

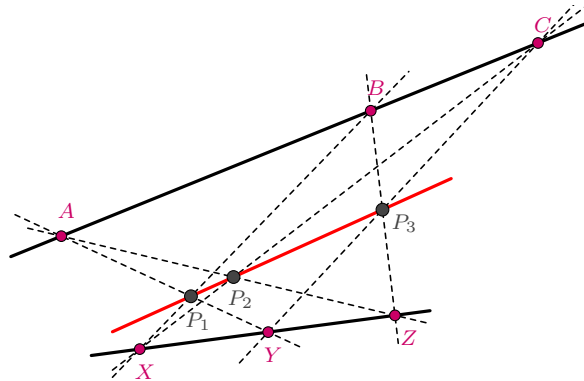
Wokół konfiguracji Pappusa

Julia Antosz

1 Wprowadzenie

Twierdzenie Pappusa jest jednym z najbardziej znanych twierdzeń klasycznej geometrii. W literaturze można znaleźć wiele dowodów tego twierdzenia, opierających się często na skrajnie różnych gałęziach matematyki. Kilka z nich można znaleźć w [1] (str. 11 – 38). Najczęściej twierdzenie Pappusa można spotkać w następującej wersji.

Twierdzenie 1.1 (Twierdzenie Pappusa). *Niech A, B, C oraz X, Y, Z będą dwiema trójkami punktów współliniowych leżących na różnych prostych. Załóżmy, że wszystkie punkty są różne. Jeśli proste AY, BZ, CX przecinają się odpowiednio z prostymi BX, CY, AZ , to powstałe w ten sposób punkty przecięcia P_1, P_2, P_3 są współliniowe (Rysunek 1).*



Rysunek 1: Kolejność (X, Y, Z)

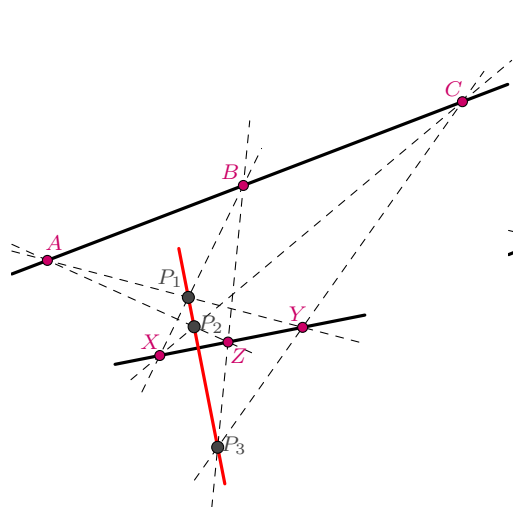
Prosta przechodząca przez punkty P_1, P_2, P_3 czasem nazywana jest prostą Pappusa, natomiast zbiór wszystkich prostych wymienionych w Twierdzeniu 1.1 jest znany jako *konfiguracja Pappusa*. Konfiguracja ta słynie z tego, że składa się z dziewięciu prostych przecinających się ze sobą w taki sposób, że na każdej prostej znajdują się dokładnie 3 punkty, przez które zawsze przechodzą 3 proste.

W rzeczywistości dwie trójki punktów współliniowych prowadzą do sześciu różnych prostych Pappusa, gdyż nazwy punktów na każdej prostej są umowne. Przykładowo punkty X, Y, Z możemy "nazwać" tymi literkami w sześciu następujących kolejnościach:

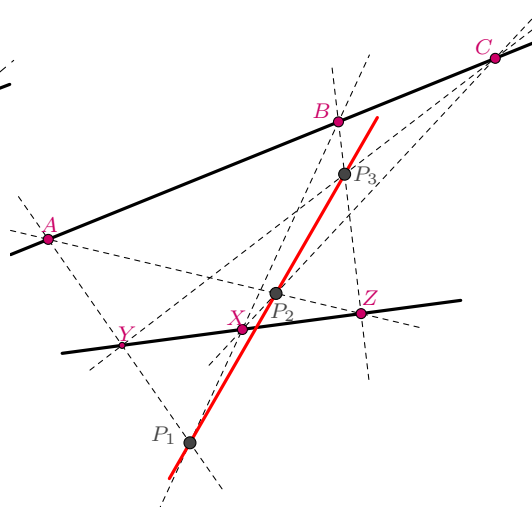
$$(X, Y, Z), (X, Z, Y), (Y, X, Z), (Y, Z, X), (Z, X, Y), (Z, Y, X).$$

Tak więc prosta Pappusa przedstawiona na Rysunku 1 odpowiada kolejności punktów nazwanych w porządku alfabetycznym. Na Rysunkach 2-6 zaprezentowane są

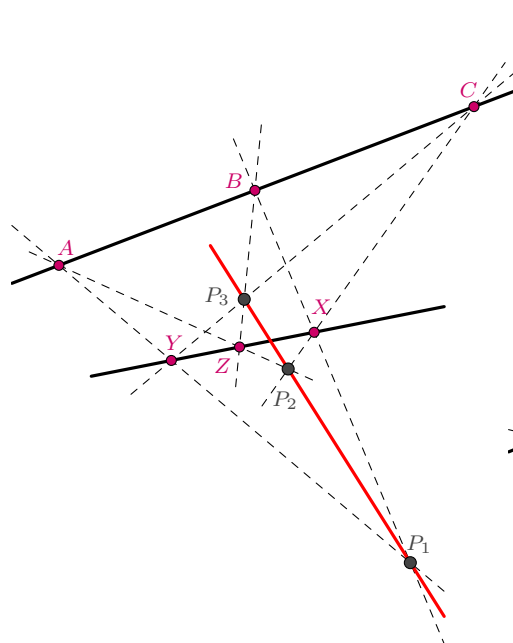
pozostałe proste Pappusa powstałe poprzez nazwanie punktów X, Y, Z w innych możliwych porządkach.



