

Opiekun merytoryczny: mgr Maria Gałuszka

2021

Spis treści:

1. Interwały i dźwięki w ujęciu matematycznym – działania w zbiorze liczb niewymiernych
2. Geometria w muzyce
 - 2.1 Translacja
 - 2.2 Symetria osiowa
 - 2.3 Podobieństwo
3. Rytm, czyli działania na ułamkach
4. Kombinatoryka dźwięków
5. Ciąg Fibonacciego i „złoty podział”
6. Muzyczne łamigłówki i kryptogramy

*„Muzyka to przyjemność, jakiej dusza ludzka doświadcza przez liczenie,
Nie zdając sobie sprawy, że ma do czynienia z liczeniem.”*

Gottfried Wilhelm von Leibniz

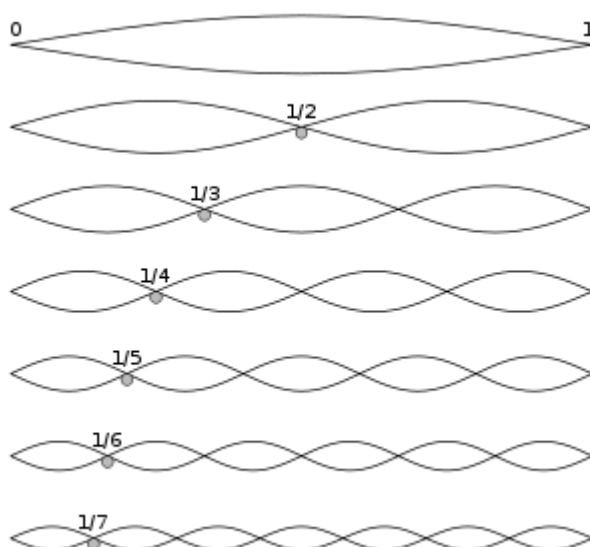
Wstęp

W tej pracy postanowiłem zająć się odpowiedzią na pytanie, które stawiano od najwcześniejszych czasów istnienia cywilizacji: ile wspólnego mają matematyka i muzyka? Niezwykle interesuje mnie matematyka, a jednocześnie jestem pianistą, więc wielokrotnie miałem okazję dostrzec cechy wspólne matematyki i muzyki. Od dawna temat ten jest mi bliski, co sprawiło, że krok po kroku poznawałem tajniki jednej i drugiej przestrzeni. Z czasem moja wiedza i umiejętności pozwoliły mi zgłębić te dwie dziedziny na tyle, iż nabrałem przekonania, wręcz pewności, że muzyka jest zbudowana na matematyce.

Jak powszechnie wiadomo matematycy są takimi naukowcami, którzy wszystkie aspekty świata tłumaczą i uzasadniają używając liczb, tabel, wykresów funkcji czy też różnorodnych tablic. Wykazują reguły rządzące wieloma procesami, poszukują rozwiązań problemów w różnych aspektach życia. Matematyka to nauka, która daje odpowiedź na wiele nurtujących nas pytań. Również muzyka wzbudziła duże zainteresowanie matematyków już od najwcześniejszych epok. Odkryli oni niezwykle i pasjonujący związek tych dwóch dziedzin, którym w tej pracy chcę się zająć, aby inspirować do dostrzegania tej fascynującej relacji. Co w takim razie łączy na pierwszy rzut oka dwie odmienne rzeczywistości?

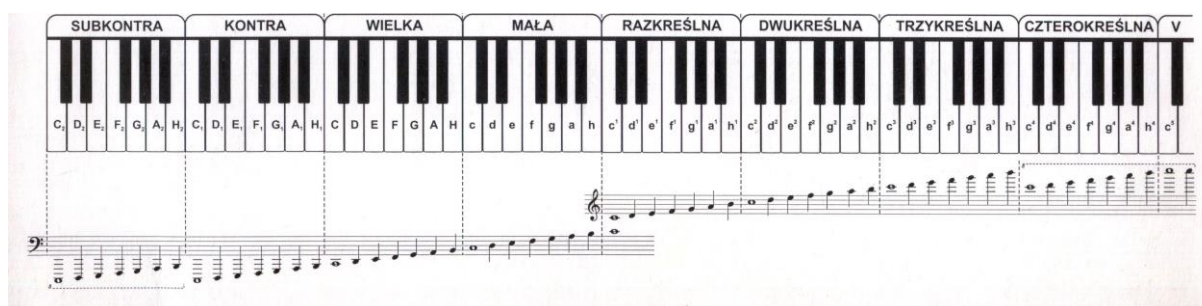
1. Interwały i dźwięki w ujęciu matematycznym – działania w zbiorze liczb niewymiernych

Już Pitagoras i jemu współcześni analizowali odległości między dźwiękami, czyli interwały odkrywając tzw. szereg alikwotów stanowiący podstawę systemu muzycznego. Mówiąc o alikwotach, mamy na myśli części składowe dźwięku muzycznego mające przebieg sinusoidalny, o częstotliwości $n = fk$, gdzie f jest częstotliwością tonu podstawowego, natomiast k jest liczbą naturalną większą od 1¹



Na przestrzeni lat procesami matematycznymi w muzyce zajmował się nie tylko Pitagoras, ale też Arystoteles, Ptolemeusz, Leonardo da Vinci, Galileusz, czy Leonhard Euler.

Obecnie w muzyce europejskiej stosuje się tzw. system równomiernie temperowany, który dzieli oktawę na dwanaście równych części (półtonów), co najlepiej obrazuje klawiatura fortepianu. Pomiędzy kolejnymi klawiszami jest taka sama odległość, przy czym co 12 daje nam oktawę.



