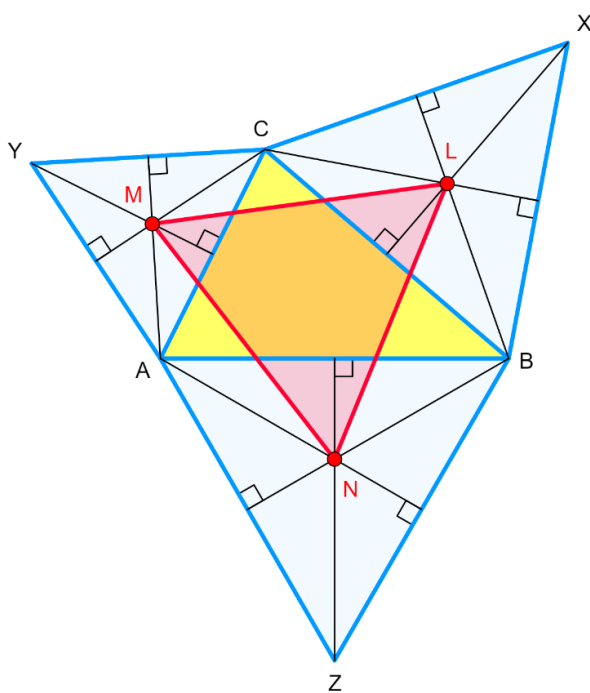


TRZY BOKI...
TRZY KĄTY...
CZYLI...

TRÓJKĄTY !!!



Opracowała:

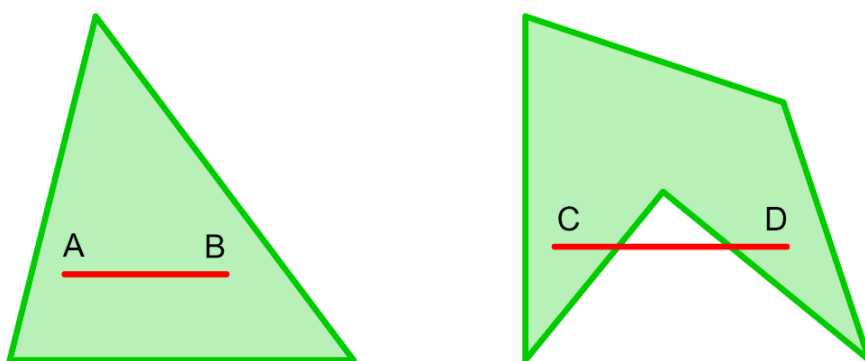
Magdalena Bachleda-Żarska

Szkoła Podstawowa nr 2 im. Mikołaja Kopernika w Nowym Targu

Klasa 8c

1. Co to jest trójkąt ?

Trójkąt może wydawać się nieciekawą figurą. Oczywiście jest to nieprawda, przeciwnie – trójkąty były badane przez matematyków od czasów starożytnych i są według mnie jednymi z najciekawszych figur geometrycznych. Pewnie każdy wie, że suma kątów wewnętrznych w trójkącie jest równa 180° ale trójkąty kryją wiele tajemnic i innych ciekawych właściwości. W tej pracy postaram się to udowodnić. Zaczniemy jednak od początku. Czym zatem jest trójkąt ? Trójkąt to figura wypukła posiadająca trzy boki, trzy kąty i trzy wierzchołki. Czym jest jednak figura wypukła ? Jest to taka figura, która spełnia następujący warunek: każdy odcinek o końcach należących do tej figury zawiera się w tej figurze. Jeśli ten warunek nie będzie spełniony figura będzie nazywana niewypukłą. Na poniższym rysunku (rys. 1) przedstawione są dwie figury – trójkąt (figura wypukła) i inny wielokąt (figura niewypukła). Aby to, że trójkąt jest figurą wypukłą było dobrze widoczne narysowałam na nim odcinek $|AB|$. Mieści się on w całości w trójkącie więc pokazuje to, że jest on wypukły. Każdy odcinek o końcach leżących w trójkącie zmieści się w nim w całości tak jak odcinek $|AB|$. Obok trójkąta narysowana jest figura niewypukła. Można to łatwo poznać po przykładowym odcinku $|CD|$, który ma oba końce w figurze, jednak nie leży w niej w całości.

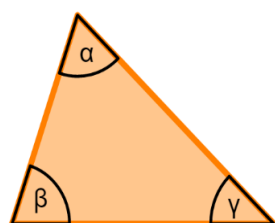


Rys. 1

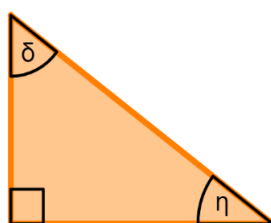
Skoro wiadomo już czym są trójkąty, można zacząć wyróżniać spośród trójkątów różne ich rodzaje. Trójkąty można podzielić na dwa sposoby – ze względu na ich boki i ze względu na ich kąty, np. trójkąt ostrokątny, równoramienny, trójkąt rozwartokątny, równoboczny. W tabeli poniżej (rys. 2) przedstawiony został podział trójkątów ze względu na kąty oraz boki. Pod tabelą znajdują się rysunki poszczególnych trójkątów (rys. 3).

PODZIAŁ ZE WZGLĘDU NA KĄTY		PODZIAŁ ZE WZGLĘDU NA BOKI	
Trójkąt ostrokątny	Ma wszystkie kąty ostre.	Trójkąt równoboczny	Ma wszystkie boki równej długości.
Trójkąt prostokątny	Ma jeden kąt prosty i dwa ostre.	Trójkąt równoramienny	Ma dwa boki równej długości.
Trójkąt rozwartokątny	Ma jeden kąt rozwarty i dwa ostre.	Trójkąt różnoboczny	Ma wszystkie boki różnej długości.

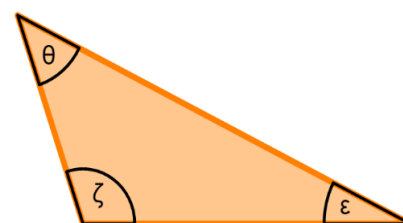
Rys. 2



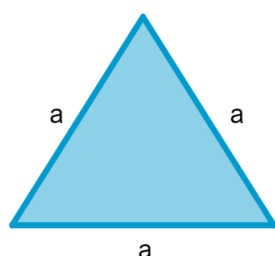
Trójkąt ostrokątny



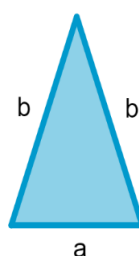
Trójkąt prostokątny



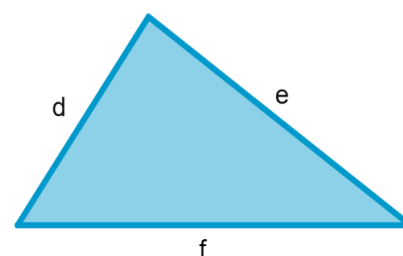
Trójkąt rozwartokątny



Trójkąt równoboczny



Trójkąt równoramienny

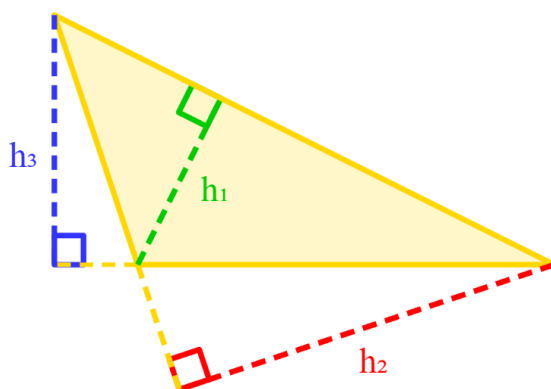


Trójkąt różnoboczny

Rys. 3

2. Podstawowa wielkość w trójkącie – powierzchnia.

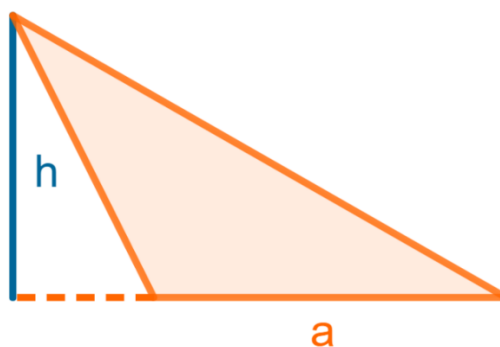
W trójkącie można wyznaczyć kilka ważnych, podstawowych wielkości. Jedną z najważniejszych z nich jest oczywiście jego **pole powierzchni**. Pole powierzchni najłatwiej obliczymy znając długość jednego z boków oraz jego wysokość liczoną względem tego właśnie boku. Czym zatem jest wysokość trójkąta? *Wysokość trójkąta* to odcinek między jego wierzchołkiem a przeciwległym bokiem lub jego przedłużeniem i prostopadły do tego boku. Jak już wiadomo każdy trójkąt ma trzy wierzchołki i trzy boki, więc będzie miał również trzy wysokości. Są one zaznaczone na rysunku poniżej (rys. 4) i oznaczone jako h_1 , h_2 i h_3 .



Rys. 4

Aby obliczyć pole trójkąta można użyć kilku wzorów. Najpopularniejszym z nich jest właśnie wzór z użyciem wysokości trójkąta (rys. 5). Trzeba jednak uważać, który bok i którą wysokość wykorzystamy w obliczeniach. Najlepiej jeden z boków przyjąć za tzw. podstawę trójkąta i względem tej podstawy obliczyć wysokość trójkąta. Wzór na pole powierzchni wygląda następująco:

$$P = \frac{ah}{2}$$



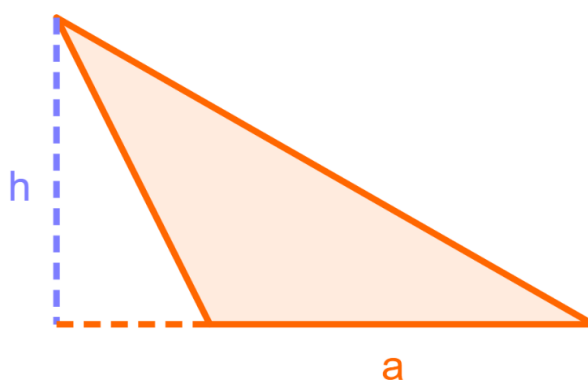
Rys. 5

gdzie:

- P to obliczane pole powierzchni trójkąta;
- a to jeden z boków trójkąta, który nazwiemy sobie jego podstawą;
- h to wysokość opadająca na podstawę a .