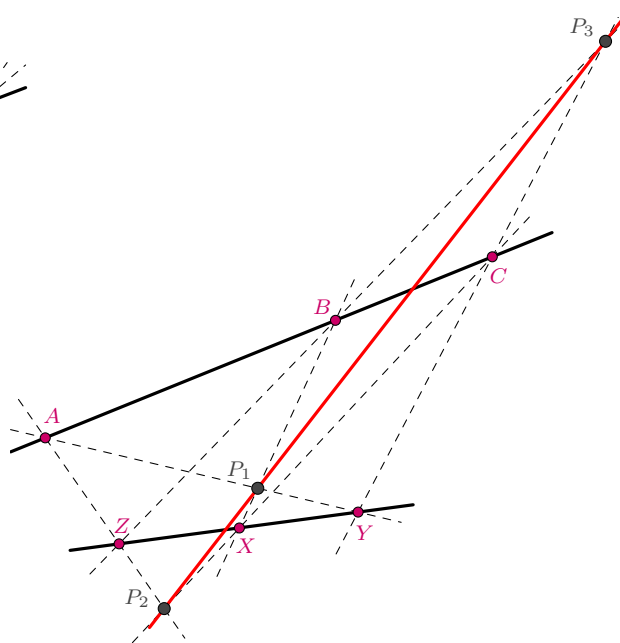
Rysunek 2: Kolejność (X, Z, Y)



Rysunek 3: Kolejność (Y, X, Z)

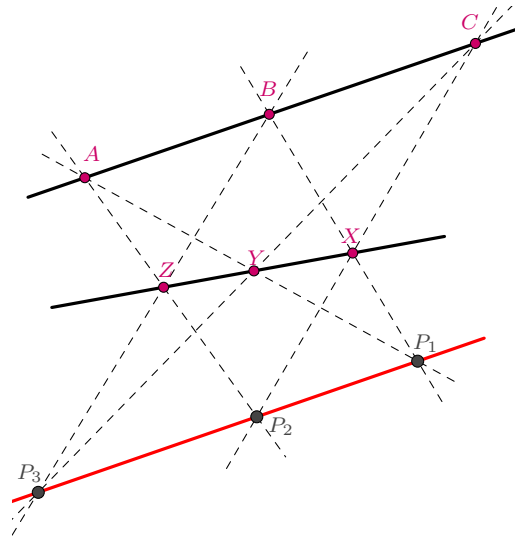


Rysunek 4: Kolejność (Y, Z, X)



Rysunek 5: Kolejność (Z, X, Y)

Podobnie możemy zmienić nazwy punktów A, B, C , ale otrzymamy w ten sposób dokładnie te same proste Pappusa, co przestawiając kolejność liter X, Y, Z , gdyż konfiguracja wciąż będzie składać się z tych samych prostych, jedynie inaczej nazwanych.

Rysunek 6: Kolejność (Z, Y, X)

W ostatnim czasie wzajemne relacje między wszystkimi sześcioma prostymi Pappusa zostały opisane w [3]. Użyto tam własności płaszczyzny rzutowej, aby zbadać możliwe powiązania między prostymi Pappusa, jak również między wyjściowymi dwiema prostymi. W tej pracy skupię się głównie na tym, jakie konfiguracje mogą współtworzyć dwie wyjściowe proste w Twierdzeniu 1.1, czyli proste A, B, C i X, Y, Z , ze zbiorem sześciu prostych Pappusa. Moje rozważania będą dotyczyły płaszczyzny euklidesowej, ze standardowo rozumianym pojęciem odległości.

W geometrii rzutowej pojęcie odległości nie jest zdefiniowane, zatem nie jest możliwe rozważanie pewnych obiektów, które na płaszczyźnie euklidesowej możemy powiązać z odległością. Skupię się więc na tych aspektach, które na płaszczyźnie rzutowej nie mogły być rozważane.

2 Płaszczyzna euklidesowa z układem współrzędnych

Zacznę od przypomnienia podstawowych wiadomości na temat płaszczyzny euklidesowej z wprowadzonym kartezjańskim układem współrzędnych. Przyjmujemy, że współrzędne wszystkich punktów płaszczyzny są liczbami rzeczywistymi.

Definicja 2.1 ([4], Definicja 2.1). Prosta nazywamy zbiór wszystkich punktów (x, y) spełniających równanie

$$Ax + By + C = 0,$$

gdzie A, B, C są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, takimi że A i B nie są jednocześnie równe 0.

Każda prosta może zostać opisana równaniem na nieskończenie wiele sposobów. Poprzez przemnożenie stronami równania z Definicji 2.1 przez dowolną liczbę rzeczywistą różną od 0, otrzymamy równanie równoważne, które opisuje ten sam zbiór punktów na płaszczyźnie.

Twierdzenie 2.2. Niech $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ będą dwoma różnymi punk-

tami na płaszczyźnie. Wówczas

$$\det \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{bmatrix} = 0$$

jest równaniem prostej przechodzącej przez punkty A i B .

Konsekwencją Twierdzenia 2.2 jest następujący wniosek.

Wniosek 2.3. Niech $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ i $C = (x_C, y_C)$ będą trzema różnymi punktami na płaszczyźnie. Punkty te są współliniowe, wtedy i tylko wtedy gdy

$$\det \begin{bmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Zależności przedstawione w Twierdzeniu 2.2 i Wniosku 2.3 są w [4] sformułowane jako Twierdzenie 2.5. W dalszych rozważaniach przydatne będą związki między wzajemnym położeniem dwóch prostych na płaszczyźnie, a ich równaniami, a także wzór na odległość punktu od prostej.

W Twierdzeniach 2.4-2.6 zakładamy oczywiście, że współczynniki A i B (odpowiednio A_1, B_1 oraz A_2, B_2) nie są równocześnie równe zero (zgodnie z Definicją 2.1).