Dzięki tej wiedzy możemy matematycznie wyznaczyć odległość półtonu, dzieląc oktawę na 12 równych części poprzez równanie:

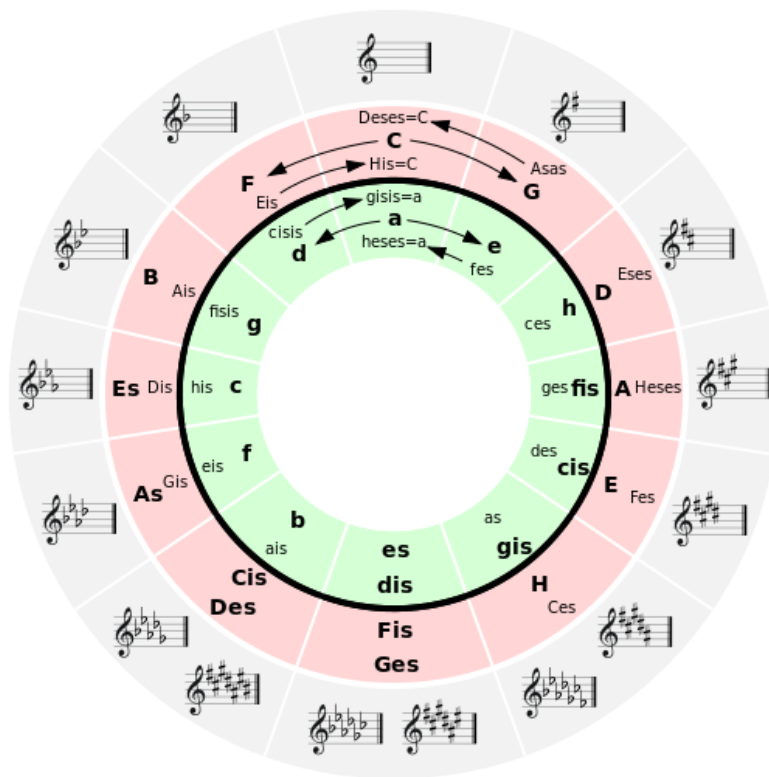
¹ <https://magazyngitarzysta.pl/warsztat/porady/11-alikwoty-harmoniczne-flazolety>

$$x^{12} = 2$$

$$x = \sqrt[12]{2} \approx 1,059$$

Zatem inspirowani w ten sposób spróbujmy przyjrzeć się rozwiązaniu matematyczno – muzycznego problemu.²

Jak już zasygnalizowałem, system równomiernie temperowany polega na podziale oktawy na dwanaście równych półtonów, a między klawiszami jest taka sama odległość, przy czym co 12 klawisz daje interwał o nazwie „oktawa”. W tym wszystkim interesujące jest to, że poruszając się od dźwięku C o kwintę do góry 12 razy znowu otrzymamy dźwięk C, ale położony siedem oktav wyżej. Taką zależność muzycy nazywają „kołem kwintowym”. Pomaga ono wyznaczyć ilość znaków przykluczowych dla konkretnej tonacji.



Jeśli jednak zastosujemy się do obliczeń Pitagorasa, który kwintę określił jako stosunek $\frac{3}{2}$ i podniesiemy tę wartość do potęgi 12 (tyle kwint potrzebujemy), to otrzymamy liczbę ok. 129,746. A przecież spodziewaliśmy się otrzymać siódmą potęgę dwójki, czyli interwału oktawy, dokładnie = 128. Jeśli podzielimy przez siebie otrzymane wyniki, to uzyskamy wielkość ok. 1,014, co równa się w przybliżeniu ćwierci tonu.³

Interwał to odległość między dwoma dźwiękami, czyli różnica ich wysokości. Poszczególne interwały mają swoje nazwy. Oto 12 najmniejszych (dla uproszczenia

² Karolina Kniaziuk - Jednostajne transformacje triadyczne

³ <http://meakultura.pl/arttykul/matematyka-muzyki-muzyka-matematyki-873>

zakładamy, że wszystkie jako niższy dźwięk mają c, choć oczywiście wszystkie te interwały mogą się "zaczynać" od dowolnych dźwięków).⁴

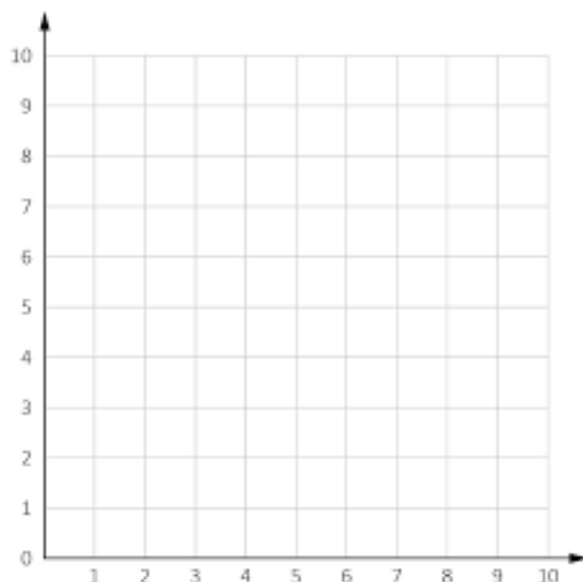
dźwięki	nazwa interwału
c - des	sekunda mała
c - d	sekunda wielka
c - es	tercja mała
c - e	tercja wielka
c - f	kwarta
c - fis	tryton
c - g	kwinta
c - as	seksta mała
c - a	seksta wielka
c - b	septyma mała
c - h	septyma wielka
c - c ¹	oktawa

Analizując powyższe fakty, możemy stwierdzić, że matematyka jest nieodzowna w rozumieniu zagadnień teoretycznych muzyki, co świadczy o tym, że dziedziny te są ze sobą ściśle powiązane.