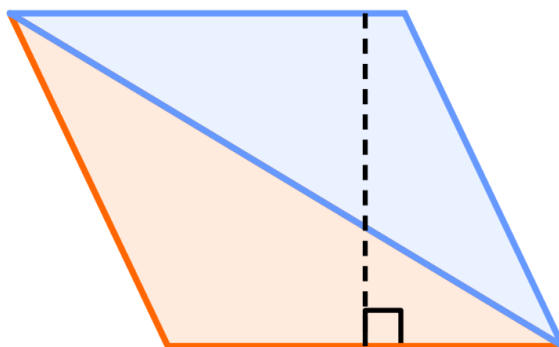
Można bardzo łatwo udowodnić poprawność tego wzoru w sposób graficzny, w zaledwie trzech krokach:

1 - na początku należy narysować sobie przykładowy trójkąt o podstawie a i wysokości h (rys. 6):



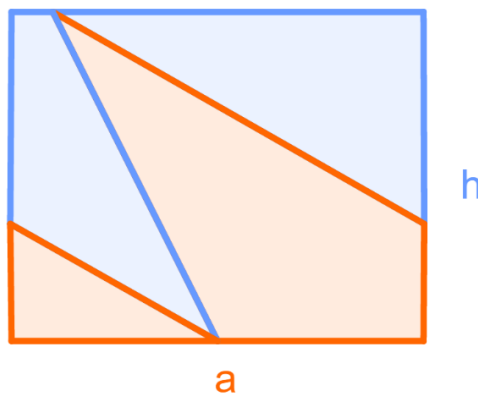
Rys. 6

2 - następnie trzeba dorysować identyczny trójkąt tak, aby oba tworzyły razem równoległobok i wyznaczyć odcinek pomiędzy jego dwoma równoległymi bokami. Odcinek ten musi być prostopadły do tych boków. Od razu można zauważyć, że jest on równy wysokości naszego trójkąta (rys. 7):



Rys. 7

3 - następnie trzeba przeciąć figurę wzdłuż dorysowanego odcinka i zamienić miejscami dwie powstałe figury (rys. 8). Wtedy uzyskamy prostokąt. Pole prostokąta można obliczyć mnożąc przez siebie długości jego boków.



Rys. 8

Skoro z dwóch identycznych co do powierzchni trójkątów utworzyliśmy prostokąt, którego jeden bok jest podstawą naszego trójkąta a , a drugi jego wysokością h to pole jednego trójkąta jest połową pola powierzchni powstałego prostokąta. Obliczając pole powierzchni trójkąta trzeba pomnożyć wysokość przez podstawę i podzielić przez 2.

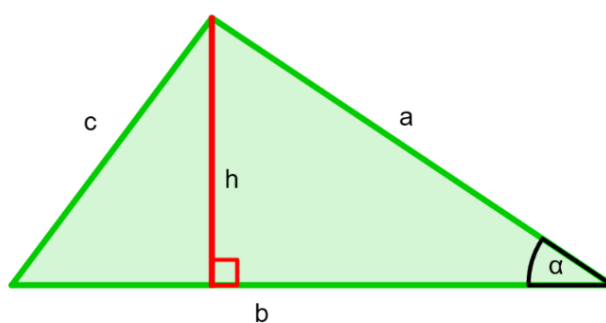
A zatem wzór został udowodniony !

Kolejnym wzorem na obliczenie pole powierzchni trójkąta jest **wzór z użyciem sinusa**. Wygląda on następująco:

$$P = \frac{a b \sin \alpha}{2}$$

gdzie:

- P to pole trójkąta;
- a, b to dwa boki trójkąta, z których bok b przyjmujemy za podstawę;
- α to kąt pomiędzy bokami b i a .



Rys. 9

Udowodnijmy zatem poprawność tego wzoru.

Najpierw wyznaczmy wartość sinusa kąta α :

$$\sin \alpha = \frac{h}{a}$$

stąd:

$$h = a \sin \alpha$$

Podstawmy teraz wartość h do znanego nam już wzoru:

$$P = \frac{bh}{2} = \frac{a b \sin \alpha}{2}$$

A zatem wzór jest poprawny !

Kolejnym wzorem na pole powierzchni trójkąta jest wzór Herona. Najpierw jednak kilka słów o samym Heronie (rys. 10). Ten grecki matematyk pochodził z Aleksandrii i żył w I w. n. e.. Oprócz matematyki zajmował się również fizyką i mechaniką. Był też zasłużonym wynalazcą i konstruktorem. Do jednego z jego najsłynniejszych wynalazków należy tzw. *bania Herona*. Jemu jest też przypisane *Twierdzenie Herona* dotyczące odbicia promieni światła.



Rys. 10

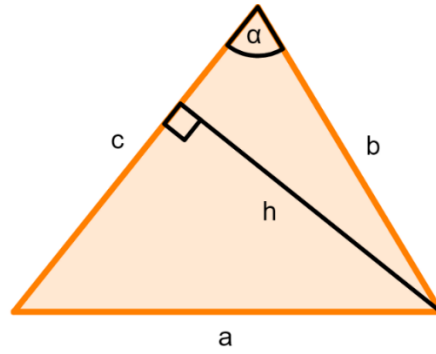
Przejdźmy teraz to jednego z największych osiągnięć tego matematyka czyli wzoru na pole trójkąta. Wygląda on następująco:

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

gdzie:

- P to pole powierzchni trójkąta;
- a, b, c to długości boków trójkąta;
- p to połowa długości obwodu trójkąta ($p = \frac{a+b+c}{2}$).

Zamierzam teraz, tak jak robiłam to z poprzednimi wzorami, udowodnić wzór Herona. Przyda się do tego rysunek (rys. 11), wzór sinusów na pole trójkąta, *twierdzenie cosinusów* oraz tzw. *jedyńska trygonometryczna*.



Rys. 11

Jak już wiemy, pole P trójkąta jest równe:

$$P = \frac{bc \sin \alpha}{2}$$

Aby obliczyć $\cos \alpha$ możemy wykorzystać tzw. twierdzenie cosinusów:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

A zatem:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos^2 \alpha = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2$$

Wykorzystajmy tzw. *jedynkę trygonometryczną*:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Możemy zatem obliczyć:

$$\begin{aligned}
 \sin^2 \alpha &= 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2 \\
 &= \left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \\
 &= \left(\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} \right) \left(\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \\
 &= \left(\frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc} \right) \left(\frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc} \right) \\
 &= \frac{(a + b - c)(a - b + c)}{2bc} \cdot \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{2bc}
 \end{aligned}$$

Skoro przyjmujemy, że p to połowa obwodu trójkąta to:

$$a + b - c = 2p - 2c; \quad a - b + c = 2p - 2b$$

$$a + b + c = 2p; \quad b + c - a = 2p - 2a$$

A zatem:

$$\begin{aligned}
 \sin^2 \alpha &= \frac{2(p - c) \cdot 2(p - b)}{2bc} \cdot \frac{2p \cdot 2(p - a)}{2bc} = \frac{4p(p - a)(p - b)(p - c)}{b^2 c^2} \\
 \sin \alpha &= \frac{2\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}}{bc}
 \end{aligned}$$

Możemy więc obliczyć pole trójkąta korzystając ze wzoru z sinusem:

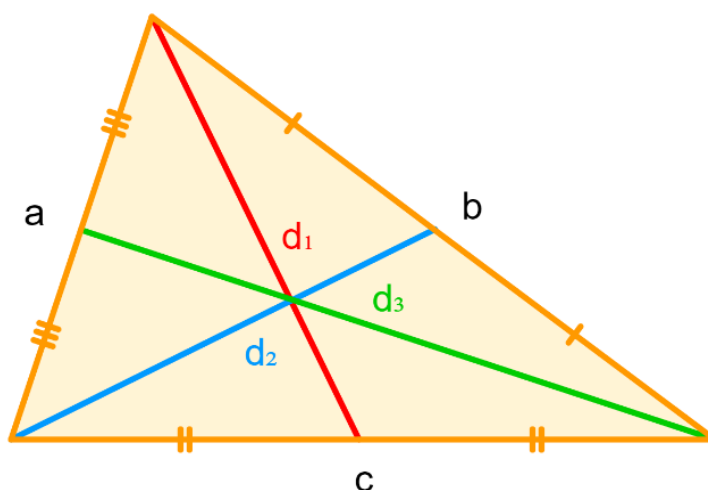
$$P = \frac{bc \sin \alpha}{2} = \frac{bc 2\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}}{2bc}$$

$$\mathbf{P = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}}$$

Udowodniliśmy właśnie wzór Herona, zatem jest on poprawny !

3. Gdzie trójkąt ma środek ?

W każdym trójkącie można wyznaczyć kilka różnych „środków”. Zacznę od najważniejszego – **barycentrum**, czyli środka geometrycznego trójkąta. Czasem błędnie określa się go jako środek masy lub środek ciężkości trójkąta. Barycentrum to punkt przecięcia się *środkowych* trójkąta. Punkt ten dzieli każdą z nich w stosunku 2:1 licząc od wierzchołka. Czym jest środkowa ? Jest to odcinek pomiędzy wierzchołkiem trójkąta a środkiem przeciwległego boku. Tak jak w przypadku wysokości, środkowych w trójkącie są zawsze trzy. Na rysunku poniżej (rys. 12) środkowe zostały zaznaczone jako d_1 , d_2 i d_3 .