Twierdzenie 2.4 ([2], Twierdzenie 1, str. 209). *Proste o równaniach $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$A_1B_2 = A_2B_1.$$

Twierdzenie 2.5 ([2], Twierdzenie 2, str. 210). *Proste o równaniach $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Twierdzenie 2.6 ([2], Twierdzenie 1, str. 218). *Odległość punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$ wyraża się wzorem*

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Powyższy wzór jest prawdziwy również, gdy punkt P leży na prostej. Wówczas spełnia on równanie tej prostej i licznik ułamka w Twierdzeniu 2.6 jest równy 0.

Teoria wprowadzona w tej części obejmuje zakres wiadomości z tzw. szkoły średniej, choć równanie prostej nie jest podawane w podręcznikach za pomocą wyznacznika macierzy, a w postaci gotowej formuły, która w istocie jest rospisanym wyznacznikiem z Twierdzenia 2.2. Zainteresowany czytelnik może porównać ze wzorem podanym na str. 5 karty maturalnych wzorów matematycznych od roku 2015 ([5]).

Ostatnie pojęcie potrzebne do dalszych rozważań wykracza poza zakres szkolny, dlatego zilustruję je odpowiednim przykładem.

Definicja 2.7 ([4], Definicja 5.7). Dowolne 3 niewspółliniowe punkty na płaszczyźnie euklidesowej tworzą tzw. *bazę*.

Istota Definicji 2.7 polega na tym, że każdy punkt na płaszczyźnie euklidesowej może zostać przedstawiony za pomocą dowolnych trzech niewspółliniowych punktów.

Przykład 2.8. Punkt o współrzędnych $(5, -8)$ można zapisać następująco:

$$(5, -8) = \frac{1}{2} \cdot (4, 6) + \frac{1}{3} \cdot (0, 12) + 3 \cdot (1, -5).$$

Mówimy, że punkt $(5, -8)$ został zapisany w bazie $\{(4, 6), (0, 12), (1, -5)\}$, a liczby $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ i 3 nazywamy współczynnikami w tej bazie.

Ale ten sam punkt można zapisać za pomocą innych trzech niewspółliniowych punktów. Przykładowo:

$$(5, -8) = 2 \cdot (-1, 3) - 3 \cdot \left(\frac{7}{3}, \frac{22}{3}\right) + 1 \cdot (14, 8).$$

Tym razem punkt $(5, -8)$ został zapisany w bazie $\{(-1, 3), (\frac{7}{3}, \frac{22}{3}), (14, 8)\}$ o współczynnikach 2 , -3 i 1 .

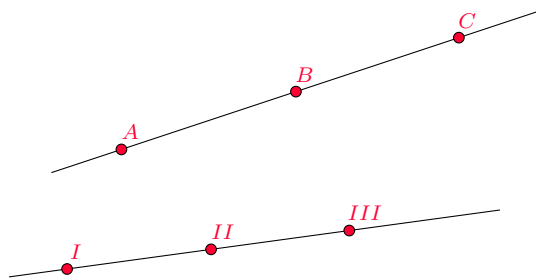
Rachunki przedstawione w powyższym przykładzie prowadzą do następującego wniosku.

Wniosek 2.9. *Każde 3 niewspółliniowe punkty mogą być bazą dla dowolnego punktu na płaszczyźnie. Bez straty ogólności można więc zawsze wybrać 3 niewspółliniowe punkty w sposób dowolny.*

3 Konstrukcja konfiguracji Pappusa za pomocą bazy

W tej części pracy przedstawię konstrukcję konfiguracji Pappusa krok po kroku, startując od ustalonych trzech punktów niewspółliniowych. Pozostałe punkty zostaną wprowadzone przy użyciu parametrów.

Aby wyznaczyć równania wszystkich sześciu prostych Pappusa potrzebne są równania wszystkich dziewięciu prostych łączących punkty z prostej A, B, C z punktami z prostej X, Y, Z . W zależności od rozpatrywanej kolejności punktów X, Y, Z będę brać pod uwagę wybrane 6 z tych dziewięciu prostych. Ponieważ nazwy punktów X, Y, Z będą się zmieniać, chcąc uniknąć kolizji oznaczeń, punkty na tej prostej oznaczę jak na Rysunku 7. Przykładowo prostą łączącą punkty B i III będę od tej chwili oznaczać $III.B$.



Rysunek 7

Doprecyzowując, jeśli będę rozpatrywać kolejność (Y, Z, X) , to prosta $I.A$ będzie odpowiadać prostej AY w wypowiedzi twierdzenia Pappusa. Analogicznie prosta $III.B$ będzie odpowiadać prostej BX .

Z Wniosku 2.9 wiemy, że 3 niewspółliniowe punkty możemy ustalić w sposób dowolny. W szczególności możemy więc przyjąć ich współrzędne w sposób wygodny dla dalszych rachunków. Przypomnę, że konfiguracja Pappusa jest zdeterminowana przez 6 punktów leżących po 3 na dwóch prostych (Twierdzenie 1.1). Mogę ustalić sobie 3 z tych punktów, ale nie mogą to być równocześnie A, B, C , ani I, II, III , gdyż muszę wybrać punkty niewspółliniowe.

Rozpaczynam więc konstrukcję przyjmując, że:

$$II = (0, 0), \quad A = (1, 0), \quad C = (1, 1).$$

To pozwala mi wyznaczyć następujące równania prostych:

$$AC : x - 1 = 0,$$

$$II.A : y = 0,$$

$$II.C : x - y = 0.$$

Aby móc kontynuować konstrukcję muszę wprowadzić jeszcze 3 punkty, ale tych już nie mogę wybrać konkretnie. Mogę je jednak uzależnić od bazy, wprowadzając ich współrzędne za pomocą parametrów. Najpierw wybieram punkt B na prostej AC . Mogę zapisać jego współrzędne jako

$$B = (1, t),$$

gdzie t jest pewną liczbą rzeczywistą. Ponieważ wszystkie punkty w konfiguracji są różne, to $t \neq 0$ i $t \neq 1$.