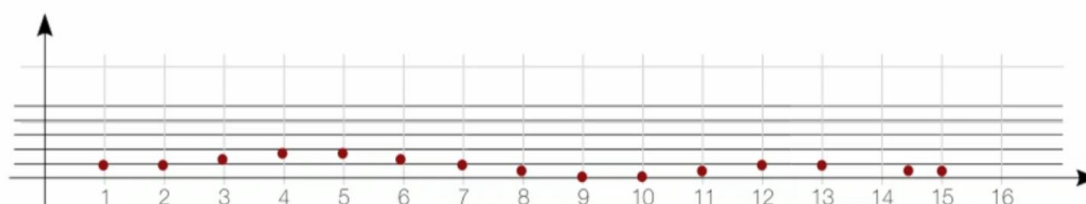
⁴ <http://www.matematyka.wroc.pl/w-muzyce/dlaczego-nie-da-sie-nastroic-pianina>

2. Geometria w muzyce

Matematycy opisują punkty i zbiory punktów, czyli figury geometryczne na płaszczyźnie bardzo często na tzw. kartezjańskim układzie współrzędnych. Każdy punkt w takim układzie ma dwie współrzędne. Możemy powiedzieć, że punkty opisujemy przez parę liczb. Pierwsza liczba jest współrzędną x , a druga y .



Jaki zatem związek ma matematyczny układ współrzędnych z zapisem nutowym? Zapis nutowy to nieco zmodyfikowany i udoskonalony układ zwany „pięciolinia”, na którym każda nuta ma swoje współrzędne. (Spostrzegawczych informuję, że na poniższych rysunkach nie jest przedstawiona „sześciolinia”, ponieważ prosta, która znajduje się najniżej jest osią x układu współrzędnych).



Nuty zapisuje się na liniach i na polach, co - analizując powyższy układ współrzędnych - wygląda następująco.



Im wyższy dźwięk, tym wyżej jest zapisany, czyli na osi rzędnych mamy wysokość dźwięku, natomiast na osi odciętych przebieg melodii, uporządkowanie nut w czasie, metrum, które wyznaczają kreski taktowe. Muzykowi do zagrania melodii potrzebne są jeszcze wartości rytmiczne, które dokładniej omówimy w rozdziale „Rytm, czyli działania na ułamkach”.

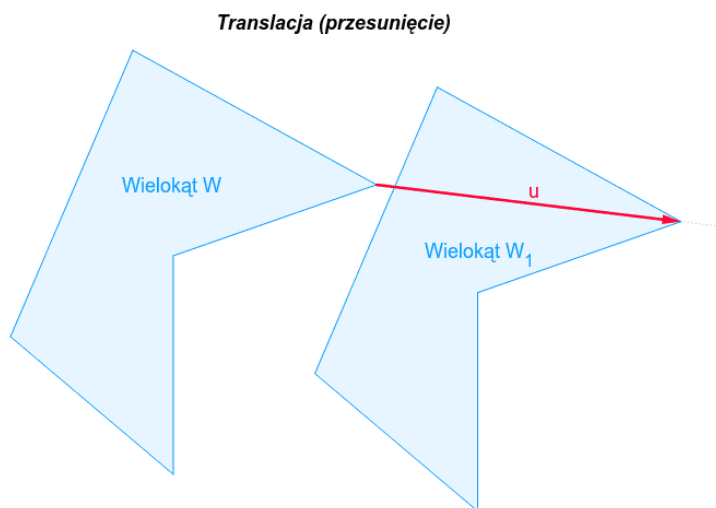


Tak wygląda swoisty układ współrzędnych, który jest jednocześnie zapisem nutowym. Można powiedzieć, że oddaje on przebieg zmian wysokości dźwięków w czasie.

Korzystając ze związków matematyki z muzyką kompozytorzy wielokrotnie stosują geometryczne przekształcenia płaszczyzny. W muzyce są one nazywane technikami kontrapunktycznymi⁵. Omówię teraz najważniejsze z nich.

2.1 Translacja

W matematyce translacja to przesunięcie każdego punktu figury o tę samą odległość w ustalonym kierunku.



Obrazem wielokąta W w przesunięciu o wektor u jest wielokąt W_1 , czyli:

$$W_1 = T_{\vec{u}}(W)$$

Kierunek translacji określa wektor przesunięcia. W muzyce – tak jak w geometrii – również istnieją translacje, przy czym przekształceniu podlega figura, którą jest muzyka o określonym

⁵ Kontrapunkt – „Technika kompozytorska polegająca na jednoczesnym prowadzeniu różnych linii melodycznych według ściśle określonych zasad tonalnych, rytmicznych, harmoniczych”

kształcie melodycznym i rytmicznym. Takie zabiegi najczęściej spotykamy w muzyce polifonicznej, czyli wielogłosowej. Przykładem może być Inwencja 2 – gł. Jana Sebastiana Bacha, gdzie następuje przesunięcie motywu w inne miejsce na pięciolinii.



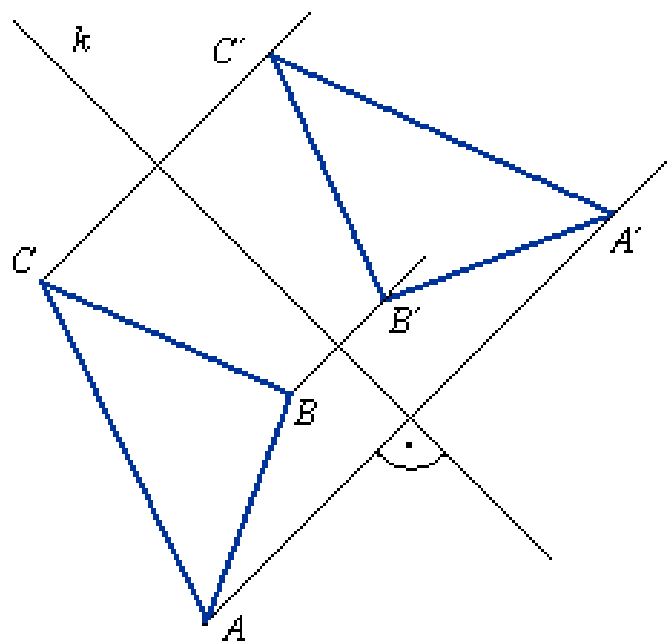
Szczególnymi przykładami translacji są utwory zwane „Kanonami”. Są to formy w których wszystkie partie instrumentalne lub głosy grają tę samą melodię, zaczynając ją jednak w różnym czasie. Jako przykład może posłużyć rozpoznawalny „Kanon D – dur” Johanna Pachelbela, który jest rozwiniętą formą kanonu. Motyw ośmiu nut podlega translacji, czyli przesunięciu przez cały utwór.



