Nie tylko cztery czwórki

Emilia Proszkiewicz

Dane kontaktowe:

Emilia Proszkiewicz

ul. Stojałowskigo 41/15; 30-611 Kraków

tel: 795 976 442; e-mali: emiliaproszkiewicz@szkolanazaret.pl

Szkoła Podstawowa nr 164 im. bł. Franciszki Siedliskiej

ul. Wysłouchów 28, 30-611 Kraków

tel.: 12 654 15 03; sekretariat@szkolanazaret.pl

Opinia nauczyciela

Kraków, 25.02.2021 r.

Opinia o Emilii Proszkiewicz

Emilia Proszkiewicz jest w roku szkolnym 2020/2021 uczennicą klasy 7a Szkoły Podstawowej nr 164 im. bł. Franciszki Siedliskiej w Krakowie.

Jestem nauczycielem Emilii trzeci rok i oceniam ją jako uczennicę bardzo dobrze wypełniającą swoje obowiązki i podjęte zadania. Podczas zajęć jest osobą aktywną, chętnie zabiera głos i rozwiązuje zadania samodzielnie, szybko i bezbłędnie. Uczestniczy w wielu konkursach organizowanych na terenie szkoły. Samodzielnie przygotowuje pracę na Małopolski Konkurs Prac Matematycznych i mam nadzieję, że posłuży to do dalszego rozwoju jej zainteresowań i kompetencji matematycznych.

mgr Mariola Jurkowska

Spis treści

1. Słowem wstępu

Nazywam się Emilia Proszkiewicz i jestem uczennicą klasy 7a w Szkole Podstawowej nr. 164 im. bł. Franciszki Siedliskiej w Krakowie. Na zajęciach dodatkowych spotkałam się z bardzo ciekawym problemem o nazwie „Cztery czwórki" (szerzej opisuję go w rozdziale 2).

Zadanie polegało na tym, że należało wyrazić kolejne liczby naturalne od 0 do pewnej ustalonej liczby, stosując w zapisie jedynie cztery czwórki i dowolne wyrażenia arytmetyczne. W każdym zapisie trzeba było użyć cyfry 4 dokładnie cztery razy. Można było także używać dowolnych symboli matematycznych, o ile nie wiązało się to z wykorzystaniem w zapisie innej cyfry niż 4 lub nadmiarowej czwórki.

Fakt, że mając do dyspozycji tak niewiele narzędzi, możemy zapisać dowolną liczbę całkowitą (rozdziały 4 i 5) jest dla mnie wciąż dużym zaskoczeniem. Co więcej, zauważyłam, że wiele liczb naturalnych potrafię wyrazić na kilka różnych sposobów. Dlatego po zajęciach kontynuowałam zmagania z tym problemem. W tej pracy przedstawiam część z moich wyników w zakresie liczb naturalnych od 0 do 30.

Dowiedziałam się także, że istnieją różne wersje tego problemu. W niektórych w zapisie dozwolona jest dowolna liczba czwórek. W innych, należy zapisać każdą liczbę naturalną za pomocą trzech trójek albo pięciu piątek. Jedna z trudniejszych moim zdaniem wersji tego problemu wymaga przedstawienia kolejnych liczb naturalnych za pomocą konkretnych, wskazanych w zadaniu czterech cyfr, które mają być wykorzystane w takiej kolejności, w jakiej zostały podane. Postanowiłam spróbować przedstawić każdą z liczb naturalnych od 0 do 30 za pomocą cyfr 2, 0, 2 oraz 1 (w tej kolejności) występujących w liczbie oznaczającej rok, który teraz mamy (wyniki przedstawiam w rozdziale 6). To zadanie okazało się dość trudne. Korzystając z działań arytmetycznych i symboli, jakie poznałam w szkole, nie potrafiłam zapisać wszystkich liczb. Dlatego poszukiwałam dodatkowych narzędzi, które dałyby mi więcej możliwości. W ten sposób poznałam nowe dla mnie pojęcia i symbole matematyczne (podaję je w rozdziale 3), które wykorzystałam też w zadaniu o czterech czwórkach (rozdział 5).