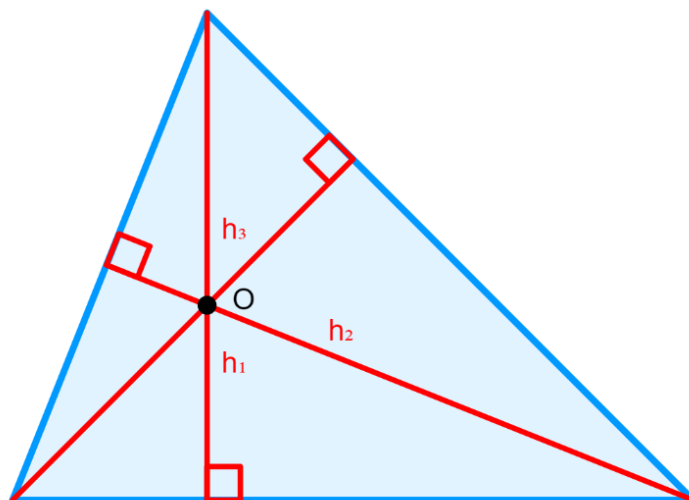


Rys. 12

Wpatrzmy się uważniej w powyższy rysunek i dojdziemy również do wniosku, że każda ze środkowych dzieli trójkąt na dwie części o równych polach powierzchni. Długości środkowych łatwo jest obliczyć korzystając z powyższej właściwości oraz wzoru Herona. Np. długość środkowej d_1 opadającej na bok c wynosi:

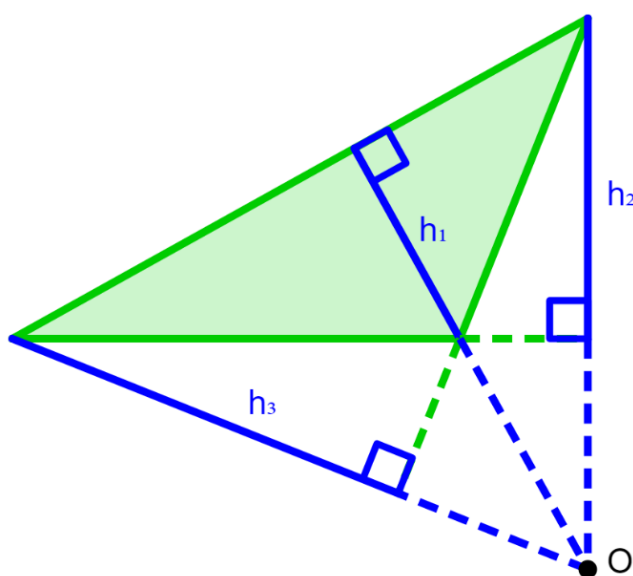
$$d_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

Drugim ważnym „środkiem” czyli *centrum* trójkąta jest **ortocentrum**. Jest to punkt przecięcia się wysokości, lub ich przedłużeń (rys. 13).



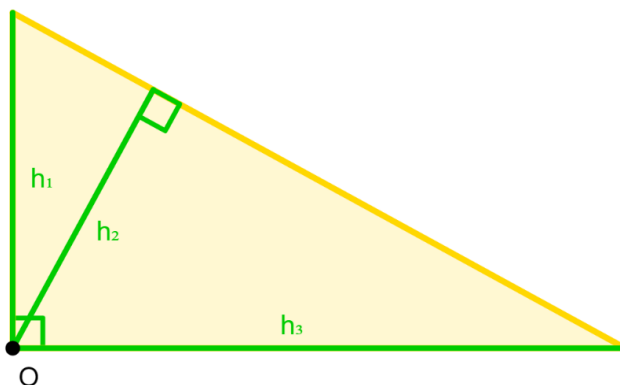
Rys. 13

Drugi człon nazwy ortocentrum – *centrum* wskazuje na to, że punkt ten leży w środku trójkąta. Ale wcale tak nie musi być. W trójkącie rozwartokątym ortocentrum (punkt O) leży poza trójkątem (rys. 14).



Rys. 14

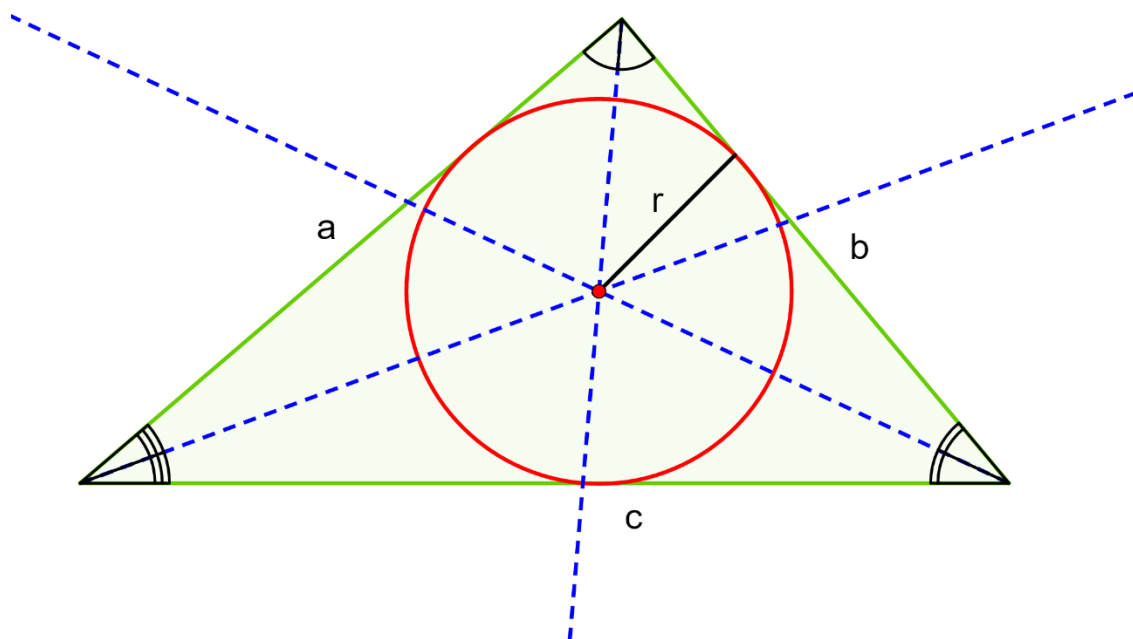
W trójkącie prostokątnym ortocentrum zawsze będzie leżało idealnie na wierzchołku kąta prostego (rys. 15).



Rys. 15

4. Trójkąty i okręgi.

Rozpatrując różne ciekawe właściwości trójkątów nie można pominąć sposobów konstrukcji okręgów wpisanych oraz opisanych na trójkącie. Aby wyznaczyć **środek okręgu wpisanego w trójkąt** należy użyć dwusiecznych, czyli półprostych mających początek na wierzchołkach trójkąta i dzielących kąty wierzchołkowe na dwa kąty o równych miarach. Na rysunku poniżej (rys. 16) dwusieczne to niebieskie półproste zaznaczone przerywaną linią. Przecinają się one w jednym punkcie, który jest właśnie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt. Taki okrąg ma z każdym bokiem trójkąta tylko jeden punkt wspólny, tzw. punkt styczności.



Rys. 16

Znając długości boków trójkąt możemy obliczyć długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wzór na promień okręgu r jest następujący:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

gdzie:

– r to promień okręgu;

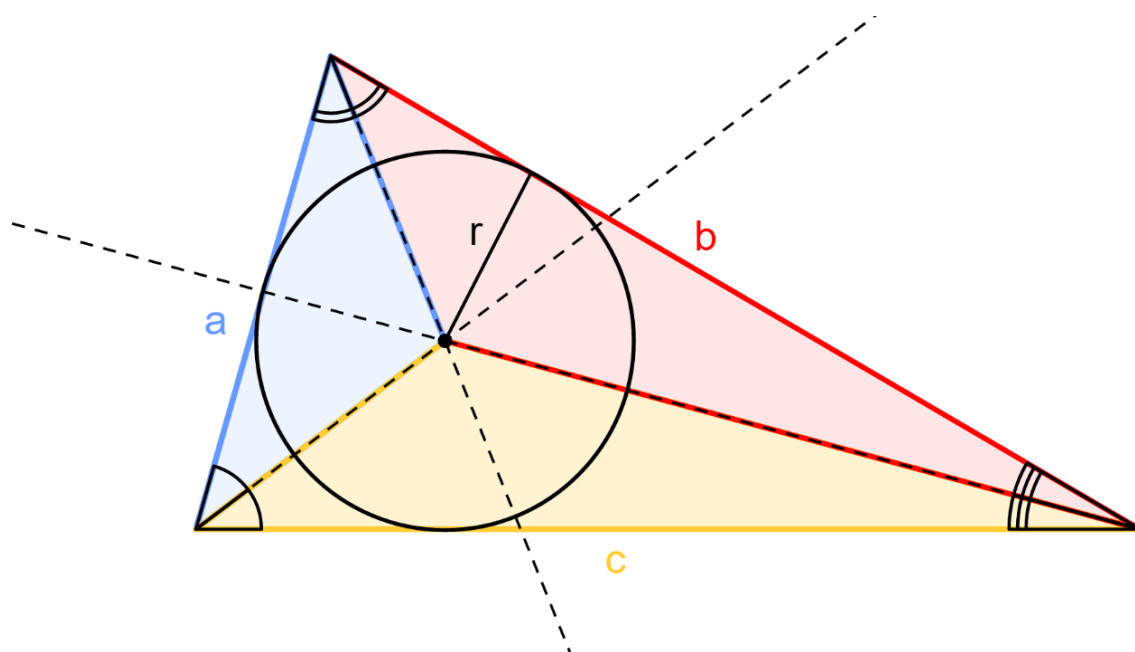
– a, b, c to boki trójkąta;

– p to połowa obwodu trójkąta, czyli $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Znając już długość promienia okręgu wpisanego możemy także obliczyć pole trójkąta korzystając ze wzoru:

$$P = \frac{r \cdot (a + b + c)}{2}$$

Zamierzam udowodnić ten wzór. Jak to w geometrii, przyda się bardzo do tego rysunek pomocniczy (rys. 17).