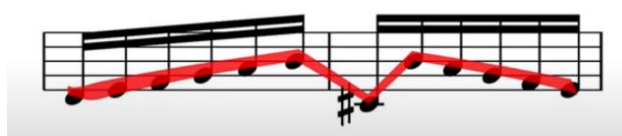
2.2 Symetria osiowa

Symetrią osiową względem prostej k nazywamy przekształcenie płaszczyzny, w którym każdemu punktowi A przyporządkowany jest punkt A' , leżący na prostej prostopadłej do tej prostej k przechodzącej przez punkt A w tej samej odległości od k co punkt A , ale po drugiej stronie prostej k .⁶

⁶ <https://www.math.edu.pl/symetria>



Symetrię osiową względem prostej nazywamy również odbiciem symetrycznym względem prostej lub symetrią względem prostej (gdzie prosta stanowi oś symetrii). Do muzycznych zabiegów nazywanych technikami kontrapunktycznymi należy m. in. „rak”, czyli symetria względem osi pionowej do pięciolinii. Jak wynika z powyższego, dziedzina matematyki, jaką jest geometria, ma swoje duże zastosowanie w muzyce. Kompozytorzy niezwykle chętnie korzystają w swoich utworach z różnorodnych przekształceń geometrycznych. Przykładem może być temat Inwencji d-moll Jana Sebastiana Bacha:



W kompozycji utworów można również zastosować symetrię względem osi poziomej. Mówimy wówczas o inwersji, czyli odwróceniu kierunku prowadzenia linii melodycznej. Doskonałym przykładem tego typu symetrii jest temat utworu „Kunst der Fuge”, również Jana Sebastiana Bacha.



Możliwości zastosowania tego typu przekształceń jest bardzo wiele. W tabeli poniżej przedstawiam wszystkie powyższe możliwości:

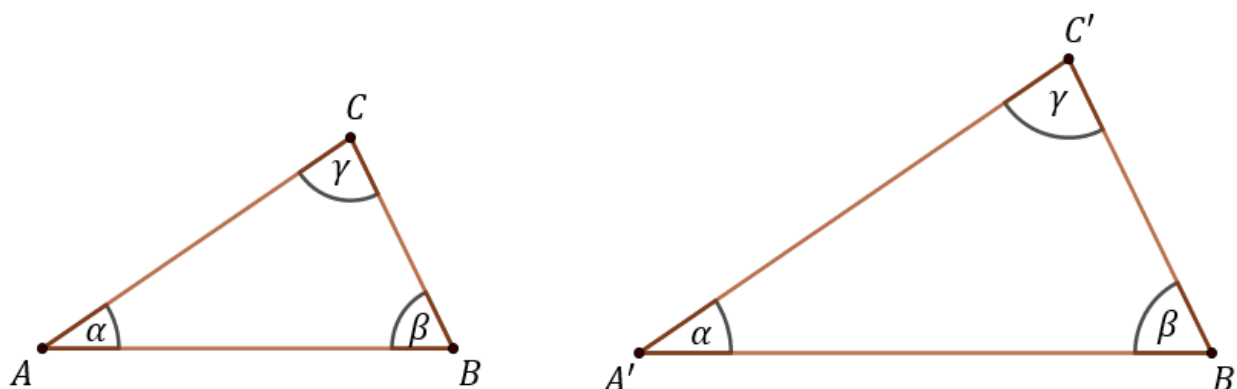
Przekształcanie geometryczne	Efekt muzyczny		
	Poziomo	Pionowo	Poziomo + pionowo
Translacja	1. Powtórzenie 2. Kanon	Transpozycja	1. Ostinato 2. Kanon w sekundzie, kwarcie itd.
Symetria względem prostej	Inwersja	Rak (ruch wsteczny, cofanie się)	
Obrót (180°, rozumiany jako złożenie dwóch symetrii względem prostej)			Rak w inwersji

2.3 Podobieństwo

Przekształcenie płaszczyzny, jakim jest podobieństwo jest pojęciem matematycznym.

Figury podobne - to dwie figury, których odpowiednie boki są parami proporcjonalne. Oznacza to, że stosunki odpowiednich boków są równe.

Mamy tutaj przykład podobieństwa trójkątów:



Na powyższym rysunku trójkąty ABC i A'B'C' są podobne. Zapišemy to tak:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Stosunki odpowiednich boków w powyższych trójkątach są równe, co zapiszemy tak:

$$|AB|/|A'B'| = |BC|/|B'C'| = |AC|/|A'C'|$$

Trójkąty podobne mają **kąty o takiej samej mierze**. Na powyższym rysunku oba trójkąty mają kąty α, β, γ .⁷

Do technik kontrapunktycznych w muzyce również należy przekształcenie płaszczyzny, jakim jest podobieństwo. Wyróżniamy tutaj dwa zabiegi kompozytorskie: augmentację i dyminucję, które są równoważne mnożeniu wartości rytmicznych przez skalar, to znaczy odpowiednio ich wydłużaniu i skracaniu. Ilustruje to następujący przykład – fr. „Kunst der Fuge” Jana Sebastiana Bacha.



Dyminucja – imitacja w pomniejszeniu



(Melodia taka jest podobna, lecz trwa dwa razy krócej).