2. Wprowadzenie

- Zadania podobne do „Czterech czwórek" pojawiły się już w 1818 r. Dilworth (s.189) w sekcji „Short and Diverting Questions " podał dwa problemy. Pierwszy z nich to:

  5. Let 12 be set down in 4 figures, and let each figure be the same.

  Poz. 1 Dilworth zad 1 Literatura [4]

  Znaczy to:

  Niech 12 zostanie zapisana w postaci czterech liczb i niech będą one takie same.

  Najprostszym rozwiązaniem tego zadania jest zapisanie:

  $$12 = 3 + 3 + 3 + 3$$

  Drugi problem był następujący:

  9. Says Jack to his brother Harry, I can place four three's in such a manner that they shall make just 34; can you do so too?

  Poz. 2 Dilworth zad 2 Literatura [4]

  Znaczy to:

  Jack powiedział do swojego brata Harrego, potrafię ułożyć cztery 3 w taki sposób, że dadzą one wynik 34. Czy Ty też dasz radę?

  Można na przykład przedstawić 34 jako $33 + 3 : 3$.

- Pierwszy raz problem dotyczący czterech czwórek opublikowano w roku 1881 w czasopiśmie *Knowledge: An Illustrated Magazine of Science.*

- Następna wzmianka o problemie pojawiła się w pracy (Ball, 1914), gdzie „Cztery czwórki" ukazane są jako problem z obszaru matematyki rekreacyjnej.

Four Fours Problem. Another traditional recreation is, with the ordinary arithmetic and algebraic notation, to express the consecutive numbers as far as possible in terms of four "4's." Everything turns on what we mean by ordinary notation. I take it that this allows the use of the denary scale (*ex. gr.* numbers like 44) and decimals; the symbols for factorials and square roots (repeated if desired a finite number of times); and the symbols for addition, subtraction, multiplication, division, and brackets; but I consider that indices (other than first powers), not expressible by a "4" or "4's," and roots (other than square roots) are excluded; and that though a number like 2 can be expressed by one "4," numbers like ·2 and 22 are inadmissible. On these assumptions we can express every number up to and including 112. If we also allow the use of subfactorials* we can thus express every number up to and including 877†. The similar problems of the expression by four "9's" in ordinary notation up to 132, and by four "3's," with the use of subfactorials, up to 153, present no difficulty.

Poz. 3; Ball, 1914, s. 14, Literatura [3]

Ball (1912, 1914) podaje, że zastosował w swoim rozwiązaniu ułamki dziesiętne. Selkirk (1973) i Anderson (1987) także piszą o ułamkach dziesiętnych, w tym okresowych. Autorzy korzystają z tego (ale ja nie będę), że te liczby wymierne zapisuje się czasem jak poniżej:

$$\cdot 4 = 0{,}4 \ \ (\text{albo}: .4)$$

$$\cdot \dot{4} = 0,(4) \ (\text{albo: } .\dot{4})$$

W różnych wersjach „Czterech czwórek", dopuszcza się różny zakres symboli, które można stosować w rozwiązaniu zadania. Zasadniczo w większości odmian dopuszcza się stosowanie:

- symboli dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia;
- nawiasów;
- pierwiastka kwadratowego;
- czwartej potęgi;
- liczb wielocyfrowych, do zapisu których cyfrę 4 wykorzystano co najwyżej cztery razy;
- symbolu procenta.

David A. Wheeler w 2002 r. podał swoje rozwiązanie problemu *Four fours* wskazując sposób wyrażenia każdej liczby naturalnej od 0 do 40 000!!!

3. Pojęcia i symbole matematyczne

Poniżej znajdują się pojęcia i symbole matematyczne z jakich korzystałam zapisując kolejne liczby naturalne za pomocą czterech czwórek.

3. 1. Pierwiastek kwadratowy

Pierwiastek kwadratowy z liczby nieujemnej a, to taka liczba nieujemna b, że: $b^2 = a$.
Np. $\sqrt{4} = 2$, bo $2^2 = 4$ (i $2 \geq 0$).

3. 2. Logarytm

Logarytm o podstawie a $(a > 0\ i\ a \neq 1)$ z liczby b $(b > 0)$ oznaczamy jako $\log_a b$. Jest to taka liczba c, że $a^c = b$. Zatem, przy podanych wcześniej założeniach możemy zapisać: $\log_a b = c \iff a^c = b$

Np. $log_4 4 = 1$, bo $4^1 = 4$.

