



Autor: Emilia Kucińska

Opiekun pracy:
mgr Dorota Szczepańska

Kraków, luty 2021

Wstęp

Mój wolny czas często spędzam na budowaniu z lego, gdzie łączę wyobraźnię z praktycznym działaniem. Lubię, też matematykę i zastanawiałam się jak połączyć te pasje. Po rozmowie z naszą Panią od matematyki, dostałam link do strony czasopisma DeltY z artykułem Jarosława Górnickiego „Infekcja”. Po przeczytaniu artykułu uświadomiłam sobie, że to jest to czego szukałam. Matematyczna wizualizacja zjawiska infekcji w dobie pandemii korona wirusa z wykorzystaniem klocków lego. Zainspirowana podjęłam wyzwanie sprawdzenia teorii w praktyce i zbudowania modelu infekcji.

Wirusy są najliczniejszym biologicznym bytem na Ziemi. *Jest ich więcej niż wszystkich innych form życia razem wziętych. Obecnie zakażenie korona wirusem SARS-CoV-2 wywołującym chorobę COVID-19 jest potwierdzone pozytywną reakcją łańcuchową. Cząsteczki wirusa infekują wszystkie komórkowe formy życia. “Są obecne w organizmach zarówno chorych, wykazujących objawy chorobowe, jak i zdrowych, które są zakażone bez wywoływania chorobowych następstw, z infekcją aktywną lub utajoną.”¹ Oznaką infekcji wirusowej jest wystąpienie konkretnych objawów chorobowych w organizmie. Jest wiele czynników wpływających na zarażenie się: wiek, stan zdrowia i odporność organizmu, czas, ale ja ograniczę się do transmisji wirusa tzn. jego przenoszeniem się w przestrzeni. Podstawową daną jest tu bazowy współczynnik odnowienia, który określa, ile osób wtórnie może zarazić 1 człowiek pierwotnie zarażony.²*

¹ https://pl.wikipedia.org/wiki/Wirusy#Budowa_wirus%C3%B3w

² <http://www.uwm.edu.pl/egazeta/matematyka-kontra-koronawirus>

Autor artykułu *Infekcja* Pan Jarosław Górnicki szukając odpowiedzi na pytanie:

-Jaki jest najmniejszy zbiór inicjujący 2-infekcję całej szachownicy?

porównał środowisko zainfekowanych wirusem komórek do planszy szachownicy. Postawił, też dwa pomocnicze pytania:

- 1) Jaka minimalna liczba zainfekowanych komórek wystarczy, by 2-zainfekować całą szachownicę?
- 2) Jak rozmieścić na szachownicy minimalny zbiór inicjujący 2- infekcję, by zainfekować wszystkie komórki?

2-infekcja ->na płaszczyźnie

Aby zainfekować szachownicę o n^2 polach ($n \geq 2$) zakładamy, że:

Zdrowa komórka zostaje zainfekowana gdy graniczy co najmniej z dwoma bokami chorych komórek. Kolejne kroki powodują rozszerzanie infekcji. Ilustracje poniżej przedstawiają dwa możliwe ustawienia (rozmieszczenia).

Dla $n=2$ $2^2 = 4$

rys.1

X	v_1
v_1	X

rys.2

v_1	X
X	v_1

*Legenda: x-chora komórka
v -zainfekowana komórka
1,2,3..-kolejne kroki infekcji*

Dla $n=3$

$$3^2=9$$

rys. 3: rozmieszczenie 1

X	v_1	v_2
v_1	X	v_1
v_2	v_1	X

rys.4:rozmieszczenie 2*

X	v_1	
v_1	X	
X	v_1	

*(mój własny układ komórek)

zdrowa komórka, $\rightarrow$
nie zainfekowana



Na rys. 3- rozmieszczeniu 1: chore komórki zainfekowały cały dostępny zbiór. Natomiast zainfekowany zbiór na rys. 4 - rozmieszczenie 2 obejmuje tylko białe komórki i nie przechodzi na komórki żółtego koloru. Co oznacza, że infekcja nie będzie się dalej rozprzestrzeniać.

Konfiguracje chorych komórek w minimalnej liczbie nie zawsze umożliwia zainfekowanie wszystkich zdrowych komórek (np. dla $n=3$ rys 2 -rozmieszczenie 2).

rys. 5 rozmieszczenie 3*(mój własny układ komórek)

X	v_3	v_4
v_1	v_2	v_3
X	v_1	X

rys. 6- rozmieszczenie 4

*(mój własny układ komórek)

v_1	X	v_3
X	v_1	v_2
v_3	v_2	X

Z artykułu dowiedziałam się, że:

Rozprzestrzenianie 2-infekcji nie zwiększa obwodu zainfekowanej figury!