Ponadto biorę prostą L_{II} przechodzącą przez punkt II . Ma więc ona równanie postaci

$$\alpha x + \beta y = 0,$$

gdzie liczby rzeczywiste α i β nie mogą być równocześnie równe 0. Ponieważ jednak wszystkie proste muszą być różne, wnioskuję, że $\alpha \neq 0$. W przeciwnym wypadku prosta L_{II} pokryłaby się z prostą $II.A$. Ostatecznie mogę więc przyjąć, że L_{II} ma równanie

$$L_{II} : x + ay = 0$$

dla pewnej liczby $a \neq -1$ (aby L_{II} nie pokryła się z prostą $II.C$).

W kolejnym kroku wybieram na prostej L_{II} dwa brakujące punkty. Mogę wyrazić ich współrzędne w następujący sposób:

$$I = (-ab, b) \text{ i } III = (-ac, c)$$

dla $b \neq 0$, $c \neq 0$ i $b \neq c$. Teraz mogę już wyznaczyć równania wszystkich pozostałych prostych:

$$I.A : bx + (1 + ab)y - b = 0,$$

$$I.B : (b - t)x + (1 + ab)y - abt - b = 0,$$

$$I.C : (b - 1)x + (1 + ab)y - ab - b = 0,$$

$$II.B : tx - y = 0,$$

$$III.A : cx + (1 + ac)y - c = 0,$$

$$III.B : (c - t)x + (1 + ac)y - act - c = 0,$$

$$III.C : (c - 1)x + (1 + ac)y - ac - c = 0.$$

Aby znaleźć współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych wystarczy rozwiązać układ równań utworzony z równań tych prostych. W tym miejscu pojawiają się dodatkowe założenia na wartości parametrów a, b, c, t . Założenia te wynikają z faktu, że punkty P_1, P_2, P_3 , o których mówi twierdzenie Pappusa muszą istnieć. Tak więc odpowiednie proste łączące punkty A, B, C z punktami I, II, III nie mogą być równoległe. Po rozważeniu wszystkich 6-ciu porządków punktów X, Y, Z , ustaliłam, że następujące pary prostych nie mogą być prostymi równoległymi:

$$\begin{aligned} & I.A \text{ i } II.B, \quad I.A \text{ i } III.B, \quad I.A \text{ i } II.C, \quad I.A \text{ i } III.C, \quad II.A \text{ i } I.B, \\ & II.A \text{ i } III.B, \quad II.A \text{ i } I.C, \quad II.A \text{ i } III.C, \quad III.A \text{ i } I.B, \quad III.A \text{ i } II.B, \\ & III.A \text{ i } I.C, \quad III.A \text{ i } II.C, \quad I.B \text{ i } II.C, \quad I.B \text{ i } III.C, \quad II.B \text{ i } I.C, \\ & II.B \text{ i } III.C, \quad III.B \text{ i } I.C, \quad III.B \text{ i } II.C. \end{aligned}$$

Każda para odpowiada któremuś z trzech punktów leżących na sześciu prostych Pappusa (łącznie 18 punktów). Korzystając z Twierdzenia 2.4 otrzymałam więc, że dodatkowo trzeba uwzględnić następujące warunki:

- $abt + b + t \neq 0$,
- $abt + b + t - c \neq 0$,
- $ab + b + 1 \neq 0$,
- $ab + b - c + 1 \neq 0$,
- $b \neq t$,
- $c \neq t$,
- $b \neq 1$,
- $c \neq 1$,
- $act + c + t - b \neq 0$,
- $act + c + t \neq 0$,
- $ac + c - b + 1 \neq 0$,
- $ac + c + 1 \neq 0$,
- $ab + b - t + 1 \neq 0$,
- $act - ab + c + t - b - 1 \neq 0$,
- $abt + b + t - 1 \neq 0$,
- $act + c + t - 1 \neq 0$,
- $abt - ac + b - c + t - 1 \neq 0$,
- $ac + c - t + 1 \neq 0$.

W poniższej tabeli podaję współrzędne punktów P_1, P_2 i P_3 dla wszystkich możliwych kolejności, w jakich mogą zostać nazwane punkty I, II, III za pomocą liter X, Y, Z .

(X, Y, Z)	$P_1 = II.A \cap I.B = \left(\frac{b(1+at)}{b-t}, 0 \right)$
	$P_2 = I.C \cap III.A = \left(\frac{a^2bc+ab+b-c}{b-1-ac-c}, \frac{-c(1+ab)}{b-1-ac-c} \right)$
	$P_3 = III.B \cap II.C = \left(\frac{c(1+at)}{1+ac+c-t}, \frac{c(1+at)}{1+ac+c-t} \right)$
(X, Z, Y)	$P_1 = III.A \cap I.B = \left(\frac{-a^2bct-abt-b+c}{act-b+c+t}, \frac{ct(1+ab)}{act-b+c+t} \right)$
	$P_2 = I.C \cap II.A = \left(\frac{b(a+1)}{b-1}, 0 \right)$
	$P_3 = II.B \cap III.C = \left(\frac{c(a+1)}{act+c+t-1}, \frac{ct(a+1)}{act+c+t-1} \right)$
(Y, X, Z)	$P_1 = I.A \cap II.B = \left(\frac{b}{abt+b+t}, \frac{bt}{abt+b+t} \right)$
	$P_2 = II.C \cap III.A = \left(\frac{c}{ac+c+1}, \frac{c}{ac+c+1} \right)$
	$P_3 = III.B \cap I.C = \left(\frac{a^2bct-a^2bc-ab+act-b+c}{-abt+ac-b+c-t+1}, \frac{-abct+abc-abt+act-bt+c}{-abt+ac-b+c-t+1} \right)$
(Y, Z, X)	$P_1 = I.A \cap III.B = \left(\frac{-a^2bct-act+b-c}{abt+b-c+t}, \frac{bt(1+ac)}{abt+b-c+t} \right)$
	$P_2 = III.C \cap II.A = \left(\frac{c(a+1)}{c-1}, 0 \right)$
	$P_3 = II.B \cap I.C = \left(\frac{b(a+1)}{abt+b+t-1}, \frac{bt(a+1)}{abt+b+t-1} \right)$
(Z, X, Y)	$P_1 = III.A \cap II.B = \left(\frac{c}{act+c+t}, \frac{ct}{act+c+t} \right)$
	$P_2 = II.C \cap I.A = \left(\frac{b}{ab+b+1}, \frac{b}{ab+b+1} \right)$
	$P_3 = I.B \cap III.C = \left(\frac{a^2bct-a^2bc+abt-ac+b-c}{ab-act+b-c-t+1}, \frac{-abct+abc+abt-act-ct+b}{ab-act+b-c-t+1} \right)$
(Z, Y, X)	$P_1 = II.A \cap III.B = \left(\frac{c(1+at)}{c-t}, 0 \right)$
	$P_2 = III.C \cap I.A = \left(\frac{-a^2bc-ac+b-c}{ab+b-c+1}, \frac{b(1+ac)}{ab+b-c+1} \right)$
	$P_3 = I.B \cap II.C = \left(\frac{b(1+at)}{ab+b-t+1}, \frac{b(1+at)}{ab+b-t+1} \right)$