3.3. Silnia

Silnia (ang. *factorial*) liczby naturalnej dodatniej n, oznaczana jako n!, to iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n. Dodatkowo przyjmuje się, że 0! = 1. Można też definicję silni podać w następującej postaci:

$$n! = \begin{cases} 1, & dla\ n = 0 \\ n(n-1)! & dla\ n \in \mathbb{N}_+ \end{cases}$$

Np. $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

3. 4. Podwójna silnia

Selkirk (1973) określa podwójną silnię (ang. *double factorial*) liczby naturalnej dodatniej n jako następujący iloczyn:

$n!! = n(n-2)(n-4)\ldots$, w którym ostatnim czynnikiem jest 2 lub 1.

Przyjmuje się (Gould, Quaintance, 2012), że $0!! = 1$.

Z kolei Meserve (1948), definiuje osobno podwójne silnie dla liczby parzystej dodatniej i nieparzystej:

- Podwójna silnia dodatniej liczby parzystej 2n to iloczyn liczb parzystych od 2 do 2n.

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n-2) \cdot 2n$$

Np. $4!! = \ 2 \cdot 4 = 8$

- Podwójna silnia nieparzystej liczby naturalnej 2n+1 to iloczyn naturalnych liczb nieparzystych od 1 do 2n+1.

$$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)$$

Np. $7!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 3 \cdot 35 = 105$

Uwaga: Podwójna silnia nie jest silnią silni, tzn. $n!! \neq (n!)!$. Na przykład:

$$3!! = 1 \cdot 3 = 3$$

$$(3!)! = (1 \cdot 2 \cdot 3)! = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

3. 5. Supersilnia

Supersilnia (ang. *superfactorial*) liczby naturalnej $n \geq 1$, oznaczana[1] jako $n\$$ (albo $sf(n)$) to iloczyn silni kolejnych liczb naturalnych od 1 do n:

$$n\$ = 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot n!$$

Np. $4\$ = 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! = 1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 24 = 288$

3. 6. Podsilnia

Podsilnia liczby naturalnej n (ang. *subfactorial*) to liczba tzw. nieporządków zbioru skończonego n-elementowego, gdzie „nieporządkiem" nazywa się każdą permutację bez punktów stałych wspomnianego zbioru. Podsilnię oznacza się na różny sposób: $n¡ = !n = n\rfloor$. Ja przyjmę oznaczenie !n.

Np. $!1 = 0;\ !2 = 1;\ !3 = 2;\ !4 = 9.$

3. 7. Hipersilnia

Hipersilnia (ang. *hyperfactorial*) liczby naturalnej $n \geq 1$ oznaczana jest symbolem H(n), a definiuje się ją jako następujący iloczyn:

$$H(n) = 1^1 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot \ldots \cdot n^n$$

Przykładowo: $H(4) = 1^1 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdot 4^4$.

---

[1] Oznaczenie przyjmuję za Sloane i Plouffe (1995), a więc nie chodzi tu o supersilnię Pickovera (1995) oznaczaną w literaturze tym samym symbolem. Supersilnia Pickovera (ang. *Pickover's superfactorial*) definiowana jest następująco: $n\$ = n!^{n!^{n!^{\cdots^{n!}}}}$, gdzie symbol $n!$ użyty został w zapisie n razy. W przypadku supersilni Pickovera tłumaczy się, że symbol dolara to w rzeczywistości symbol silni z nadpisaną na nim literą S.

3. 8. Słabnia

Słabnia z liczby naturalnej $n \geq 1$ to suma kolejnych liczb naturalnych od 1 do n. Oznacza się ją symbolem: n?

$$n? = 1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1 + n.$$

Np. $6? = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$

Można w łatwy sposób wyznaczyć wzór na n? (dla dowolnego $n \geq 1$)

$$n? = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$$

$$n? = n + (n-1) + (n-2) + (n-3) \ldots + 1$$

Dodając stronami, otrzymujemy:

$$2n? = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1)$$

Składnik (n+1) występuje po prawej stronie n razy, zatem:

$$2n? = n(n+1)$$

Stąd: $n? = \frac{(n+1) \cdot n}{2}$

3. 9. Podwójna słabnia

- Podwójna słabnia z dodatniej liczby parzystej 2n to suma kolejnych liczb parzystych od 2 do 2n. Oznacza się ją symbolem (2n)??