Jeśli mamy szachownicę o n^2 komórkach ($n \geq 2$) i obwodzie $4n$,

to $(n-1)$ zainfekowanych komórek nigdy nie wystarczy do

2-zainfekowania całej szachownicy (bo wtedy obwód zainfekowanego

zbioru nie przekracza $Obw_2 = 4(n-1) < 4n$.³

Zgodnie z podaną zasadą o obwodzie rozmieszczenie minimalnej ilości 3 chorych komórek (na rys.6)) infekuje cały dostępny zbiór 3×3 (tj. 9 pól).

Sprawdziłam i policzyłam obwód zainfekowanych czerwonych komórek na rys 3,4,5,6 wynosi on:

$$Obw_1 = 12 \text{ jednostek,}$$

a zainfekowany zbiór poszerzony o białe kwadraty ma obwód równy

$$Obw_2 = 6 \text{ jednostek,}$$

ponadto zachodzi nierówność $6 < 12$

Z kolei na rys. 5 (rozmieszczenie 3) zainfekowany zbiór ma obwód $Obw_1 = 12$, który w kolejnym etapie rozprzestrzeni się na cały dostępny zbiór. Obwód nie zmieni się i będzie nadal wynosił: $Obw_1 = Obw_2 = 12$.

Moje spostrzeżenia potwierdzają zasadę przedstawioną przez pana J. Górnickiego.

³ <http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/kombinatoryka/2020/10/31/infekcja/>

Dla $n=4$

$$4^2=16$$

rys 7⁴

X	v_1	v_2	v_3
v_1	X	v_1	v_2
v_2	v_1	X	v_1
v_3	v_2	v_1	X

Na rys 7. dla szachownicy składającej się z 4×4 (16 pól) minimalna liczba chorych komórek infekujących cały zbiór to $n=4$.

Dla $n=5$

$$5^2=25 \text{ rys.8}$$

X	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	X	v_1	v_2	v_3
v_2	v_1	X	v_1	v_2
v_3	v_2	v_1	X	v_1
v_4	v_3	v_2	v_1	X

Analogiczne rozprzestrzeniania się wirus w następnym rozkładzie dla $n=5$. Na rys. 8 dla 5×5 komórek (25 pól) konieczne jest 5 pól chorych komórek, a dla 6×6 (36 pól) minimalna ilość chorych komórek 6.

⁴ moje własne układy

Pierwszy warunek:

Dla n^2 pól szachownicy potrzeba co najmniej n chorych komórek do zainfekowania całego zbioru.

Drugi warunek:

to takie rozmieszczenie n komórek chorych by w każdym wierszu i każdej kolumnie znajdowała się chora komórka. np. dla $n = 3$ rys 4 (rozmieszczenie 2)- nie powoduje zainfekowania całego zbioru.

Dla $n=6$

$$6^2 = 36$$

X	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	X	v_1	v_2	v_3	v_4
v_2	v_1	X	v_1	v_2	v_3
v_3	v_2	v_1	X	v_1	v_2
v_4	v_3	v_2	v_1	X	v_1
v_5	v_4	v_3	v_2	v_1	X

|||||

6^2 5^2 4^2 3^2 2^2

Podczas rysowania kolejnych układów zauważyłam pewne prawidłowości:

- Gdy chore komórki rozmieścimy w kwadratowych polach szachownicy wzdłuż jednej przekątnej to powstają układy symetryczne do siebie - samopowielające się.
- Każda następna szachownica n^2 zawiera w sobie szachownicę $(n - 1)^2$ np. szachownica 5^2 (25 pól) zawiera szachownicę 4^2 (16 pól), a ta z kolei szachownicę 3^2 .
- Całkowite zainfekowanie szachownicy n^2 przy minimalnej liczbie n komórek następuje w $n-1$ liczbie kroków (np. dla $n=6$ tzn. 6^2 i w 6 chorych komórkach całkowite zarażenie szachownicy następuje w 5 krokach).