Korzystając z Twierdzenia 2.2 mogą już wyznaczyć równania prostych Pappusa dla każdego z tych przypadków. Aby uprościć oznaczenia od tej pory będą te proste oznaczać jako $L_1 - L_6$ (zgodnie z kolejnością wprowadzoną w poniższej tabeli). Oto ich równania:

(X, Y, Z)	$L_1 : c(t-b)x + (-abc + ct - cb - b)y + bc(1+at) = 0$
(X, Z, Y)	$L_2 : ct(1-b)x + (-abct - bt + b - c)y + tbc(a+1) = 0$
(Y, X, Z)	$L_3 : (bct - bc + bt - ct)x + (abct - abc - b + ct)y + bc(1-t) = 0$
(Y, Z, X)	$L_4 : bt(1-c)x + (-abct - ct - b + c)y + bct(a+1) = 0$
(Z, X, Y)	$L_5 : (bct - bc - bt + ct)x + (abct - abc + bt - c)y + bc(1-t) = 0$
(Z, Y, X)	$L_6 : b(t-c)x + (-abc - bt + ct - c)y + bc(1+at) = 0$

Mając już wszystkie elementy konstrukcji mogą zastanowić się nad szczególnymi położenia między prostymi w konfiguracji Pappusa.

4 Położenia szczególne

W tej części podzielę się przemyśleniami, jakie szczególne układy można utworzyć wykorzystując proste pojawiające się w konfiguracji Pappusa. Głównie skupię się na relacjach prostych L_1, \dots, L_6 z wyjściowymi prostymi, czyli AC oraz L_{II} .

4.1 Równoległość i prostopadłość prostych

Zacznę od ustalenia, czy możliwe jest (i kiedy taka sytuacja zachodzi), żeby proste Pappusa były równoległe albo prostopadłe do prostych AC i L_{II} . Wykorzystam tu zależności z Twierdzeń 2.4 i 2.5.

Przykładowo, aby równoległe były proste L_1 i AC musi być spełniony warunek

$$c(t - b) \cdot 0 = 1 \cdot (-abc + ct - cb - b).$$

Po wykonaniu rachunków ostatecznie otrzymuję postać

$$abc + cb + b - bt = 0.$$

Wyniki porównania wzajemnych relacji między tymi prostymi przedstawiam w tabelach poniżej. Pozostałe rachunki są analogiczne, więc je tu pominię.

Proste $L_1 - L_6$ są równoległe do prostej AC oraz L_{II} wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:

	AC	L_{II}
L_1	$abc + bc - ct + b = 0$	$act + cb - ct + b = 0$
L_2	$abct + bc + c - b = 0$	$act + bt - b + c = 0$
L_3	$abct - abc + ct - b = 0$	$act - abt + ct - b = 0$
L_4	$abct + ct + b - c = 0$	$abt + ct + b - c = 0$
L_5	$abct - abc + bt - c = 0$	$act - abt - bt + c = 0$
L_6	$abc + bt - ct + c = 0$	$abt + bt - ct + c = 0$

Proste $L_1 - L_6$ są prostopadłe do prostej AC oraz L_{II} wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:

	AC	L_{II}
L_1	$c(t - b) = 0$	$a^2bc - act + acb + ab + cb - ct = 0$
L_2	$ct(1 - b) = 0$	$a^2bct + abt + bct + ab + ct - ac = 0$
L_3	$bct - bc + bt - ct = 0$	$a^2bct - a^2bc + act + bct + bt - ab - bc - ct = 0$
L_4	$bt(1 - c) = 0$	$a^2bct + act + bct - ac - bt + ab = 0$
L_5	$bct - bc - bt + ct = 0$	$a^2bct - a^2bc + bct + abt + ct - ac - bc - bt = 0$
L_6	$b(t - c) = 0$	$a^2bc + abt - act + ac + bc - bt = 0$

Dobranie wartości dla zmiennych a, b, c, t , tak aby spełniona była którakolwiek równość wymieniona w powyższych tabelach nie jest zadaniem trudnym. Tak na prawdę w większości przypadków wystarczy wskazać wybrane wartości dla trzech parametrów i w ten sposób otrzymamy wartość ostatniego z nich. Oczywiście wymaga to czujności, aby dobrane wartości były zgodne z początkowymi założeniami oraz z warunkami wyszczególnionymi na str. 7. Istnieje więc nieskończenie wiele możliwości, kiedy to proste L_1, \dots, L_6 są równoległe lub prostopadłe do prostej AC , czy L_{II} .