Rys. 17

Jak widać duży trójkąt z okręgiem wpisanym o promieniu r podzieliłam na trzy małe trójkąty o podstawach równych bokom dużego trójkąta – a , b , c . Wysokość każdego małego trójkąta opadająca na podstawę, która jest jednocześnie bokiem dużego trójkąta jest równa r . Skoro pole trójkąta jest równe iloczynowi jego wysokości i podstawy podzielonemu przez 2, a duży trójkąt składa się z trzech mniejszych, to pole dużego trójkąta jest równe:

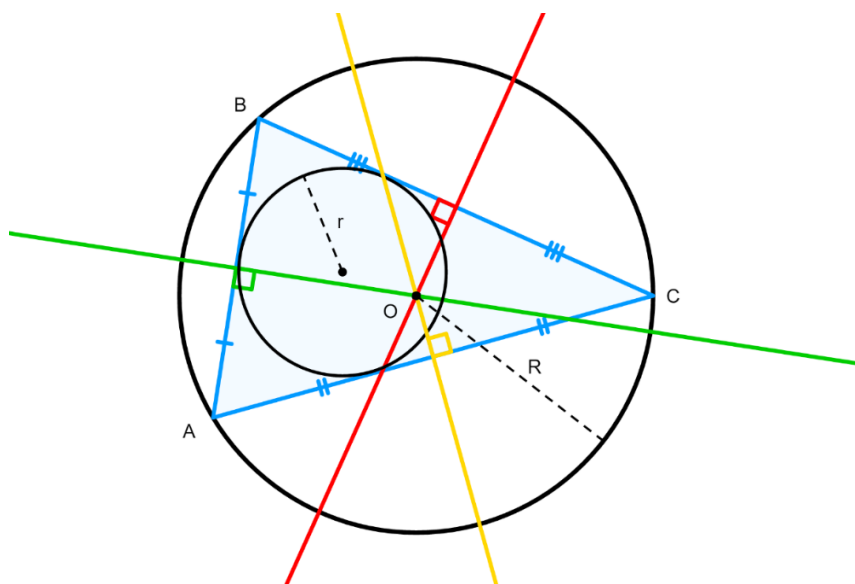
$$P = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2}$$

Po uproszczeniu, pole trójkąta P będzie równe:

$$P = \frac{r \cdot (a + b + c)}{2}$$

A zatem wszystko się zgadza, wzór jest prawdziwy !

Skoro poznaliśmy już okręgi wpisane w trójkąt to nadszedł czas na okręgi opisane na trójkącie. Do wyznaczenia **środką okręgu opisanego na trójkącie** nie przyda się nam już dwusieczna lecz inny element geometryczny – *symetralna*. Jest to prosta prostopadła do boku i przechodząca przez jego środek czyli dzieląca bok na dwie równe części. Skoro trójkąt ma trzy boki, to ma również trzy symetralne. Symetralne przecinają się w jednym punkcie będącym środkiem okręgu opisanego na trójkącie (rys. 18). Taki okrąg ma z trójkątem trzy punkty wspólne – są nimi wierzchołki trójkąta.



Rys. 18

Na rysunku tym pokazuję równocześnie okręgi wpisane i opisane na trójkącie. Długość promienia okręgu opisanego na trójkącie można obliczyć korzystając z następującego wzoru:

$$R = \frac{abc}{4rp}$$

gdzie:

- r to promień okręgu wpisanego w trójkąt;
- R to promień okręgu opisanego na trójkącie;
- p to połowa obwodu trójkąta, czyli $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Okrąg opisany na trójkącie również ma swoje zastosowanie. Przydaje się w obliczaniu pola powierzchni trójkąta. Istnieje bowiem wzór na pole trójkąta z użyciem właśnie długości promienia okręgu opisanego na nim. Wygląda on następująco:

$$P = \frac{abc}{4R}$$

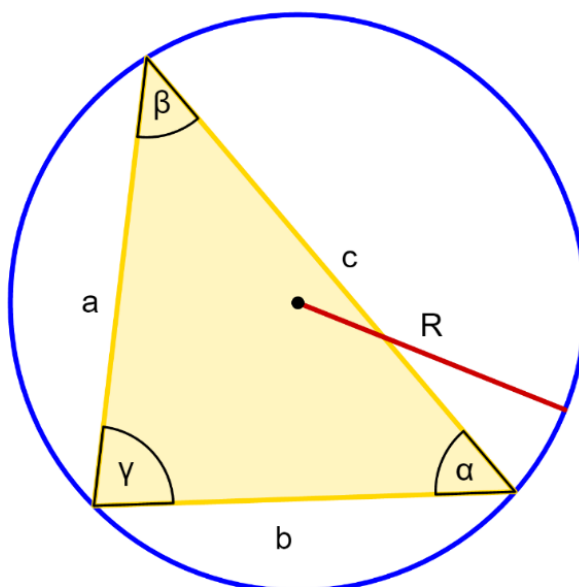
gdzie:

- P to pole powierzchni trójkąta;
- a, b, c to długości odpowiednich boków trójkąta;
- R to długość promienia okręgu opisanego na trójkącie.

Zamierzam również udowodnić i ten wzór, korzystając z *twierdzenia sinusów*.

Zgodnie z twierdzeniem sinusów wiemy, że w dowolnym trójkącie stosunek długości dowolnego boku do sinusa kąta leżącego naprzeciw tego boku jest stały i równy długości średnicy okręgu opisanego na trójkącie.

Czyli zgodnie z poniższym rysunkiem (rys. 19):



Rys. 19

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

czyli:

$$\sin \alpha = \frac{a}{2R}$$

Teraz podstawmy to do wzoru z sinusem na pole powierzchni trójkąta:

$$P = \frac{bc \sin \alpha}{2}$$

$$P = \frac{bc \cdot \frac{a}{2R}}{2}$$

$$P = \frac{abc}{4R}$$

A zatem wzór jest poprawny !

Należy jeszcze dodać, że dla dowolnego trójkąta istnieje tylko jeden okrąg wpisany w ten trójkąt i tylko jeden okrąg opisany na tym trójkącie.

5. Okrąg 9 punktów.

Pomimo, że moja praca dotyczy trójkątów kolejny raz muszę spleść trójkąty z okręgami a dokładniej z bardzo ciekawym okręgiem 9 punktów. Jest on również nazywany **okręgiem Feuerbacha**. Karl Wilhelm Feuerbach (rys. 20) był niemieckim matematykiem. Zajmował się głównie geometrią. W 1822 roku podał twierdzenie o okręgu dziewięciu punktów, które zaraz dokładniej opiszę.

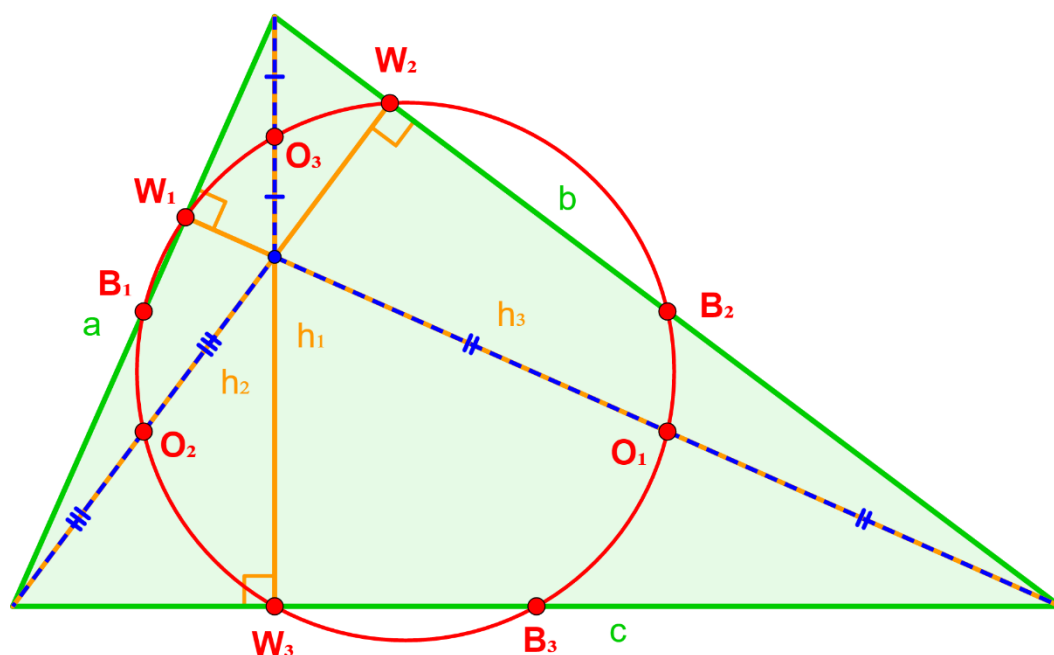


Rys. 20

Okrąg dziewięciu punktów, jak sama nazwa już wskazuje, przechodzi przez 9 specjalnych punktów związanych z trójkątem. Tymi punktami są:

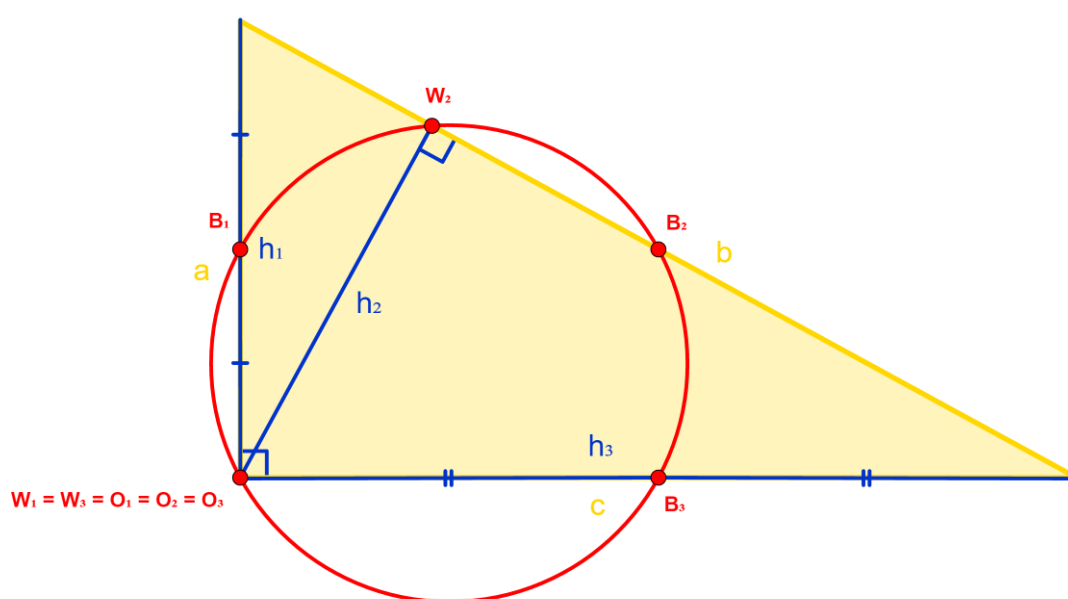
- środki trzech boków trójkąta (B_1, B_2, B_3);
- spodki trzech wysokości trójkąta (W_1, W_2, W_3);
- trzy środki odcinków pomiędzy ortocentrum a wierzchołkiem trójkąta (O_1, O_2, O_3).