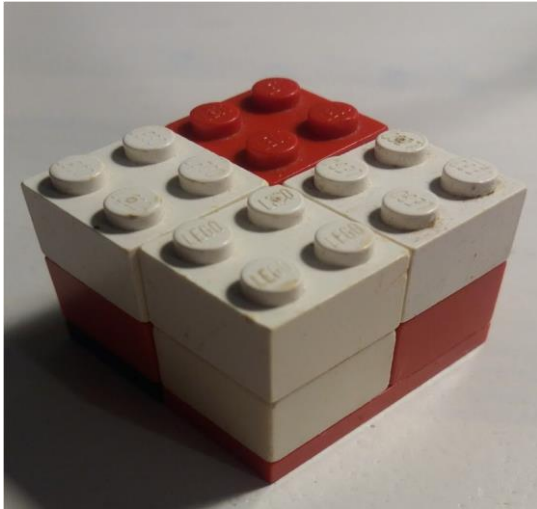
Jednak przestrzenne układy z wykorzystaniem klocków bardziej mnie zauroczyły.

2-infekcja -> w przestrzeni

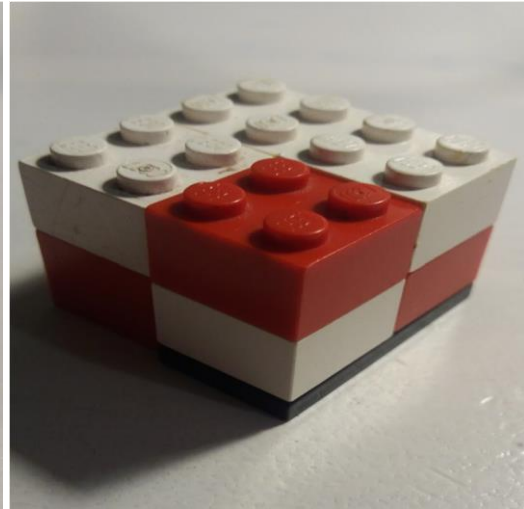
sześciany: dla
 $n = 2$

- $2^3 = 8$ komórek → minimalna ilość chorych komórek do zainfekowania całego sześcianu = 3

widok z przodu⁵



widok z tyłu⁶



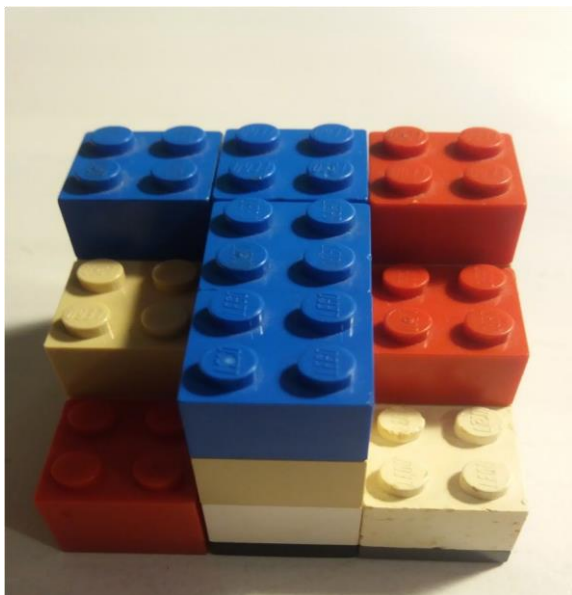
widok z góry⁷

5,6,7 moje własne modele: rozmieszczenie, budowa i zdjęcia

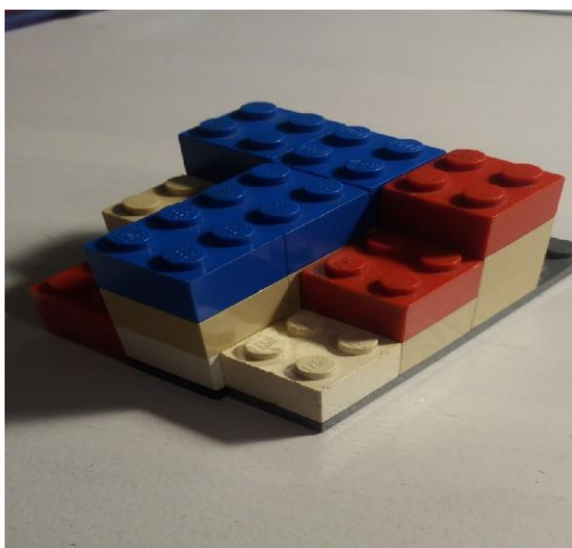
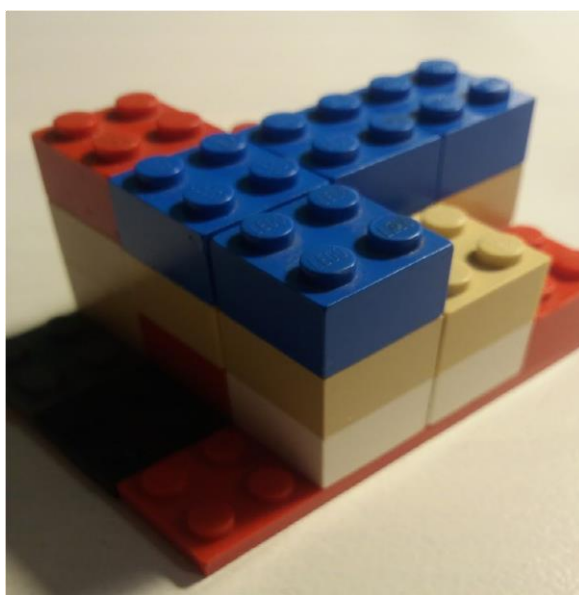
dla $n=3$