$$(2n)?? = 2 + 4 + 6 + \cdots + (2n-2) + 2n$$

Np. $4?? = 2 + 4 = 6$

- Podwójna słabnia z liczby nieparzystej 2n+1 to suma kolejnych liczb nieparzystych od 1 do 2n+1. Oznacza się ją (2n+1)??

$$(2n+1)?? = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2n+1)$$

Np. $7?? = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$

3. 10. Supersłabnia

Super słabnia z dodatniej liczby naturalnej n to suma słabni kolejnych liczb naturalnych od 1 do n. Oznacza się ją symbolem: n£.

$$n£ = 1? + 2? + 3? + \cdots + (n-1)? + n?$$

Np. $4£ = 1? + 2? + 3? + 4? = 1 + 3 + 6 + 10 = 20$

3. 11. Pierwsznia

Pierwsznia (ang. *primorial number*[2]) z liczby naturalnej n to iloczyn liczb pierwszych nie większych niż n. Oznacza się ją jako n#.

Np. $5\# = 2 \cdot 3 \cdot 5$

3. 12. Cecha z liczby

Cecha z danej liczby rzeczywistej x to największa liczba całkowita nie większa niż dana liczba. Oznacza się ją jako [x] albo E(x). Cecha nazywana jest też *podłogą* i oznaczana jako $\lfloor x \rfloor$

Np. $[2{,}4] = 2$; $\lfloor 4 \rfloor = 4$.

3. 13. Sufit (cecha górna)

Sufit (zwany też cechą górna) z liczby rzeczywistej x to najmniejsza liczba całkowita, nie mniejsza niż x.

Np. $\lceil 2{,}4 \rceil = 3$; $\lceil 4 \rceil = 4$.

[2] Za: Dubner, 1987.

4. Czy każdą dodatnią liczbę naturalną można zapisać za pomocą czterech czwórek?

Odpowiedź na to pytanie brzmi **TAK**.

Poniżej postaram się to udowodnić.

1. $\sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2}}$
2. $\sqrt{\sqrt{4}} = (4^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 4^{(\frac{1}{2})^2}$
3. $\sqrt{\sqrt{\sqrt{4}}} = ((4^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 4^{(\frac{1}{2})^3}$
4. $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{4}}}} = 4^{(\frac{1}{2})^n}$

   n – liczba pierwiastków,

   n - liczba naturalna większa od 0
5. $log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n = n$ (z definicji logarytmu)
6. $\log_4 4^{(\frac{1}{2})^n} = (\frac{1}{2})^n$ (z definicji logarytmu)
7. $n = log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n = log_{\frac{1}{2}}log_4 4^{(\frac{1}{2})^n}$ (z (5) i (6))
8. $n = log_{\frac{\sqrt{4}}{4}}log_4\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{4}}}}$ (symbol pierwiastka użyty n razy).

Zatem każdą dodatnią liczbę naturalną n można przedstawić za pomocą czterech czwórek, logarytmu i symbolu pierwiastka kwadratowego użytego n razy.

W rozdziale 5, w którym przedstawiam różne sposoby zapisu kolejnych liczb naturalnych od 0 do 30, będę korzystać z pojęć i symboli opisanych powyżej.

Na koniec przedstawię przykładowe rozwiązanie jakie znalazłam w literaturze:

1. $4-4+\frac{4}{4}$
2. $\frac{4}{4}+\frac{4}{4}$
3. $\sqrt{4}+\sqrt{4}-\frac{4}{4}$
4. $4+4-\sqrt{4}-\sqrt{4}$
5. $\sqrt{4}+\sqrt{4}+\frac{4}{4}$
6. $4+4-4+\sqrt{4}$
7. $4+\sqrt{4}+\frac{4}{4}$
8. $4+4+4-4$
9. $4+4+\frac{4}{4}$
10. $4\times4-4-\sqrt{4}$
11. $\frac{4!}{\sqrt{4}}-\frac{4}{4}$
12. $4\times4-\sqrt{4}-\sqrt{4}$
13. $\frac{4!}{\sqrt{4}}+\frac{4}{4}$
14. $4+4+4-\sqrt{4}$
15. $4\times4-\frac{4}{4}$
16. $4+4+4+4$
17. $4\times4+\frac{4}{4}$
18. $\frac{4!}{\sqrt{4}}+4+\sqrt{4}$
19. $4!-4-\frac{4}{4}$
20. $\frac{4}{.4}+\frac{4}{.4}$
21. $4!-4+\frac{4}{4}$
22. $4!-4+4-\sqrt{4}$
23. $4!-\sqrt{4}+\frac{4}{4}$
24. $4\times4+4+4$
25. $4!+\sqrt{4}-\frac{4}{4}$
26. $4!+4-4+\sqrt{4}$
27. $4!+\sqrt{4}+\frac{4}{4}$
28. $4!+4+4-4$
29. $4!+4+\frac{4}{4}$
30. $4!+\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{4}$

Poz. 4; Przykładowe rozwiązanie (Grammer i in., 1980, s. 22), Literatura [7]

5. Wykonanie zadania o czterech czwórkach

Stosując w zapisie cyfrę cztery dokładnie cztery razy oraz korzystając z operacji arytmetycznych i symboli matematycznych jakie znam, zapisałam każdą liczbę naturalną od 0 do 30. Dla każdej z liczb starałam się podać kilka różnych przedstawień.

0	$= 4+4-4-4 = 44-44 = 4log_4 4 - 4 = \sqrt{4}+\sqrt{4}-\sqrt{4}-\sqrt{4}$ $= (4-\sqrt{4})\cdot\sqrt{4} - 4 = log_4(log_4 4)^4$
1	$= \frac{44}{44} = log_{44}44 = \frac{4}{4}\cdot\frac{4}{4} = [[\sqrt{44}-4]:\sqrt{4}] = log_4 4 : log_4 4 = \lceil 4{,}4\rceil : \lceil 4{,}4\rceil$
2	$= \frac{4}{4}+\frac{4}{4} = \frac{4}{4} + log_4 4 = log_4 4 + log_4 4 = \sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{4}-4 = 4\cdot 4-4-4?$ $= \frac{4\pounds+4}{4} - 4$
3	$= \sqrt{[\sqrt{44:4}]^{\sqrt{4}}} = \sqrt{4} + (\sqrt{4}+\sqrt{4}):4 = \sqrt{4}\cdot[\sqrt{44}]:4 = [\sqrt{4}\cdot\lceil\sqrt{44}:4\rceil]$ $= \frac{4\pounds+4}{4}:\sqrt{4} = \frac{4??}{\sqrt{4}}\cdot\frac{4}{4}$
4	$= \sqrt{4}\cdot\sqrt{4}+4-4 = \sqrt{4}\cdot\sqrt{4}\cdot(4:4) = \sqrt{4}+(4+4):4 = 4(log_4 4)^4$ $= \lceil\sqrt{4}\cdot\lceil\sqrt{44}\rceil:4\rceil = 4! - 4? - 4\# - 4$
5	$= \sqrt{4}\cdot\sqrt{4}:4+4 = 4+(\sqrt{4}+\sqrt{4}):4 = (log_4 4)^4+4 = [[\sqrt{444}]:4]$ $= [\lceil\sqrt{444}\rceil:4] = \frac{4?+4!!}{4??}+\sqrt{4}$
6	$= 4+(4+4):4 = (4-\sqrt{4})\cdot\sqrt{4}+\sqrt{4} = (4-\sqrt{4})\cdot 4-\sqrt{4} = 4log_4 4+\sqrt{4}$ $= \sqrt{4}+\frac{4}{4}\cdot 4 = 4\cdot[\sqrt{44}]:4 = \lceil[\sqrt{444}]:4\rceil = 4+4??-4!!+4$ $= 4??+4!!-4-4 = \left(\sqrt{4}+\frac{4}{4}\right)\cdot\sqrt{4} = \frac{4?+4!!}{4??}\cdot\sqrt{4}$
7	$= 44:4-4 = [\sqrt{44:4}]+4 = \sqrt{4}+\frac{4}{4}+4 = 4+4-\frac{4}{4} = 4\cdot\lceil\sqrt{44}\rceil:4$ $= 4? - \frac{4?+4!!}{4??} = \frac{4?+4!!}{4??}+4$
8	$= 4+4+4-4 = (4-\sqrt{4})\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{4} = (4-\sqrt{4})\cdot\sqrt{4}+4 = 4log_4 4+4$ $= (\sqrt{4}+\sqrt{4}-\sqrt{4})\cdot 4 = 4+4\cdot\frac{4}{4} = \sqrt{4}\cdot[\sqrt{44}]-4 = (4\$-4^4):4$