Augmentacja – imitacja w powiększeniu

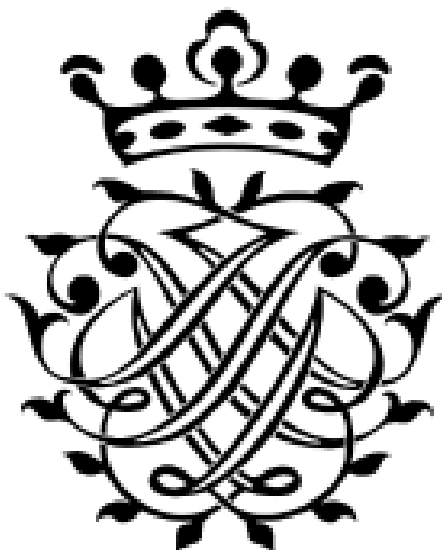


(Melodia również jest podobna, lecz trwa dwa razy dłużej)

Jak wynika z powyższego, dziedzina matematyki, jaką jest geometria, ma swoje duże zastosowanie w muzyce. Kompozytorzy chętnie korzystają w swoich utworach z różnorodnych przekształceń geometrycznych. Na pewno szanowni Czytelnicy spostrzegli, że przytaczam w tym rozdziale mnóstwo przykładów zaczerpniętych z twórczości J. S. Bacha. Kompozytor ten niezwykle kunsztownie stosował wszystkie te zabiegi geometryczne, przejawiając wręcz cechy geniuszu. Jako ciekawostkę chcę wspomnieć o pieczęci, którą zaprojektował dla siebie. Stanowi ona dowód na fascynację zabiegami matematycznymi tego kompozytora. Pieczęć ta stanowi grę symbolicznych oznaczeń, złożoną z trzech podstawowych elementów: korony, która oznacza Boga, trzech inicjałów imienia Bacha – JSB, ułożonych raz normalnie, a drugi raz jako odbicie lustrzane oraz połączenie J z jednej symetrii z S z drugiej

⁷ <https://www.matemaks.pl/podobienstwo-trojkatow.html>

daje grecką literę χ (w grece jest inicjałem słowa „Chrystus”). Poniżej zamieszczam wizerunek herbu J. S. Bacha.



8

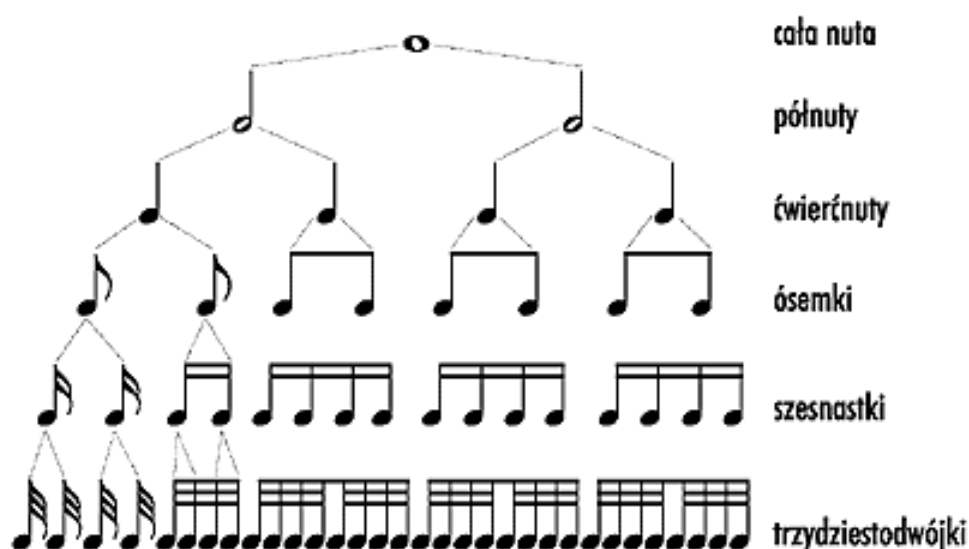
⁸ J. Arbones, P. Milrud. *Harmonia tkwi w liczbach. Muzyka i matematyka*. BUKA Books Sławomir Chojnacki

3. Rytm, czyli działania na ułamkach

Z pomocą matematyki można usystematyzować bardzo istotny element muzyki jakim jest rytm. Obecnie posługujemy się w muzyce notacją metrum, która oparta jest na ułamkach. Zasada zapisu metrum jest bardzo łatwa, jeśli rozumie się prawa dodawania ułamków. Rozumujemy w sposób następujący:

- całej nucie przyporządkowana jest liczba 1
- półnucie - czyli połowie całej nuty – liczba $\frac{1}{2}$
- ćwierćnucie – czyli ćwiartce całej nuty - liczba $\frac{1}{4}$
- ósemce – liczba $\frac{1}{8}$

Każda kolejna wartość jest połową poprzedniej. Ilustruje to następujący rysunek, który może być nazwany przez matematyków drzewem binarnym.



Jeśli kompozytor chce napisać w takcie trzy półnuty, to mnoży $\frac{1}{2}$ przez 3, uzyskując $\frac{3}{2}$, czyli:

$$\frac{1}{2} * 3 = \frac{3}{2}$$

W takim takcie można zapisać np., 2 ćwierćnuty, 4 ósemki i 8 szesnastek, ponieważ:

$$2 * \frac{1}{4} + 4 * \frac{1}{8} + 8 * \frac{1}{16} = \frac{3}{2}$$

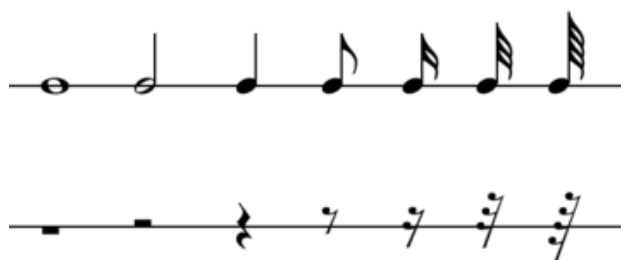
Należy jednak pamiętać, że w takcie ważne jest również akcentowanie. I tu dostrzec można pewne różnice, ponieważ dla muzyka $\frac{3}{4}$ to zupełnie co innego niż $\frac{6}{8}$, choć dla matematyka wartości te są takie same.

W muzyce wartościom nut odpowiadają wartości pauz.

Pauza - przerwa między dźwiękami, mająca określoną wartość rytmiczną, tzn. określony czas trwania; także znak graficzny na pięciolinii, oznaczający taką przerwę między dźwiękami.