Na rysunku poniżej (rys.) okrąg dziewięciu punktów został zaznaczony kolorem czerwonym, tak jak tworzące go punkty.



Rys. 20

Pomimo nazwy okręgu – okrąg *dziewięciu* punktów może on nie mieć ich aż tyle. W przypadku trójkąta prostokątnego okrąg dziewięciu punktów (zaznaczony na rysunku poniżej czerwonym kolorem) będzie miał tylko pięć punktów (rys. 21) a dlatego, że pięć z dziewięciu punktów będzie się ze sobą pokrywało.



Rys. 21

6. Słynne trójkąty.

Matematycy zajmujący się geometrią nigdy nie pomijali trójkątów, przeciwnie, wzbudzały ich szczególne zainteresowanie. Doskonałym przykładem są pitagorejczycy – uczniowie Pitagorasa (rys. 22). Pitagoras jako pierwszy udowodnił twierdzenie dotyczące trójkątów prostokątnych nazwane później jego imieniem. Pitagoras żył około 500 lat p.n.e., założył szkołę pitagorejską w Krotonie, której przyznaje się wiele zasług w dziedzinie geometrii.



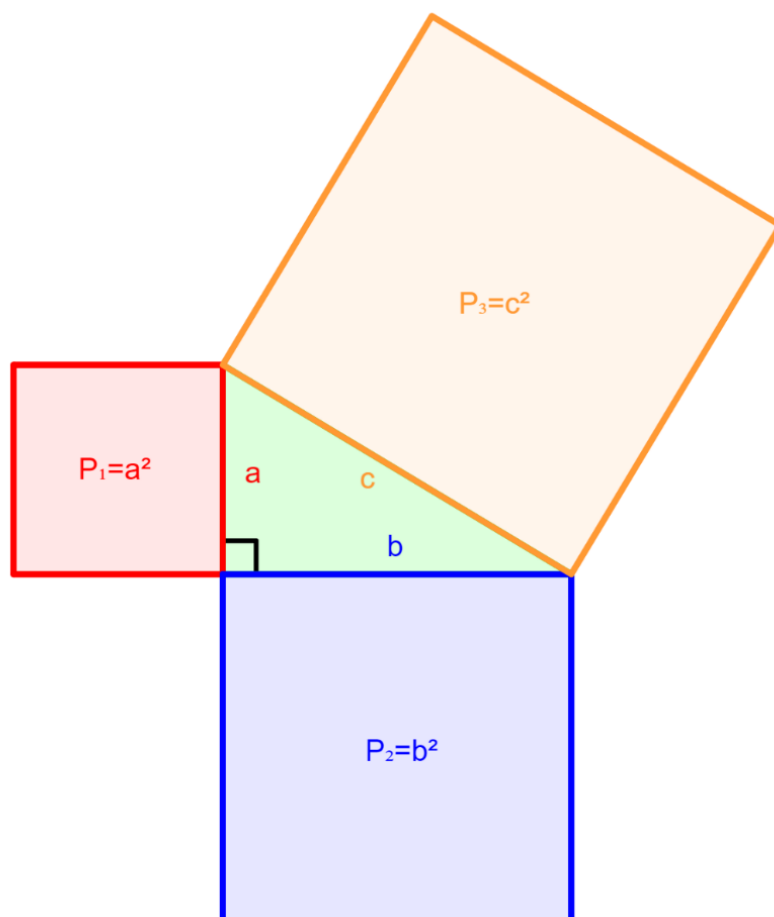
Rys. 22

Przejdźmy zatem do **twierdzenia Pitagorasa**. Co ciekawe, wcale nie on to twierdzenie odkrył. Nie wiadomo kto tak naprawdę był odkrywcą tego twierdzenia, pewne jest jednak, że to Pitagoras udowodnił je jako pierwszy. Twierdzenie Pitagorasa brzmi następująco:

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

Geometrycznie (rys. 23) twierdzenie to można zinterpretować w następujący sposób:

Suma pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych równa jest polu kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego.

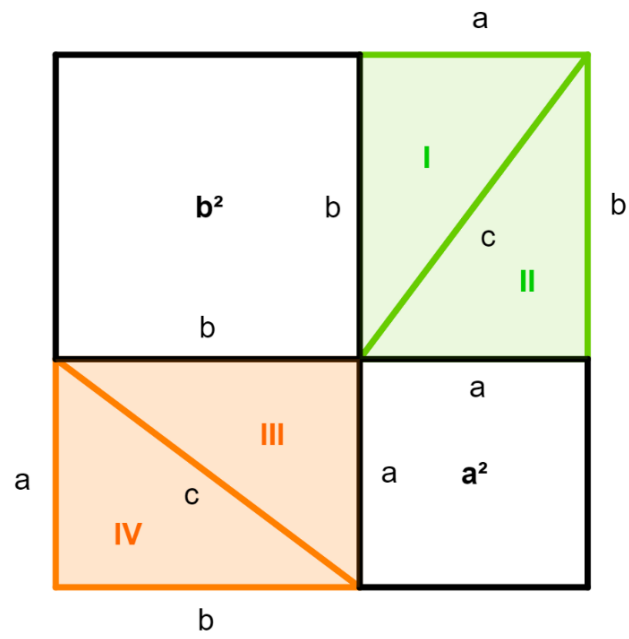


Rys. 23

Matematyka „lubi” dowody więc udowodnię i to twierdzenie. Dowodów jest bardzo dużo, ponad 200. Ja wybrałam jeden, geometryczny dowód *Chou Pei Suang Ching*. Był zapisany w pewnym chińskim dokumencie ale jest przypuszczalnym dowodem, który wyprowadził sam Pitagoras.

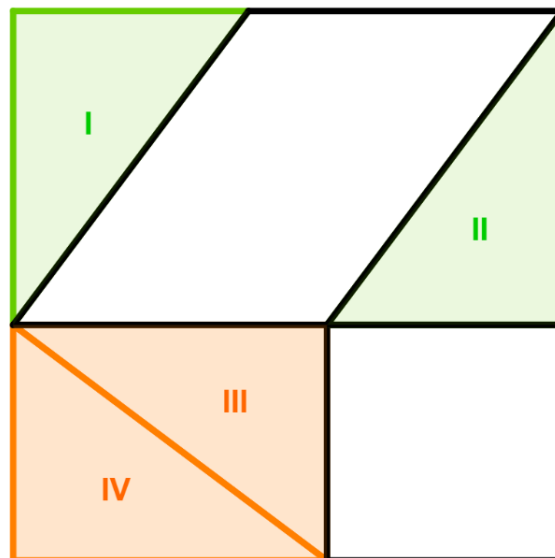
Przeprowadzę go w kilku krokach:

1 - najpierw należy narysować kwadrat o boku $a + b$, a w nim 4 identyczne trójkąty prostokątne *I, II, III, IV* o bokach a, b, c . Należy je ułożyć tak, by tworzyły dwa identyczne prostokąty o bokach a i b . Jak widać, zostały dwa wolne pola – kwadrat o boku a i kwadrat o boku b (rys. 24):



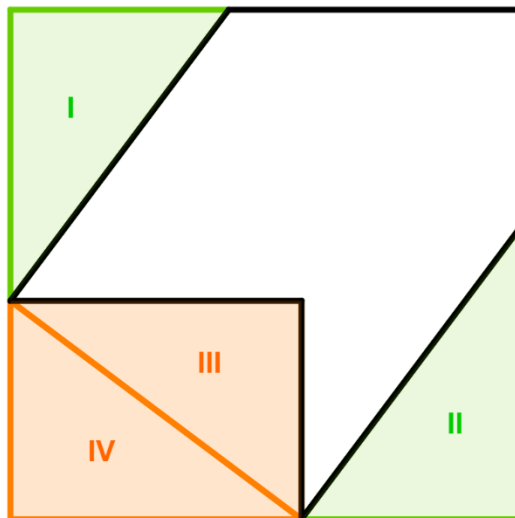
Rys. 24

2 - następnie należy przesunąć trójkąt I maksymalnie w lewo (rys. 25):



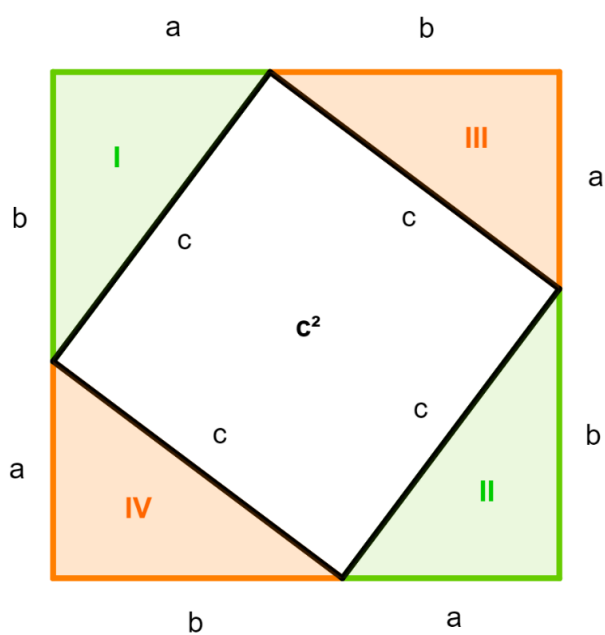
Rys. 25

3 - kolejnym krokiem jest przesunięcie trójkąta II w dół (rys. 26):



Rys. 26

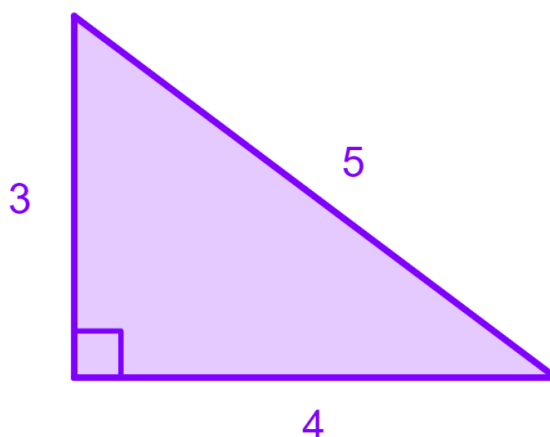
4 - ostatni trójkąt, który przesuniemy to trójkąt III. Należy go przesunąć do prawego, górnego rogu kwadratu (rys. 27):



Rys. 27

Widzimy więc, że powierzchnia dużego kwadratu równa na początku powierzchni kwadratów $a^2 + b^2$ oraz czterech takich samych trójkątów *I*, *II*, *III*, *IV* o bokach a , b , c jest po przekształceniach równa powierzchni kwadratu c^2 i tych samych czterech trójkątów o bokach a , b , c . Zatem powierzchnia kwadratu c^2 jest równa sumie powierzchni kwadratów a^2 i b^2 , co kończy dowód. Pitagoras miał rację !