- $3^3 = 27$ komórek $\rightarrow$ minimalna ilość chorych komórek
do zainfekowania całego sześcianu = 4

widok z przodu ⁷



widok z tyłu ⁸



widok z boku ¹¹

⁷ moje własne rozmieszczenie , budowa i zdjęcia

⁸ moje własne rozmieszczenie , budowa i zdjęcia

¹¹ moje własne rozmieszczenie , budowa i zdjęcia

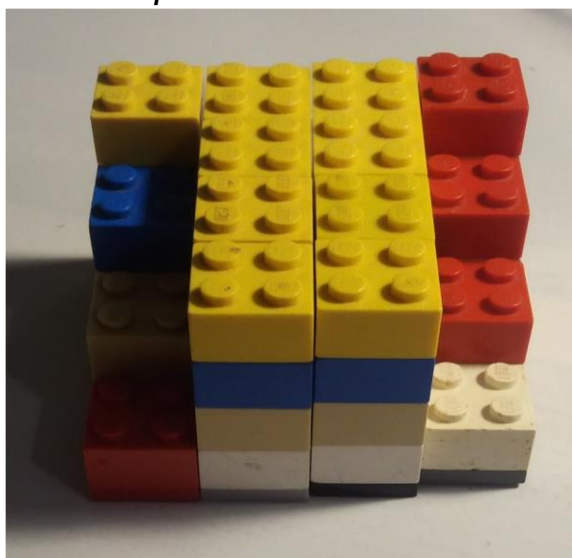
Dla $n = 4$

$4^3 = 64$ komórek $\rightarrow$ **minimalna ilość chorych komórek do zainfekowania całego sześcianu = 5.**

Proces infekcji rozpoczyna się od schodkowo rozmieszczonych trzech komórek chorych (czerwone klocki widocznych na zdjęciu 1 z prawej strony). Umieszczenie w drugiej kolumnie czwartej chorej komórki zapewnia dalsze rozprzestrzenianie się infekcji. Natomiast kolumna trzecia nie zawiera komórki chorej, rozmieszczenie piątej komórki chorej w kolumnie piątej zapewnia całą infekcję sześcianu.

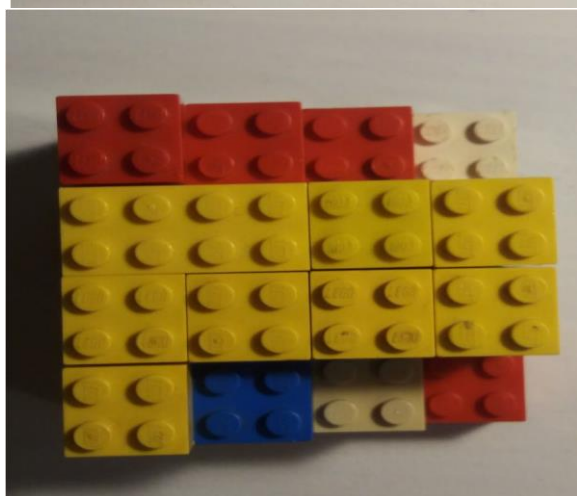
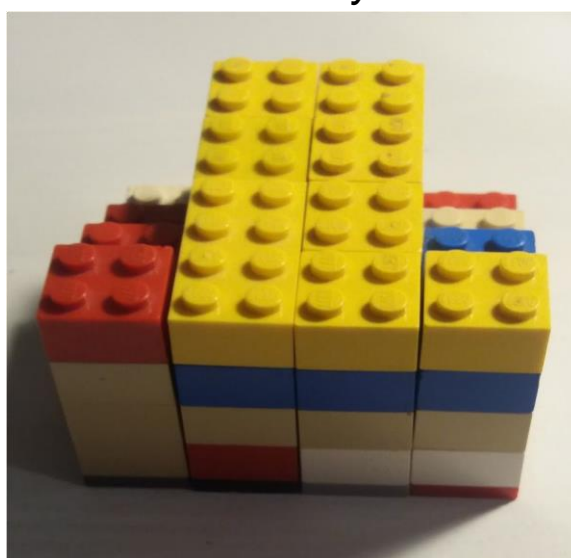
widok z przodu