Przykładowo prosta L_5 jest prostopadła do L_{II} , gdy zachodzi równość

$$a^2bct - a^2bc + bct + abt + ct - ac - bc - bt = 0.$$

Mogę wziąć

$$a = 3, \quad b = -2, \quad c = 5.$$

Po podstawieniu ich do powyższego równania dostaję, że $t = \frac{85}{99}$. Wszystkie te wartości są zgodne z założeniami.

Nie w każdym przypadku taka swoboda w wyborze wartości dla parametrów a, b, c, t jest możliwa. Warunki na prostopadłość między prostą AC i prostymi L_1, \dots, L_6 powodują konkretne ograniczenia.

Przykładowo, spójrzmy kiedy $L_4 \perp AC$. Uzwględniając, że $b \neq 0$, $t \neq 0$ i $c \neq 1$, równanie

$$bt(1 - c) = 0$$

jest sprzeczne. Czyli prosta L_4 nie może być prostopadła do prostej AC . Dokładnie tak samo jest w przypadku prostych L_1, L_2 i L_6 . Jedynymi rozwiązaniami są wartości sprzeczne z założeniami.

W każdym innym przypadku zawsze można dobrać wartości parametrów a, b, c, t , aby proste Pappusa były prostopadłe lub równoległe do AC bądź L_{II} i takich możliwości jest nieskończenie wiele. Przykładowe wartości można znaleźć choćby metodą prób i błędów, ustalając część wartości i resztę od nich uzależniając. Zachęcam do spróbowania swoich sił na tym polu.

W tym miejscu nasuwa się pytanie, czy możliwe jest, aby więcej niż jedna spośród prostych L_1, \dots, L_6 były równocześnie prostopadłe bądź równoległe do prostych AC i L_{II} . Aby to sprawdzić, wystarczy ustalić, czy równości z powyższych tabel mogą być spełnione równocześnie. Zaczniemy od weryfikacji układów dwóch równań.

W odniesieniu do prostopadłości pomiędzy prostymi Pappusa, a prostą AC można na to pytanie odpowiedzieć natychmiast. Jedyna para prostych, którą w tym przypadku jest sens rozważać, to L_3 i L_5 , gdyż pozostałe warunki są sprzeczne. Jednak jedynymi rozwiązaniami układu równań

$$\begin{cases} bct - bc + bt - ct = 0 \\ bct - bc - bt + ct = 0 \end{cases}$$

są $t = 0$ lub $b = c$, a więc wartości wykluczone przez założenia. Zatem prosta AC może być prostopadła jedynie do prostej L_3 albo L_5 i nie jest możliwe, aby więcej niż jedna prosta Pappusa była do prostej AC prostopadła w tym samym czasie.

W innych przypadkach rachunki są zdecydowanie bardziej złożone. Wykonałam je za pomocą witryny *Wolfram Alpha* [6]. Pomijam je tutaj i poniżej prezentuję tylko wnioski.

Wniosek 4.1. *Następujące pary prostych nie mogą być równocześnie równoległe do prostej AC :*

$$L_2 \text{ i } L_3, \quad L_3 \text{ i } L_6.$$

Korzystając ze strony *Wolfram Alpha* [6], metodą prób i błędów udało mi się dla każdej z par nie wymienionych we Wniosku 4.1 znaleźć przykładowe wartości parametrów spełniające zarówno założenia jak i odpowiednie układy równań. Równocześnie dla pozostałych dwóch par udało mi się ustalić, że rozwiązanie układu równań nie istnieje. Przykładowo, gdyby proste L_2 i L_3 były równocześnie równoległe do AC , to prawdziwa musiałaby być równość

$$abct + bc + c - b = abct - abc + ct - b,$$

która prowadzi do równania

$$c(ab + b - t + 1) = 0.$$

Jest ono sprzeczne, gdyż czynnik w drugim nawiasie nie może być równy 0 (str. 7), a $c \neq 0$ z założenia. Podobnie można uzasadnić wynik dla drugiej pary, dlatego pominię szczegóły.

W podobny sposób sprawdziłam, jak to wygląda dla prostej L_{II} .

Wniosek 4.2. *Każda para prostych Pappusa może być równocześnie równoległa do siebie oraz do prostej L_{II} .*

Wniosek 4.3. *Każde dwie proste spośród L_1, \dots, L_6 mogą być równocześnie prostopadłe do prostej L_{II} .*

Analogicznie można sprawdzić, czy możliwe jest, aby więcej niż dwie proste spośród L_1, \dots, L_6 były równocześnie prostopadłe bądź równoległe do którejś z prostych AC lub L_{II} . W tym celu trzeba ustalić rozwiązania układów trzech (czterech, pięciu, sześciu) równań spośród warunków z tabel na str. 9. Jednak jest to dużo bardziej skomplikowane i powstaje ogromna liczba przypadków. Dla trzech równań jest ich 20, bo na tyle sposobów można wybrać 3 spośród 6—ciu warunków, mianowicie:

$$(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 3, 6), (1, 4, 5), (1, 4, 6), (1, 5, 6), \\ (4, 5, 6), (3, 5, 6), (3, 4, 6), (3, 4, 5), (2, 5, 6), (2, 4, 6), (2, 4, 5), (2, 3, 6), (2, 3, 5), (2, 3, 4).$$

Oznacza to łącznie 80 układów równań (40 dla każdej z tabel). Co prawda dla prostej AC część przypadków można automatycznie odrzucić (skoro nie da się dobrać dwóch prostych, to tym bardziej większej liczby), ale mimo wszystko wciąż pozostaje sporo możliwości do rozważenia. Do tego 15 układów czterech równań i 6 układów pięciu równań (wykluczając warunki na prostopadłość względem AC wszystkie liczone trzykrotnie).