Trójkąty spełniające twierdzenie Pitagorasa są nazywane trójkątami pitagorejskimi. Istnieje jednak szczególny trójkąt pitagorejski – **trójkąt egipski** (rys. 28). Stosunek jego boków to 3:4:5. Swoją nazwę zawdzięcza tym, którzy się nim powszechnie posługiwali. Egipcjanie podczas budowy swoich piramid wykorzystywali go do odmierzenia kąta prostego. Ciekawostką jest, że w trójkącie egipskim długości boków i pole powierzchni są kolejnymi liczbami naturalnymi (3, 4, 5, 6). Trójkąt egipski jest trójkątem wymiernym (długości boków i pole powierzchni są liczbami wymiernymi), średniobocznym (długości boków są kolejnymi liczbami naturalnymi).



Rys. 28

Skoro jesteśmy już przy trójkątach pitagorejskich to omówmy jeszcze **trójkąt Keplera**. Johannes Kepler (rys. 29) był niemieckim matematykiem, astronomem i astrologiem. Żył na przełomie XVI i XVII wieku. Nie tylko **trójkąt Keplera** został nazwany na cześć tego matematyka. Kolejnym zjawiskiem nazwanym jego nazwiskiem jest pewna supernowa – *Gwiazda Keplera*, jeden z kraterów na Księżycu, Kosmiczny Teleskop Keplera i dotyczące ruchu planet *prawa Keplera*.



Rys. 29

Wróćmy do tematu trójkąta Keplera. Jest to szczególny *trójkąt pitagorejski*. Długości jego boków są bowiem powiązane ze **złotym podziałem**. Jak wiadomo złoty podział to podział odcinka a na mniejsze części: b (dłuższy odcinek) oraz c (krótszy odcinek) tak aby:

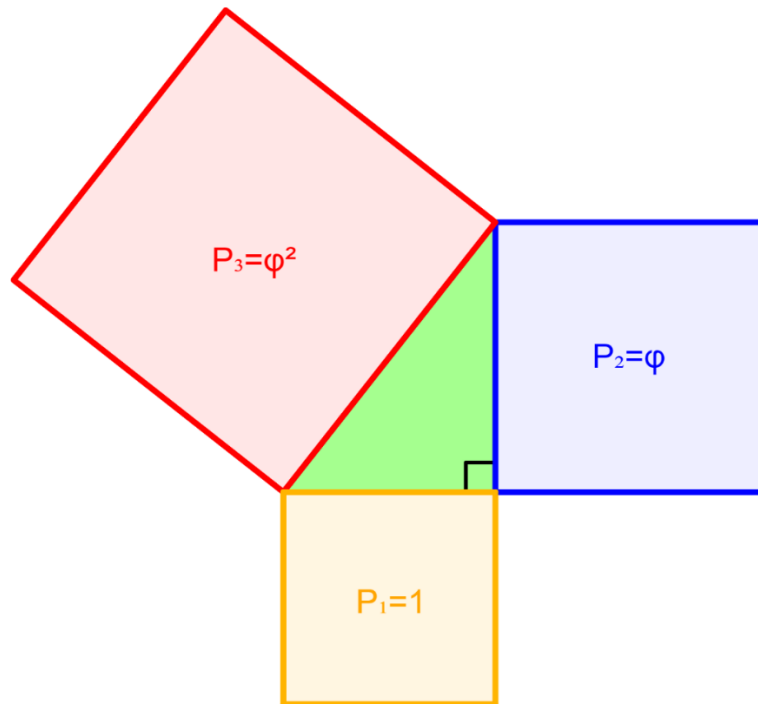
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

Słownie można to ująć tak:

Całość w stosunku do dłuższego odcinka ma się tak, jak dłuższy odcinek do krótszego.

Niezależnie od długości odcinka a podział ten zawsze będzie się równał jednej liczbie oznaczonej φ (*phi*). Jest to liczba nieskończona. Jest ona również nazywana **złotą liczbą**. W przybliżeniu wynosi **1,618**.

Trójkąt Keplera ma boki związane z tą liczbą. Boki tego trójkąta wynoszą 1 , $\sqrt{\varphi}$, φ . A więc kwadraty boków będą równe 1 , φ , φ^2 (rys. 30).



Rys. 30

Johannes Kepler stworzył trójkąt z użyciem dwóch bardzo ważnych elementów matematyki. Sam kiedyś powiedział:

Geometria ma dwa wielkie skarby: jednym jest twierdzenie Pitagorasa, a drugim podział odcinka w złoty sposób; pierwszy z nich możemy porównać do złota, a drugi do drogiego klejnotu.

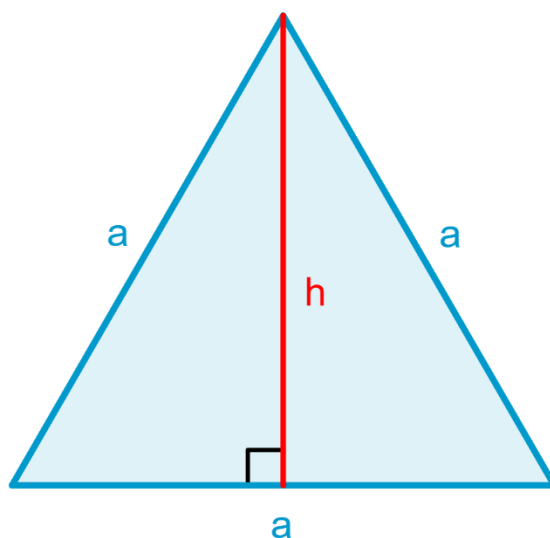
Szczególnym trójkątem jest również **trójkąt równoboczny** gdyż ma wszystkie boki tej samej długości i wszystkie kąty tej samej miary (rys. 31). Posługując się właśnie twierdzeniem Pitagorasa udowodnię wzór na pole powierzchni trójkąta równobocznego:

$$P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

gdzie:

- a to długość boku trójkąta.

Teraz udowodnię ten wzór w oparciu o twierdzenie Pitagorasa i wzór na pole trójkąta $P = \frac{ah}{2}$ (gdzie a to podstawa trójkąta, a h to opadająca na nią wysokość).



Rys. 31

Najpierw konieczne będzie obliczenie wysokości trójkąta równobocznego. Aby to zrobić wykorzystajmy twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego będącego połową naszego trójkąta równobocznego:

$$\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + h^2 = a^2$$

$$\frac{1}{4}a^2 + h^2 = a^2$$

Teraz pozostaje obliczyć h :

$$h^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2$$

$$h^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

A teraz podstawmy h do wzoru na pole trójkąta:

$$P = \frac{ah}{2}$$

$$P = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Wszystko się zgadza, wzór jest udowodniony !

Jeżeli jesteśmy w świecie trójkątów równobocznych, przejdźmy jeszcze do pewnego twierdzenia związanego z takimi trójkątami. Będzie to **twierdzenie Napoleona**. Ponoć jego odkrywcą jest sam Napoleon Bonaparte (rys. 32), który był przecież przede wszystkim dowódcą wojskowym i działaczem politycznym, a nie matematykiem. Nie ma jednak dowodów, że to on odkrył to twierdzenie. Mimo tej niepewności twierdzenie nosi jego imię.



Rys. 32

Twierdzenie Napoleona brzmi następująco:

Ortocentra trójkątów równobocznych zbudowanych na bokach dowolnego trójkąta są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

Oczywiście zamierzam udowodnić to twierdzenie. Przyda nam się do tego rysunek (rys. 33). Skoro trójkąty narysowane na bokach trójkąta $\triangle ABC$ są równoboczne to wszystkie ich kąty wewnętrzne są równe 60° oraz:

$$\frac{|AM|}{|AC|} = \frac{|AN|}{|AB|} = \frac{|CL|}{|BC|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Stąd:

$$\sphericalangle MAN = \sphericalangle CAZ$$

Skoro:

$$\frac{|AM|}{|AC|} = \frac{|AN|}{|AB|}$$

to trójkąty $\triangle AMN$ i $\triangle ACZ$ są podobne.