9	$= 44:4 - \sqrt{4} = \left[\sqrt{44:4}\right]^{\sqrt{4}} = 4 + 4 + \frac{4}{4} = \frac{4?+4!!}{4??} + 4?? = (4 \cdot {!4}) \div \sqrt{4} - {!4}$ $= \frac{4??}{\sqrt{4}} \cdot \frac{4??}{\sqrt{4}} = 4\# + 4 - \frac{4}{4}$
10	$= (44-4):4 = (4-\sqrt{4}) \cdot 4 + \sqrt{4} = \sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{4} + 4 = \sqrt{4} \cdot \lceil \sqrt{44} \rceil - 4$ $= \frac{4\pounds + 4}{4} + 4 == (4 \cdot {!4}) : \sqrt{4} - 4!!$
11	$= 4??+4+\frac{4}{4} = 4\# + 4?? - \frac{4}{4} = \frac{4?+4!!}{4??} + 4!! = 4??+4+\frac{4}{4}$
12	$= \sqrt{4} \cdot \sqrt{4} \cdot 4 - 4 = (44+4):4 = (4-\sqrt{4}) \cdot 4 + 4 = \left[\sqrt{44:4}\right] \cdot 4$ $= (\sqrt{4} + log_4 4) \cdot 4 = 4 \cdot \left(4 - \frac{4}{4}\right) = 4? + \sqrt{4} \cdot \frac{4}{4} = 4! - 4? - 4\# + 4$ $= \frac{4?+4!!}{4??} \cdot 4 = \frac{4?+4!!}{4??} + {!4} = (4 \cdot {!4}) : \sqrt{4} - 4?? = 4 \cdot 4!! : 4 + 4$
13	$= 44:4 + \sqrt{4} = 4? + \frac{4?+4!!}{4??} = \frac{4??}{\sqrt{4}} + 4 + 4?? = 4??+4+\frac{4??}{\sqrt{4}}$
14	$= (4+\sqrt{4}) \cdot \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4?+4 \cdot log_4 4 = (4 \cdot {!4}) : \sqrt{4} - 4$
15	$= 44:4+4 = \sqrt{4^4} - log_4 4 = 4 \cdot 4 - \frac{4}{4} = 44:4+4 = 4^{\sqrt{4}} - \frac{4}{4} = \frac{4??}{\sqrt{4}} \cdot \lceil 4{,}4 \rceil$ $= 4?+4+log_4 4$
16	$= 4+4+4+4 = (4+\sqrt{4}) \cdot \sqrt{4} + 4 = 4 \cdot 4 log_4 4 = 4 log_4 (4)^4 = \sqrt{4^4} \cdot \frac{4}{4}$ $= (4+4-4) \cdot 4 = 4 \cdot 4!! - 4 \cdot 4 = \sqrt{4} \cdot \left[\sqrt{44}\right] + 4 =$ $(4\$ - 4^4) : \sqrt{4}$
17	$= \sqrt{4^4} + log_4 4 = 4 \cdot 4 + \frac{4}{4} = 4\pounds - \frac{4?+4!!}{4??} = \left[\sqrt{444}\right] - 4 = 4^{\sqrt{4}} + \frac{4}{4}$ $= 4\pounds - 4 + log_4 4$
18	$= 44 : \sqrt{4} - 4 = \left(4!! + \frac{4}{4}\right) \cdot \sqrt{4} = \lceil \sqrt{444} \rceil - 4 = \lceil 4{,}4 \rceil \cdot 4 - \sqrt{4}$
19	$= 4?+4!!+\frac{4}{4} = \frac{4!}{4!!} + 4?+4?? = \sqrt{4} \cdot 4? - \frac{4}{4} = \sqrt{4} \cdot 4? - \frac{4}{4}$
20	$= \sqrt{4} \cdot \sqrt{4} \cdot 4 + 4 = (44-4):\sqrt{4} = (4+\sqrt{4}) \cdot 4 - 4 = 4 \cdot \left(4 + \frac{4}{4}\right) = \left[\sqrt{44}\right] \cdot 4 - 4$ $= 4! - 4 + 4 - 4 = \left(\lceil \sqrt{44} \rceil + \frac{4}{4}\right)??$
21	$= (44-\sqrt{4}):\sqrt{4} = \sqrt{4} \cdot 4? + \frac{4}{4} = \frac{4??}{\sqrt{4}} \cdot 4? - {!4} = 4! + log_4 4 - 4$