Obliczenia też są dużo bardziej zaawansowane, niż wcześniej. Z całą pewnością trudno byłoby je wykonać ręcznie. Przede wszystkim przy większej liczbie równań metoda prób i błędów jest zawodna, gdyż parametrów nie można dobierać aż tak swobodnie, jak dla dwóch warunków. Gdy jest ich więcej, to parametry mogą być wyznaczone jednoznacznie i wybranie losowego powoduje natychmiastową sprzeczność. Z kolei rozwiązanie takiego układu równań metodami tradycyjnymi może się nie udać. Podjęłam próbę sprawdzenia kilku układów trzech równań za pomocą programu *Wolfram Alpha*, ale często okazywał się nieskuteczny. Zatem rozstrzygnięcie, czy warunki z powyższych tabel da się połączyć w większe układy wymaga bardziej zaawansowanych metod obliczeniowych.

Mimo wielu prób nie udało mi się znaleźć przykładowego rozwiązania dla żadnego z układów trzech równań (takiego, aby wartości parametrów spełniały założenia). Nie oznacza to, że takie sytuacje nie są możliwe, ale na chwilę obecną nie jestem w stanie tego rozstrzygnąć.

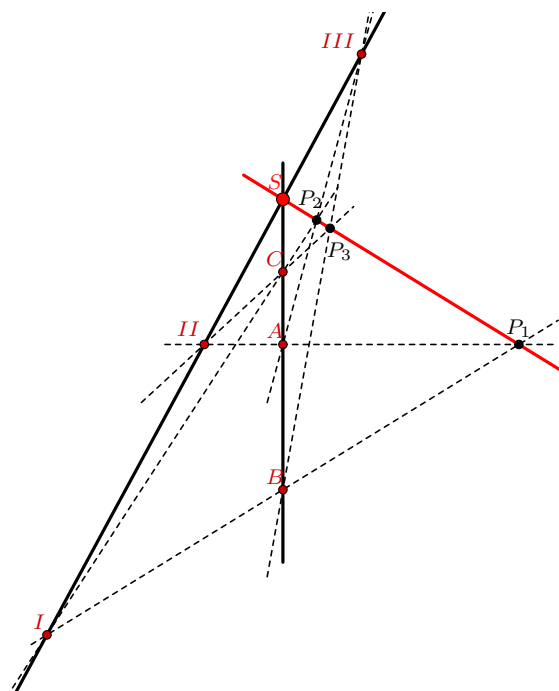
Ciekawym byłoby odpowiedzieć na pytanie, ile warunków maksymalnie możemy połączyć i kiedy jest to możliwe. Można by również rozważać warunki mieszane. Na przykład część prostych równoległych (albo prostopadłych) do prostej AC , a część do prostej L_{II} . Albo część prostych Pappusa równoległych do którejś z prostych, a część prostopadłych do tej samej... Takich kombinacji można wymienić jeszcze mnóstwo. Wszystkie stanowią bardzo ciekawe problemy do zbadania, wymagające jednak trochę większej wiedzy i z pewnością narzędzi obliczeniowych, które poradzą

sobie z coraz bardziej skomplikowanymi układami równań. Póki co nie jestem w stanie zająć się tym problemem.

Mogę jednak zastanowić się nad innymi zależnościami, w których rachunki są zdecydowanie prostsze, a które też wydają mi się interesujące.

4.2 Współpękowość prostych

Mówimy, że proste są współpękowe, gdy przecinają się w jednym punkcie. Proste AC i L_{II} mogą być oczywiście równoległe. Twierdzenie Pappusa nic nie mówi o ich wzajemnym położeniu. Ale jeśli się przecinają, to możemy zastanowić się, przy jakich wartościach parametrów któreś z prostych L_1, \dots, L_6 są współpękowe z AC i L_{II} . Na Rysunku 8 widzimy konfigurację Pappusa z jedną taką prostą.



Rysunek 8

Przy bazie wybranej w taki sposób, jak zostało to zrobione tutaj, proste AC i L_{II} mają punkt wspólny, gdy $a \neq 0$. Oznaczę go przez S (jak na rysunku). Aby znaleźć współrzędne punktu S wystarczy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + ay = 0 \end{cases} ,$$

czyli $S = (1, -\frac{1}{a})$. Prosta Pappusa jest współpękowa z prostymi AC i L_{II} , gdy punkt S spełnia jej równanie. Po podstawieniu współrzędnych S do równań L_1, \dots, L_6 otrzymałam następujące warunki gwarantujące, że punkt S leży na odpowiedniej prostej Pappusa:

L_1	$a^2bct + abc + act + bc - bt + b = 0$
L_2	$a^2bct + abct + act + bt - b + c = 0$
L_3	$abct - abc - abt + act + ct - b = 0$
L_4	$a^2bct + abct + abt + ct + b - c = 0$
L_5	$abct - abc + abt - act + bt - c = 0$
L_6	$a^2bct + abc + abt + bt - ct + c = 0$

W każdym przypadku na nieskończenie wiele sposobów mogą dobrać przykładowe wartości dla parametrów a, b, c, t , aby punkt S leżał na którejś z prostych L_1, \dots, L_6 . Podobnie jak poprzednio, pojawia się pytanie, czy jest to możliwe dla więcej niż jednej prostej równocześnie.

Przypadek ten otwiera też drogę do nowych rozważań. Przypuśćmy, że któraś spośród prostych Pappusa jest współpękowa z prostymi AC i L_{II} . Wtedy możemy się zastanowić, czy może ona zawierać dwusieczną kąta utworzonego przez te proste. Ustalić to można wykorzystując Twierdzenie 2.6. Punkty znajdujące się na dwusiecznej kąta są równoodległe od jego ramion. W naszym przypadku, od prostych AC i L_{II} . Przyjrzyjmy się jednemu przypadkowi bardziej szczegółowo.