A zatem:

$$|MN| = |CZ| \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

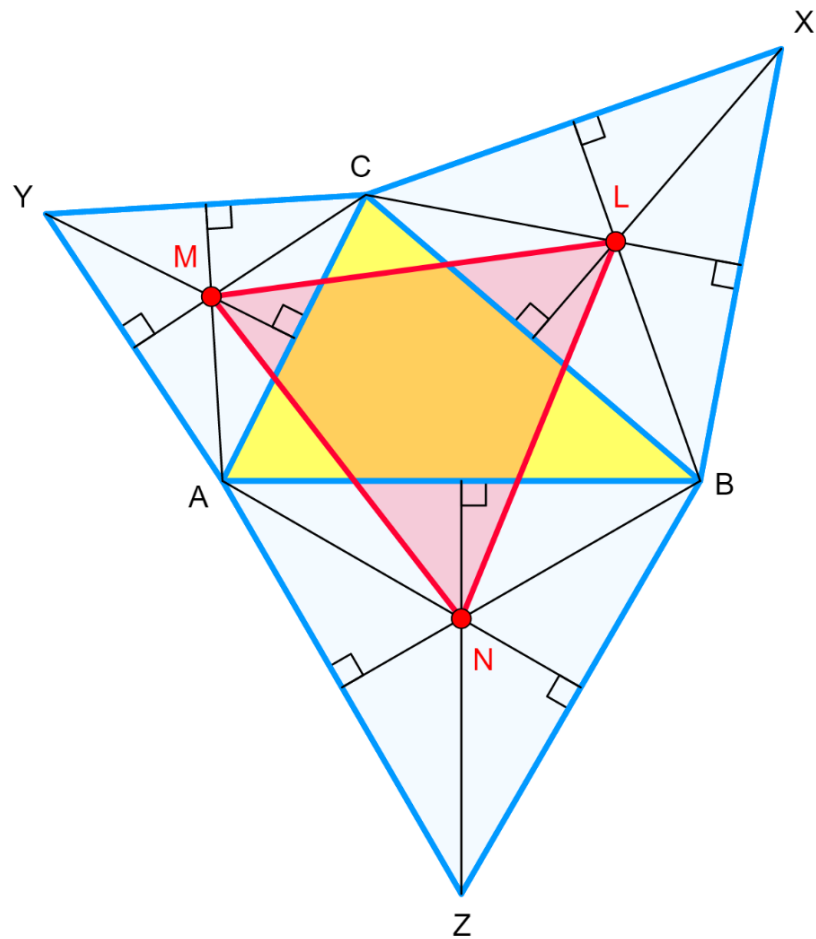
Analogicznie trójkąty $\triangle BLN$ i $\triangle BCZ$ też są podobne, zatem:

$$|LN| = |CZ| \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Więc:

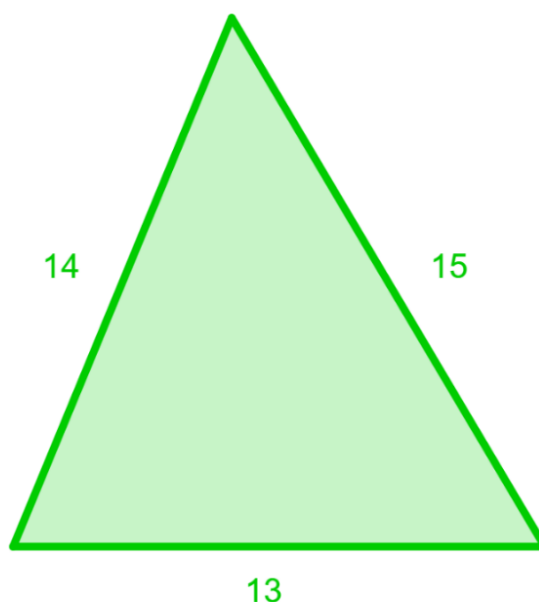
$$|LN| = |MN| = |LM|$$

A zatem trójkąt $\triangle LMN$ jest równoboczny.



Rys. 33

Pokażę jeszcze jeden szczególny trójkąt – **trójkąt indyjski** (rys. 34). Tak samo jak egipski jest trójkątem o określonych długościach boków: 13, 14, 15. Nie jest oczywiście trójkątem pitagorejskim jak trójkąt egipski ale również jest trójkątem wymiernym średniobocznym.



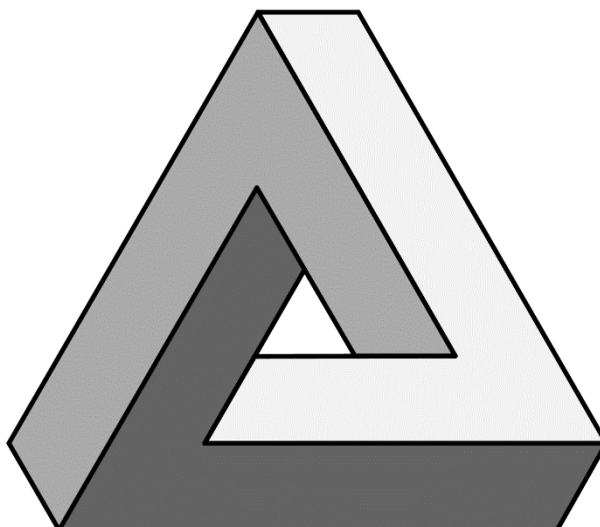
Rys. 34

Na koniec omawiania tych szczególnych trójkątów przejdę do pewnego niecodziennego trójkąta – trójkąta Penrose'a. Zanim opowiem o samym trójkącie, kilka słów o matematyku, któremu ta figura zawdzięcza swoją nazwę. Roger Penrose (rys. 35) to żyjący do dziś brytyjski matematyk i fizyk. Otrzymał Nagrodę Nobla w dziedzinie fizyki. Wraz ze Stephenem Hawkingiem udowodnił twierdzenie o osobliwościach w ogólnej teorii względności.



Rys. 35

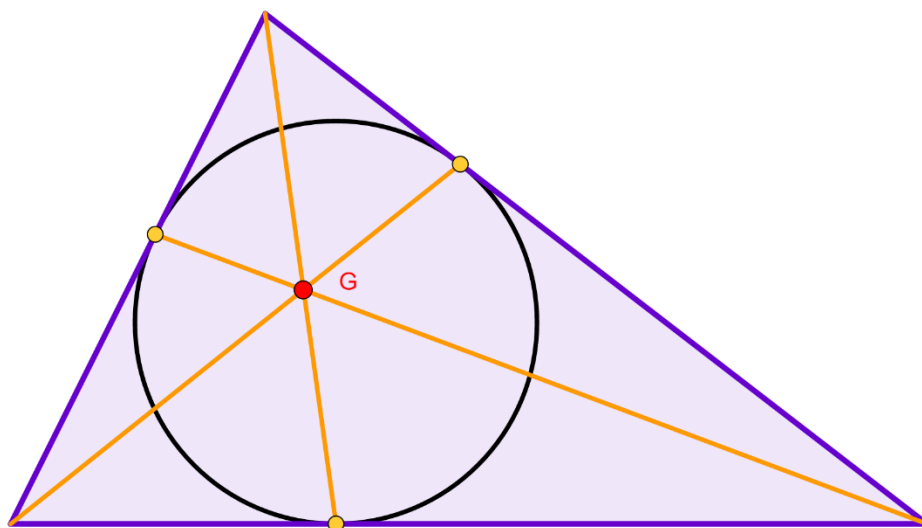
Teraz przejdę do jego trójkąta. Trójkąt Penrose'a (rys. 36) to figura niemożliwa i zarazem złudzenie optyczne. Trójkąt Penrose'a wymyślił w 1936 roku szwedzki grafik Oscar Reutersvärd. Niezależnie od niego trójkąt ten odkrył i spopularyzował w latach pięćdziesiątych XX wieku właśnie Roger Penrose. Nazwał go *niemożliwością w najczystszej postaci*.



Rys. 36

7. Jeszcze dwa szczególne punkty

W trójkącie można skonstruować i wyznaczyć wiele specjalnych punktów. Są nimi np. wcześniej opisane ortocentrum, barycentrum, środek okręgu wpisanego w trójkąt i środek okręgu opisanego na trójkącie. Następnym jest **punkt Gergonne'a** (rys. 37). Jest to punkt przecięcia trzech odcinków. Aby je wyznaczyć najpierw trzeba wpisać w trójkąt okrąg. Później wyznaczyć punkty styczności okręgu i boków trójkąta (zaznaczone na rysunku żółtym kolorem). Następnie należy narysować odcinki od punktów styczności do wierzchołków. Punkt przecięcia tych odcinków to właśnie **punkt Gergonne'a** (na rysunku zaznaczony G czerwonym kolorem).



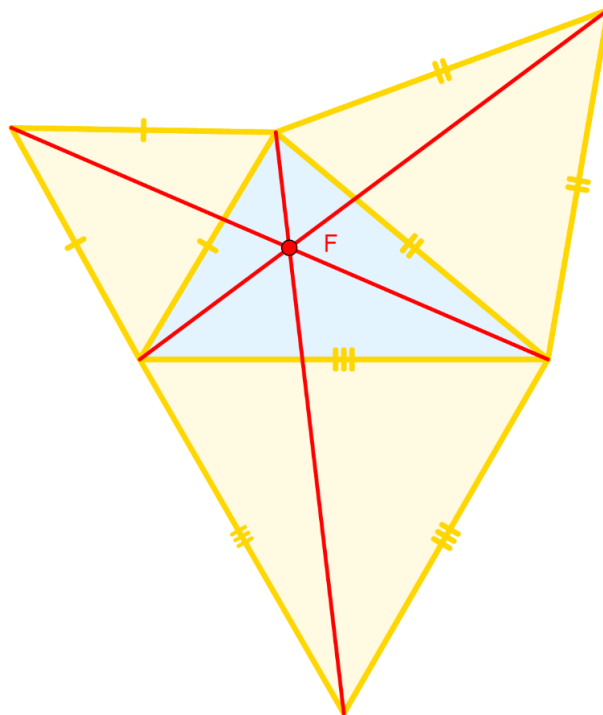
Rys. 37

Kolejnym jest **punkt Fermata**. Pierre de Fermat (rys. 38) był wielkim francuskim matematykiem, z wykształcenia prawnikiem i lingwistą. Większość jego prac matematycznych została opublikowana dopiero po śmierci przez syna, Samuela. Pierre de Fermat dokonał wielu odkryć w teorii liczb, m.in. sformułował słynne, wielkie *twierdzenie Fermata*.