I tak otrzymujemy:

- pauzę całonutową, odpowiadającą długości całej nucie
- pauzę półnutową, odpowiadającą długości półnucie
- pauzę ćwierćnutową, odpowiadającą długości ćwierćnucie
- pauzę ósemkową, odpowiadającą długości ósemce



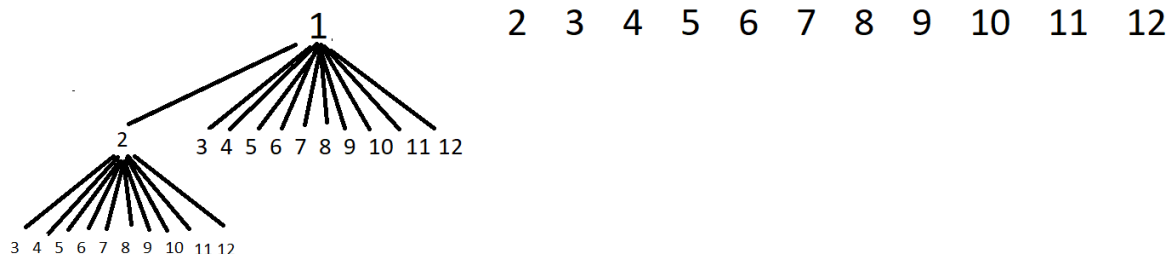
Dobry muzyk musi zatem sprawnie operować działaniami na ułamkach, ponieważ rytm, obok zależności harmoniczych jest niezwykle istotnym elementem muzyki.

4. Kombinatoryka dźwięków

Gdyby postawić następujący problem: mamy stworzyć melodię składającą się z 12 dźwięków (zawierającą wszystkie dźwięki gamy), przy założeniu, że dźwięki nie mogą się powtarzać, to ile możliwości jesteśmy w stanie uzyskać?



Rozważmy przypadek: zapisujemy pierwszy dźwięk, do zapisania zostało nam jedenaście. Po zapisaniu drugiego dźwięku, zostało nam do wyboru dziesięć klawiszy, po zapisaniu trzeciego zostało dziewięć i tak dalej... Poniżej zaprezentowałem sposób zilustrowania rozwiązania zadania za pomocą tzw. „drzewka”. Schemat jest niestety niepełny ze względu na rozmiar kartki papieru, jednak zasada rysowania kolejnych „gałęzi” jest taka sama jak przedstawionych na obrazku.



Zatem, aby policzyć liczbę wersji melodii musimy wykonać działanie:

$$12! = 479\,001\,600$$

Okazuje się, że mając dwanaście dźwięków kompozytor może utworzyć ponad 479 milionów różnych melodii! Wchodzimy tu na grunt kombinatoryki, a dokładniej obliczenia permutacji, czyli przestawienia elementów w pewnym ciągu. Ciągiem jest seria, a jego elementami są dźwięki. Jeśli jeszcze weźmiemy pod uwagę dodatkowo szereg różnych własności, takich jak dynamika, wartości rytmiczne, artykulacja, możliwości różnych układów są nieograniczone.

Opisany przeze mnie przykład kombinacji w muzyce nazywamy dodekafonią, lub techniką dwunastotonową. W technice tej opracowano metodę unikania przewagi jednych dźwięków nad innymi przez wcześniejsze nadawanie im tej samej wartości względnej i aranżowanie muzyki w ten sposób, aby wszystkie dźwięki pojawiły się w utworze mniej więcej tyle samo razy. Aby osiągnąć ten cel narzucono serię reguł kompozycyjnych. Na przykład, gdy jedna nuta zostanie użyta, można ją zastosować ponownie dopiero wtedy, gdy

zakończy się cały cykl dwunastu nut. Struktura kompozycji opiera się na „serii”, tzn. precyzyjnym układzie dwunastu nut.⁹ Absolutnie nie można więc oprzeć się wrażeniu, że omówiona przeze mnie technika dwunastotonowa posiada bardzo duży komponent matematyczny.

⁹ J. Arbones, P. Milrud. *Harmonia tkwi w liczbach. Muzyka i matematyka*. BUKA Books Sławomir Chojnacki

5. Ciąg Fibonacciego i „złoty podział”

Twórcą „ciągu Fibonacciego” i „złotego podziału” jest Leonardo Fibonacci, włoski matematyk, żyjący na przełomie XII i XIII wieku. Podał on wzór określający kolejne wyrazy tego ciągu matematycznego. Jego pierwsze dwa wyrazy to 0 i 1 (czasami to dwie jedynki), natomiast kolejny wyraz jest sumą dwóch poprzednich.

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 1 = 2$$

$$1 + 2 = 3$$

$$2 + 3 = 5$$

$$3 + 5 = 8$$

$$5 + 8 = 13$$

$$8 + 13 = 21$$

$$13 + 21 = 34$$

$$21 + 34 = 55$$

$$34 + 55 = 89$$

Wyniki tych działań, czyli wyrazy ciągu, nazywane są „liczbami Fibonacciego”.

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377...

Posiada on kilka wyjątkowych właściwości. Jeśli obliczymy ilorazy sąsiadujących wyrazów, to otrzymamy następujące wartości:

$$1:1 = 1$$

$$2:1 = 2$$

$$3:2 = 1,5$$

$$5:3 = 1,666 \dots$$

$$8:5 = 1,6$$

$$13:8 = 1,625$$

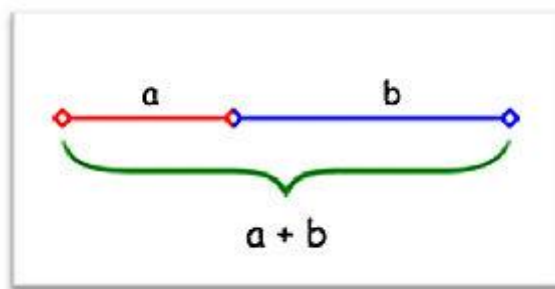
$$21:13 = 1,615\dots$$

$$34:21 = 1,619 \dots$$

Granica tego ciągu ułamków to $1,618033989 \dots$ - nazywana „złotą liczbą” określająca „boską proporcję” czy „złoty podział” lub „złotą proporcję”. Jest ona od czasów starożytnych kojarzona z harmonią i pięknem.