Założmy, że prosta L_1 jest dwusieczną kąta utworzonego przez proste AC i L_{II} . Oznacza to, że każdy punkt leżący na prostej L_1 jest w takiej samej odległości od AC i od L_{II} . W tabeli na str. 8 podane są współrzędne trzech punktów tworzących prostą L_1 (punkty P_1, P_2, P_3). Można wybrać jeden z nich. Aby nie komplikować rachunków jeszcze bardziej, niech to będzie $P_1 = \left(\frac{b(a+at)}{b-t}, 0\right)$. Porównanie odległości punktu P_1 od prostych AC i L_{II} daje następujące równanie:

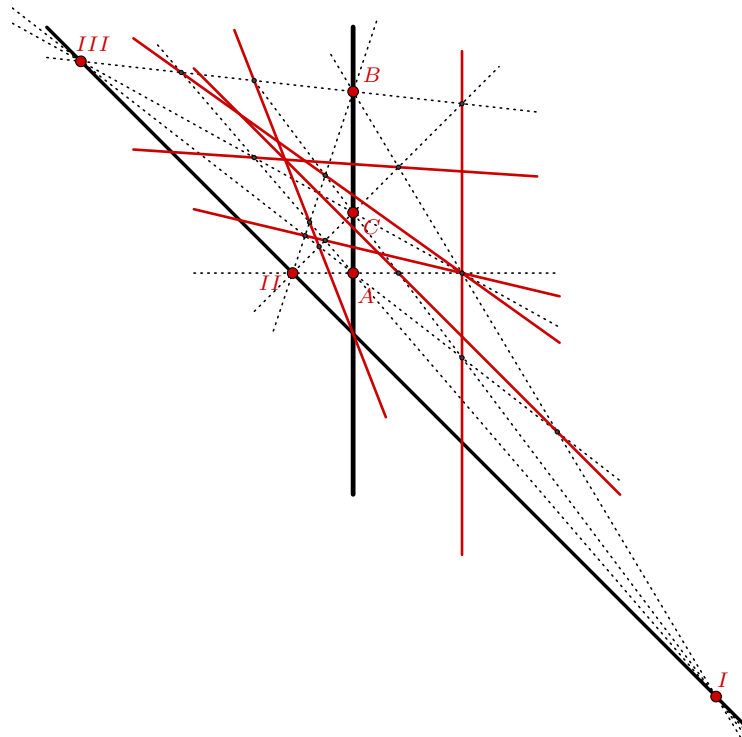
$$\frac{\left|\frac{b(a+at)}{b-t} - 1\right|}{\sqrt{1}} = \frac{\left|\frac{b(a+at)}{b-t}\right|}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Oczywiście warunek ten musi iść w parze z faktem, że $S \in L_1$, tak więc dodatkowo musi zachodzić $a \neq 0$ oraz

$$a^2bct + abc + act + bc - bt + b = 0.$$

Rozwiązanie takiego układu warunków po raz kolejny wymaga bardziej zaawansowanych sposobów. Dla innych prostych Pappusa będzie wyglądało to bardzo podobnie. Oczywiście metodą prób i błędów możemy ustalić przykładowe wartości spełniające takie warunki, ale niezwykle frapującym problemem byłoby kompletne rozwiązanie układów równań i wskazanie wszystkich wartości parametrów, dla których dane położenie prostych jest możliwe. Mam nadzieję, że w niedalekiej przyszłości uda mi się poszerzyć swoją wiedzę na tyle, żeby pokonać trudności rachunkowe, które póki co nie pozwalają mi w pełni rozstrzygnąć niektórych postawionych tu pytań.

A jak widać kolejne szczególne przypadki można mnożyć, a co za tym idzie, można tych pytań zadać jeszcze mnóstwo. Na przykład, czy jeśli dwie proste Pappusa są współpękowe z prostymi AC i L_{II} , to czy jedna może być dwusieczną jednego kąta między tymi prostymi, a druga dwusieczną kąta do niego przyległego? Czy proste Pappusa mogą być współpękowe w innym punkcie niż S (z innymi prostymi niż AC i L_{II})? Jakie warunki muszą być spełnione, aby jedna prosta Pappusa była równoległa do AC , inna do L_{II} , a jeszcze inna była współpękowa z tymi prostymi? Taką sytuację można zaobserwować na Rysunku 9. Proste AC i L_{II} wyróżnione są na czarno, a 6 czerwonych prostych to proste Pappusa.



Rysunek 9

Choć twierdzenie Pappusa znane jest już od *III* wieku, to wciąż istnieje tu jeszcze wiele ciekawych rzeczy do odkrycia i wciąż może być ono punktem wyjścia do wcale nieelementarnych badań matematycznych.

Podziękowania. Pragnę złożyć serdeczne podziękowania mojej pani matematyk, dr Magdalenie Lampie-Baczyńskiej za inspirację, wsparcie, cenne uwagi, cierpliwość oraz czas poświęcony na przygotowanie mnie do realizacji tej pracy.

Literatura

- [1] Richter-Gebert J.: Perspectives on Projective Geometry, A Guided Tour Through Real and Complex Geometry, Springer, 2011
- [2] Kurczab, E., Kurczab, M., Świda, E.: Matematyka. Podręcznik do liceów i techników. Klasa 3. Zakres rozszerzony., Oficyna Edukacyjna Pazdro, 2014
- [3] Lampa-Baczyńska, M., Wójcik, D.: On the Pappus arrangement of lines, forth and back and to the point, <https://arxiv.org/pdf/2003.13129.pdf>
- [4] Szczawińska, J., Szpond, J.: Geometria elementarna, Notatki w wykładu, Wydawnictwo Szkolne Omega, 2018
- [5] Wybrane wzory matematyczne, Centralna Komisja Egzaminacyjna, ISBN 978-83-940902-1-0
- [6] Wolfram Alpha: Computational Intelligence, <https://www.wolframalpha.com>