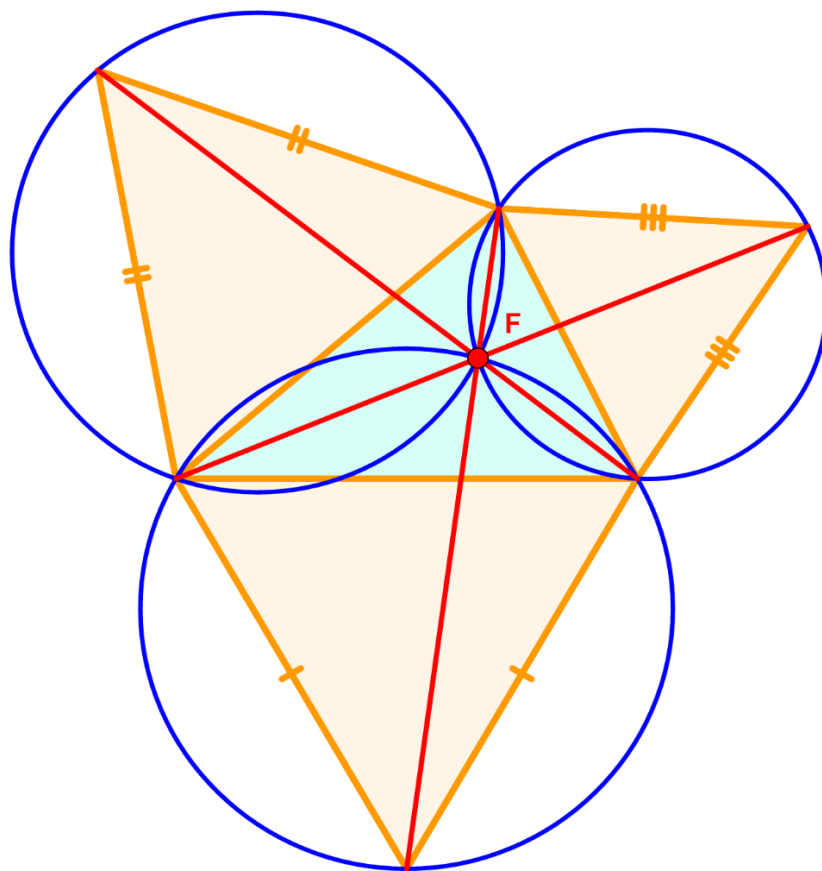
Rys. 38

Punkt Fermata (na rys. 39 zaznaczony jako F) to punkt w trójkącie, którego *suma odległości od wierzchołków trójkąta jest najmniejsza z możliwych*. Jeśli wszystkie kąty trójkąta mają miary mniejsze niż 120° to punkt Fermata jest punktem przecięcia się odcinków łączących wierzchołki trójkąta z tymi wierzchołkami trójkątów równobocznych zbudowanych na bokach trójkąta.



Rys. 39

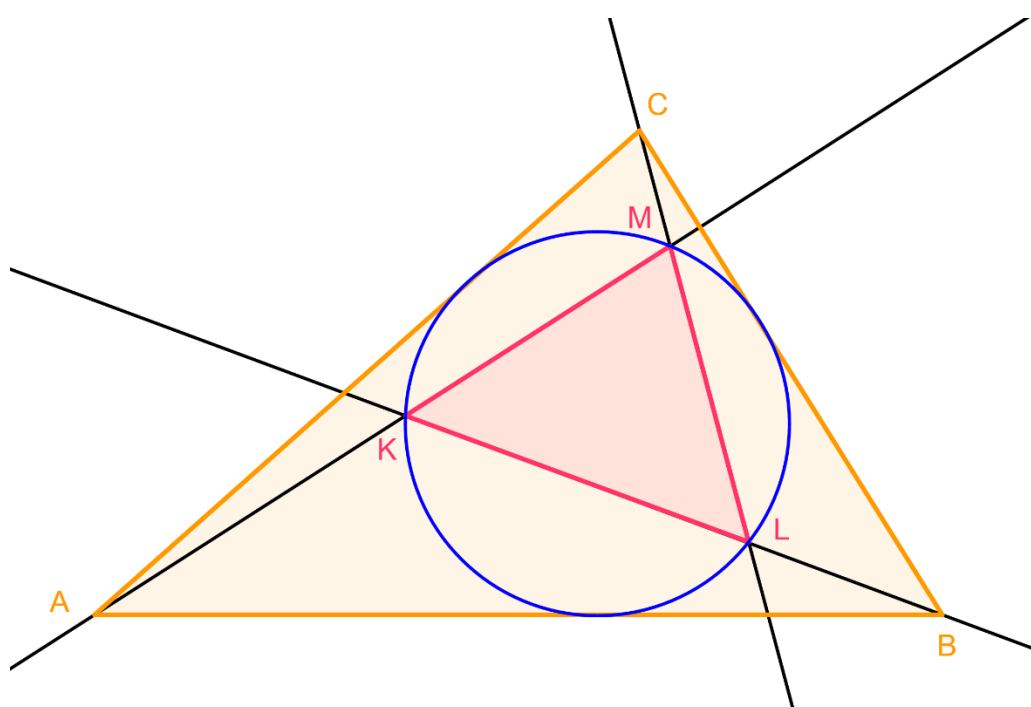
Gdyby jeden z kątów trójkąta miał miarę co najmniej 120° to wierzchołek przy tym kącie byłby punktem Fermata i powyższa konstrukcja geometryczna daje punkt, którego suma odległości od wierzchołków nie jest najmniejsza. Punkt Fermata ma również ciekawą właściwość – jest punktem przecięcia się okręgów opisanych na trójkątach równobocznych zbudowanych na bokach danego trójkąta



Rys. 40

8. Trójkąt wiecznie młody.

Polski gimnazjalista, Filip Rękawek, przedstawił w 2018 roku zupełnie nową, autorską konstrukcję matematyczną – **trójkąt kappa**. Weźmy trójkąt $\triangle ABC$. Przez każdy wierzchołek trójkąta przeprowadzono prostą tak, by przecinała przeciwległy bok. Punkty przecięć prostych nazwijmy K , L , M . Jeśli trójkąt $\triangle KML$ jest wpisany w okrąg wpisany w trójkąt $\triangle ABC$ to będzie on trójkątem *kappa* dla trójkąta $\triangle ABC$ (rys.).



Rys. 41

Każdy trójkąt ma swój trójkąt kappa, i każdy trójkąt jest trójkątem kappa dla innego trójkąta. W trójkątach równoramiennych trójkąty kappa wiążą się ze wszechobecnym w świecie złotym podziałem... Świat trójkątów kryje zatem w sobie jeszcze kolejne ciekawe właściwości i tajemnice.

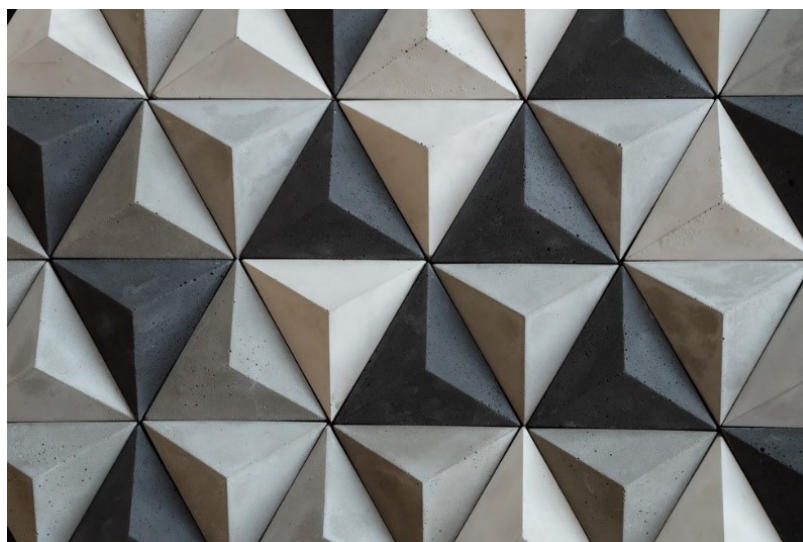
9. Zastosowanie trójkątów.

Trójkąty mają zastosowanie nie tylko w matematyce ale też w życiu codziennym. Przede wszystkim w konstrukcjach budowlanych. Przykładem jest chociażby wcześniej wspomniany trójkąt egipski i piramidy. Do dziś wielu budowlanców korzysta z trójkąta egipskiego, by sprawdzić czy kąt pomiędzy ścianami jest prosty. Wspaniałym przykładem jest kopuła Fullera (rys. 42). Zazwyczaj jest tworzona właśnie z trójkątów.



Rys. 42

Skoro posadzki można wypełnić figurami foremnymi tylko na 3 sposoby, a jednym z nich jest trójkąt to bardzo często można zobaczyć podłogi wykładane mozaikami właśnie z trójkątów (rys. 43).



Rys. 43

Trójkąty są też bardzo przydatne w geodezji. *Triangulacja* to pewna metoda pomiaru osnów geodezyjnych. Polega na określeniu wielkości wszystkich kątów i jednej długości w sieci składającej się z trójkątów. Pomiar służył określaniu współrzędnych geodezyjnych. Zanim pojawiły się satelity geodezyjne i dostępny dzisiaj dla każdego GPS, geodeci do pomiarów wykorzystywali wieże triangulacyjne (rys. 44). Z każdej wieży obserwować można było co najmniej dwie wieże sąsiednie w sieci. Wieże tworzyły sieć trójkątów, które przylegały do siebie bokami i pokrywały cały kraj.



Rys. 44

Solidność konstrukcyjna trójkąta sprawia, że nawet zwykłe rozkładane drabiny są na nich oparte. Na dobrą sprawę, trójkąt jest najlepszą podstawą. Często spotykane znaki *Uwaga, śliska podłoga!* również są trójkątne. Można dawać wiele przykładów. A domy? Wiele dachów ma trójkątny kształt – dach dwuspadowy (rys. 45). Służy to temu, by deszcz i śnieg w zimie spływał ale jednak znów solidność trójkąta jest tu pomocna. Podobnie jest z mostami kratownicowymi (rys. 46). Przykłady można mnożyć.



Rys. 45



Rys. 46

Jaki stąd można wyciągnąć wniosek ? Trójkąt - jedna z najprostszych figur geometrycznych, badany przez matematyków od zarania nauki, pełny ciekawych właściwości, niezbędny w konstrukcjach budowlanych i mechanice ale ciągle nie do końca zbadany...

Wszystkie rysunki figur geometrycznych w pracy zostały wykonane w programie GeoGebra przeze mnie.

Bibliografia:

Alfred S. Posamentier, Robert Geretschläger, Charles Li, Christian Spritzer;
„Matematyka jakiej nie znacie”

Ian Stewart: *„Liczby natury”*

Edward Scheinerman: *„Przewodnik miłośnika matematyki”*

Szczepan Jeleński: *„Śladami Pitagorasa”*

www.wikipedia.org

www.deltami.edu.pl

www.matematyka.pl

www.crazynauka.pl

www.matemaks.pl

www.matfiz24.pl

www.mnathspace.pl

www.math.edu.pl

www.serwis-matematyczny.pl

www.zobaczycmatematyke.krakow.pl

www.edukator.pl