Idąc wcześniejszym tokiem myślenia, złoty podział odcinka zachodzi wówczas, gdy stosunek długości dłuższej z nich do krótszej jest taki sam, jak całego odcinka do części dłuższej.

Wartość złotej liczby jest równa $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,618\dots$



Zapisując to w postaci równania, otrzymamy

$$\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a} = \varphi$$

„Złoty podział” uznany jest za kanon piękna, dlatego możemy go odnaleźć również w muzyce. Niektóre kompozycje Mozarta i Beethovena osiągają punkt kulminacyjny w miejscu, które dzieli utwór na części o długościach odpowiadających złotej proporcji.¹⁰

Muzyka Mozarta zachwyca swoją doskonałością już od 260 lat. Spójrzmy zatem na jego sonaty. Poniżej znajdują się sonaty solowe na fortepian tego kompozytora, z uwzględnieniem liczby taktów pierwszej części czyli ekspozycji, drugiej części – przetworzenia i trzeciej części – reprzyzy. Zilustrowano też całkowitą liczbę taktów sonaty i stosunki całości do dłuższej części utworu oraz dłuższej części do krótszej.

KV	ekspozycja <i>a</i>	przetworzenie+reprzyza <i>b</i>	całość <i>a+b</i>	<i>a+b/b</i>	<i>b/a</i>
279 I	38	62	100	1,6129	1,6316
279 II	28	46	74	1,6087	1,6429
279 III	56	102	158	1,5490	1,8214
280 I	56	88	144	1,6364	1,5714
280 II	24	36	60	1,6667	1,5000
280 III	77	113	190	1,6814	1,4675
281 I	40	69	109	1,5797	1,7250
281 II	46	60	106	1,7667	1,3043
282 I	15	18	33	1,8333	1,2000
282 II	39	63	102	1,6190	1,6154
283 I	53	67	120	1,7910	1,2642
283 II	14	23	37	1,6087	1,6429
283 III	102	171	273	1,5965	1,6765
284 I	51	76	127	1,6711	1,4902
309 I	58	97	155	1,5979	1,6724
310 I	49	84	112	1,5342	1,8718
311 I	39	73	133	1,5833	1,7143

¹⁰ J. Arbones, P. Milrud. *Harmonia tkwi w liczbach. Muzyka i matematyka*. BUKA Books Sławomir Chojnacki

330 I	58	92	150	1,6304	1,5862
330 II	68	103	171	1,6602	1,5147
332 I	93	136	229	1,6838	1,4624
332 II	90	155	245	1,5806	1,7222
333 I	63	102	165	1,6176	1,6190
333 II	31	50	81	1,6200	1,6129
457 I	74	93	167	1,7957	1,2568
533 I	102	137	239	1,7445	1,3431
533 II	46	76	122	1,6053	1,6522
545 I	28	45	73	1,6222	1,6071
547 I	78	118	196	1,6610	1,5128

Otrzymane wyniki robią niesamowite wrażenie. Na szczególną uwagę zasługuje tu *Sonata nr 1 C-dur* KV 279 I, w której złoty podział jest wręcz doskonały. Stąd wniosek, że o przypadkowości nie może tu być mowy.¹¹

W sposób na pewno intencjonalny „liczby Fibonacciego” pojawiają się w dziełach węgierskiego kompozytora Beli Bartóka. Możemy to dostrzec w *Fudze* otwierającej „Muzykę na instrumenty strunowe, perkusję i czeleste”. Jej 89 taktów jest podzielonych na części po 55 i 34 takty. Te z kolei również są podzielone zgodnie z liczbami Fibonacciego: pierwsza na 34 i 21 taktów, a druga na 13 i 21. Trzecia część utworu zaczyna się sekwencją, w której ksylofon gra jedno *f* w grupach po 1, 1, 2, 3, 5, 8, 5, 3, 2, 1, 1.

Liczby Fibonacciego można także odkryć w stosowanych przez tego kompozytora modelach interwałów, złożonych z 2, 3, 5 i 13 półtonów.

Także w kompozycjach Debussy’ego odnajdziemy zgodność z ciągiem Fibonacciego, na przykład introdukcja do „Dialogue du vent et la mer” złożona jest z 55 taktów podzielonych na sekcje zawierające 21, 8, 8, 5 i 13 taktów. „Złoty takt” – trzydziesty czwarty – jest zaznaczony eksplozją puzonów.

Jak widać, także i muzyka nie oparła się urokowi złotej proporcji, którą odnajdujemy również w utworach współczesnych. Przytoczę teraz przykład wspomnianego już w tej pracy „Kanonu D – dur” Pachelbela. Fragment jego konstrukcji rytmicznej wygląda tak:



Nie można nie zauważyć zastosowania przez kompozytora liczb Fibonacciego. Podobne sekwencje odnajdujemy również we współczesnych utworach, które dzięki temu zabiegowi są

¹¹ <http://www.matematyka.wroc.pl/ciekawieiomatematyce/mozart-i-matematyka>

w brzmieniu ludzaco podobne do „Kanonu D – dur”, na przykład: Bob Marley – „Women no cry”, The Beatles – „Let it be”, U2 – „With or without you” i wiele innych.

Z powyższych rozważań wynika, że złota proporcja dostarcza wielu narzędzi do tworzenia muzyki, wielokrotnie w historii uznawanej za kanony piękna.