22	$= \left(44 \cdot \sqrt{4} : 4\right) = \left(4 + \sqrt{4}\right) \cdot 4 - \sqrt{4} = 44 : 4 \cdot \sqrt{4} = 4?? + 4!! + 4 + 4$ $= \left[\sqrt{44}\right] \cdot 4 - \sqrt{4} = (4 \cdot !4) : \sqrt{4} + 4$
23	$= \left(44 + \sqrt{4}\right) : \sqrt{4} = 4??\cdot 4 - \frac{4}{4} = 4£ + 4 - \frac{4}{4} = \frac{4? + 4!!}{4??} + 4£$
24	$= (44 + 4) : \sqrt{4} = \left(4 + \sqrt{4}\right) \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{4} = \left(\sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{4}\right) \cdot 4 = 4\# + 4\# + 4\# + 4\#$ $= 4! - 4? + 4\# + 4 = \lceil 4{,}4 \rceil \cdot 4 + 4$
25	$= 4??\cdot 4 + \frac{4}{4} = \left(4?? - \frac{4}{4}\right)^{\sqrt{4}} = \left[\sqrt{444}\right] + 4 = \lceil 4{,}4 \rceil \cdot \lceil 4{,}4 \rceil = 4£ + 4 + log_4 4$
26	$= 44 : \sqrt{4} + 4 = \left(4 + \sqrt{4}\right) \cdot 4 + \sqrt{4} = \lceil \sqrt{444} \rceil + 4 = \lceil 4{,}4 \rceil \cdot 4 + 4??$ $= (4 \cdot !4) : \sqrt{4} + 4!!$
27	$= 4! + 4 - log_4 4 = 4! + \sqrt{4} + \frac{4}{4} = \frac{4? + 4!!}{4??} \cdot !4 = 4£ + 4?? + \frac{4}{4} = \frac{4? + 4!!}{4??} + 4!$ $= (4 \cdot !4) : \sqrt{4} + !4 = \frac{H(4)}{4 \cdot 4^4}$
28	$= \left(4 + \sqrt{4}\right) \cdot 4 + 4 = 4! + 4 - 4 + 4 = \left[\sqrt{44}\right] \cdot 4 + 4 = \sqrt{4} \cdot \sqrt{4} \cdot \lceil \sqrt{44} \rceil$ $= (4\$ - 4^4) - 4 = 4£ + 4 + 4\# - \sqrt{4} = (4 \cdot !4) : \sqrt{4} + 4?$
29	$= 4! + log_4 4 + 4 = 4£ + !4 \cdot \frac{4}{4} = \frac{4??}{\sqrt{4}} \cdot !4 + \sqrt{4} = 4£ + 4? - log_4 4$
30	$= \left(\sqrt{4} + \frac{4}{4}\right) \cdot 4? = 4£ + 4!! + 4?? - 4 = \left(4?? - \frac{4}{4}\right) \cdot 4?? = \sqrt{4} \cdot 4? + 4 + 4??$ $= \frac{4? + 4!!}{4??} \cdot 4? = (4\$ - 4^4) - \sqrt{4}$

6. Podobne zadanie

Williamson (1985) przedstawiła każdą z liczb naturalnych od 0 do 100 wykorzystując użyte w dowolnej kolejności wszystkie cyfry występujące w liczbie oznaczającej rok 1985. W moim zadaniu wykorzystam cyfry 2, 0, 2 oraz 1 i dodatkowo będę ich używać dokładnie w takiej kolejności w jakiej występują w liczbie 2021. Odrzucam natomiast jakiekolwiek ograniczenia dotyczące symboli czy działań, które będę stosować.