6. Muzyczne łamigłówki i kryptogramy

Kryptogram to zaszyfrowana wiadomość, którą da się odczytać tylko za pomocą klucza. Może on być ukryty w tekście lub mieszaninie liczb i liter. Kryptogram muzyczny jest utworem, który umożliwia rozszyfrowanie tekstu poprzez nazwanie słyszanych nut. Zajmowało się tym wielu kompozytorów, zwłaszcza renesansowych, ponieważ zagadki muzyczne były wówczas popularną formą rozrywki. Nazywano je „sztuczkami niderlandzkimi”, gdyż często pojawiały się w twórczości muzyków z tego regionu. Niejednokrotnie polegały one na tym, że np. klucz zapisywano w postaci znaku zapytania, co powodowało, że utwór można było odczytać na kilka sposobów. Ciekawą rozrywkę wymyślili kompozytorzy osiemnastowieczni między innymi Haydn czy Mozart. Określali swoje łamigłówki mianem *Musikalisches Würfelspiel*. Twórcy pisali po 11 wersji kolejnych taktów kompozycji. Gra polegała na tym, żeby rzucając kośćmi, losować kolejne takty kompozycji i w ten sposób tworzyć nową. Oczywiście ciekawscy matematycy zauważą natychmiast, że takty o numerach 7 będą wypadać częściej niż np. o numerze 12 (o czym mówi nam rachunek prawdopodobieństwa).¹²

Najsłynniejszym motywem melodycznym opartym na kryptogramie jest z całą pewnością B–A–C–H. Użyto w nim niemieckiego nazewnictwa *h* obniżone bemolem daje B, *a* to A, *c* to C i *h* to H. Na przykład w sekwencji z „Kwartetu smyczkowego op. 28” Antona Weberna zostają wybrane cztery nuty – BACH – i są stosowane dwa przekształcenia geometryczne, aby z tej grupy uzyskać pozostałe osiem nut.¹³

Przejdźmy teraz na grunt muzyki współczesnej. O Rudreshu Mahanthappym słyszeli dotąd chyba tylko fani jazzu. Do czasu gdy recenzja jego ostatniej płyty pod tytułem *Codebook* ukazała się nie w czasopiśmie muzycznym lecz w miesięczniku „Science” (jest to czasopismo z dziedziny nauk ścisłych i przyrodniczych). Powodem stała się matematyczna inspiracja utworów z tej płyty.

Wszystkie kompozycje z tego albumu powstały z wykorzystaniem szyfrów i reguł matematycznych. I tak:

- ✓ Utwór „The Decider” ma strukturę opartą na ciągu Fibonacciego. Kolejne liczby ciągu to kolejne dźwięki 12-stopniowej skali wykorzystanej w tym utworze.
- ✓ Do skomponowania utworu „Further and In Between” wykorzystano specyficzną cechę liczby 142857. Posiada ona tę własność, że pomnożona przez 2, 3, 4, 5 lub 6 daje wynik będący permutacją jej cyfr (np. $142857 \cdot 2 = 285714$, $142857 \cdot 3 = 428571$ i tak dalej). Kolejne cyfry tej liczby to numery kolejnych półtonów.
- ✓ W utworze „Play It Again Sam”, perkusista na początku utworu wystukuje swoje imię alfabetem Morse'a, kropki zastępując krótkimi, a kreski długimi dźwiękami. To samo w zakończeniu czynią pozostali członkowie kwartetu.
- ✓ Wywodzący się z tradycji żydowskiej prosty szyfr podstawieniowy „Atbasz” wykorzystano w utworze „Frontburner”. Atbasz polega na odwróceniu kolejności liter w alfabecie i wzajemnym zastąpieniu ich w tekście (np. A=Z, B=Y itd.). Zasada ta zakodowana jest w nazwie szyfru A-T, B-SZ, gdyż w alfabet hebrajski zaczyna się od A, B, a kończy na T, SZ.

¹² <http://meakultura.pl/artukul/matematyka-muzyki-muzyka-matematyki-873>

¹³ J. Arbones, P. Milrud. *Harmonia tkwi w liczbach. Muzyka i matematyka*. BUKA Books Sławomir Chojnacki

22

Zakończenie

Muzyka jest jednym z głównych środków wyrazów na przestrzeni historii ludzkości, natomiast matematyka bada to zjawisko. Jej odkrycia rzucają światło na wiele aspektów muzyki – związki między dźwiękami w interwałach, zjawisko rezonansu, geometryczne struktury melodii, zabawy muzyczne. Ten, kto rozumie matematykę, do emocji płynących ze słuchania muzyki może dodać jeszcze przyjemność z odkrywania jej matematycznych składników. Trzeba jednak podkreślić, że matematyka nie warunkuje muzyki, lecz dostarcza wielu narzędzi do jej tworzenia. Czy można zatem pokusić się o napisanie algorytmu kompozycji lub wzoru arcydzieła? Niestety, w grę wchodzi tutaj emocje, inspiracja, czy też wrażliwość. To one decydują o kształcie muzyki. Czy matematyka ulega więc nieskończonej wyobraźni kompozytora? Odpowiedź na to pytanie pozostawiam Czytelnikowi... Choć przecież nieskończoność jest pojęciem matematycznym.

Bibliografia

- ✓ <http://www.matematyka.wroc.pl/>
- ✓ <https://www.youtube.com/watch?v=wb7kPaM8cfg&t=801s>
- ✓ <https://www.youtube.com/channel/UCB43M5oBAR5cU0EAK65-vaQ>
- ✓ <https://www.youtube.com/channel/UCB43M5oBAR5cU0EAK65-vaQ>
- ✓ <https://magazyn gitarzysty.pl/warsztat/porady/11-alikwoty-harmoniczne-flazolety>
- ✓ Karolina Kniaziuk - Jednostajne transformacje triadyczne
- ✓ <http://www.muzykoteczaszkolna.pl/wiedza/terminy/kontrapunkt>
- ✓ <https://www.math.edu.pl/symetria>
- ✓ <https://www.matemaks.pl/podobienstwo-trojkatow.html>
- ✓ J. Arbones, P. Milrud. *Harmonia tkwi w liczbach. Muzyka i matematyka*. BUKA Books Sławomir Chojnacki, 2012
- ✓ F. Corbalan *Złota proporcja – matematyczny język piękna* BUKA Books, Sławomir Chojnacki, 2012