Poniżej przedstawiam po jednym sposobie przedstawienia każdej z liczb naturalnych od 0 do 30.

0.	$0 = 2 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 1$
1.	$1 = 2 \cdot 0 \cdot 2 + 1$
2.	$2 = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1$
3.	$3 = [\sqrt{20}]! - 21$
4.	$4 = 2 - 0 + 2 \cdot 1$
5.	$5 = 2 + 0 + 2 + 1$
6.	$6 = [20 : (2 + 1)]$
7.	$7 = \lceil 20 : (2 + 1) \rceil$
8.	$8 = \lceil \sqrt{20} \rceil + 2 + 1$
9.	$9 = 20 : 2 - 1$
10.	$10 = 20 : 2^1$
11.	$11 = -20?? + 21??$
12.	$12 = [\sqrt{20}] \cdot (2 + 1)$
13.	$13 = [\sqrt{202}] - 1$
14.	$14 = [\sqrt{202}] \cdot 1$
15.	$15 = \lceil \sqrt{20} \rceil \cdot (2 + 1)$
16.	$16 = [\sqrt{20}] \cdot [\sqrt{21}]$
17	$17 = [\sqrt{20}]^2 + 1$
18.	$18 = 20 - 2 \cdot 1$

19.	$19 = -2 + 0 + 21$
20	$20 = [\sqrt{20}] \cdot \lceil \sqrt{21} \rceil$
21.	$21 = \big((2 + 0 + 2 - 1)!\big)?$
22.	$22 = 2^0 + 21$
23.	$23 = 20 + 2 + 1$
24.	$24 = 20 + [\sqrt{21}]$
25.	$25 = \lceil \sqrt{20} \rceil \cdot \lceil \sqrt{21} \rceil$
26.	$26 = [\sqrt{20}]! + 2 \cdot 1$
27.	$27 = [\sqrt{20}]! + 2 + 1$
28.	$28 = \lceil 20 : (2 + 1) \rceil ?$
29.	$29 = (2 + 0! + 2)\# - 1$
30.	$30 = (2 + 0 + 2 + 1)\#$

Literatura

1. Anderson, O. D. (1987). Four fours are one, two, three,... *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *18*(6), 863-866.
2. Ball, W. R. (1912). Four Fours. Some Arithmetical Puzzles. *The Mathematical Gazette*, *6*(98), 289-290.
3. Ball, W. W. R. (1914). *Mathematical recreations and essays*. Macmillan.
4. Dilworth, T. (1818). *The Schoolmaster's Assistant: Being a Compendium of Arithmetic Both Practical and Theoretical: in Five Parts...* Daniel D. Smith.
5. Dubner, H. (1987). Factorial and primorial primes. *J. Rec. Math*, *19*(3), 197-203.
6. Gould, H., & Quaintance, J. (2012). Double fun with double factorials. *Mathematics Magazine*, *85*(3), 177-192.
7. Grammer, P., McFiggans, I., Blacknell, N., Joyce, T., Anstey, J., & Devonald, A. (1980). Counting in Fours. *Mathematics in School*, *9*(4), 21-22.
8. Meserve, B. E. (1948). Double factorials. *The American Mathematical Monthly*, *55*(7), 425-426.
9. Pickover, C. A. (1995). *Keys to infinity*. Wiley.
10. Selkirk, K. (1973). The Four Fours Problem. *Mathematics in School*, *2*(4), 27-28.
11. Sloane, N. J. A., & Plouffe, S. (1995). *The encyclopedia of integer sequences*. Academic Press. *San Diego, CA*.
12. Williamson, A. (1985). 1985. *Mathematics in School*, 14(4), 7.
13. https://primes.utm.edu
14. https://pballew.blogspot.com/2018/12/before-there-were-four-fours-there-were.html
15. https://xpil.eu/podsilnie-i-nieporzadki/
16. https://pl.linkfang.org/wiki/Podsilnia
17. http://matma4u.pl/topic/27553-silnie-slabnie-pierwsznia/
18. https://ozaner.github.io/superfactorial-and-hyperfactorial/#fn:f1