9



widok z tyłu

10



widok z góry 14

⁹ moje własne modele rozmieszczenie , budowa i zdjęcia

¹⁰ moje własne modele rozmieszczenie , budowa i zdjęcia

Uogólnienie:

Jeśli $n \geq 3$, to $n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ chorych komórek może zainfekować cały sześcian n^3

$\lfloor x \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x . Oczywiście, gdy trafnie rozmieścimy zainfekowane komórki.¹¹

Ta zmienna w nawiasie kwadratowym to CECHA Z LICZBY jest to funkcja zaokrąglająca¹²

$\lfloor x \rfloor$ -Cechą danej liczby nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż dana liczba.

np. $\lfloor 2,6 \rfloor = 2$ $\lfloor 2 \rfloor = 2$ $\lfloor 2,9 \rfloor = 2$, a $\lfloor 3,2 \rfloor = 3$

Z tego wzoru wynika, że dla sześcianu 5^3 tj. 125 komórek i $n=5$ minimalna ilość chorych komórek do zainfekowania to 7 bo $5 + \lfloor 5/2 \rfloor = 7$

Natomiast dla $n=6$ tzn . sześcianu 6^3 składającego się z 216 komórek konieczna minimalna liczba komórek to $6 + \lfloor 6/2 \rfloor = 6+3 = 9$.

Prawdziwość tej zależności potwierdzam mój kolejny model sześcianu z 125 komórkami.

¹¹ <http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/kombinatoryka/2020/10/31/infekcja/>

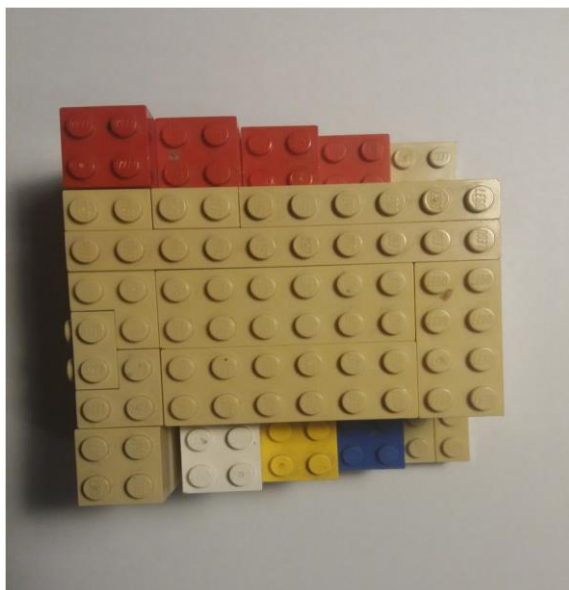
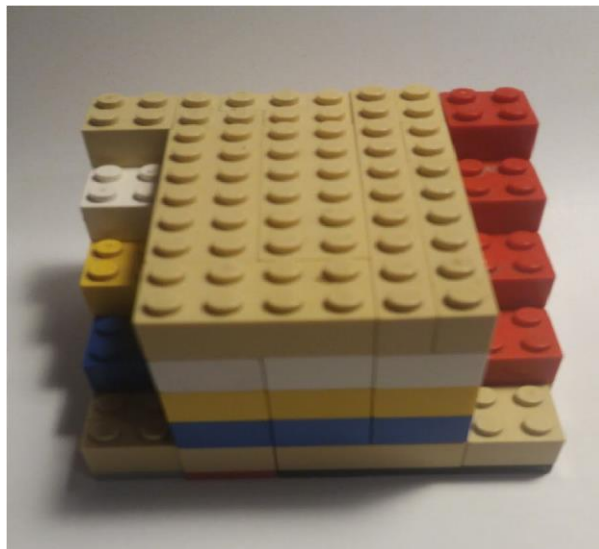
¹² <https://eszkola.pl/matematyka/cecha-i-mantysa-liczby-9709.html>

11 moje własne rozmieszczenie , budowa i zdjęcia

Dla $n=5$

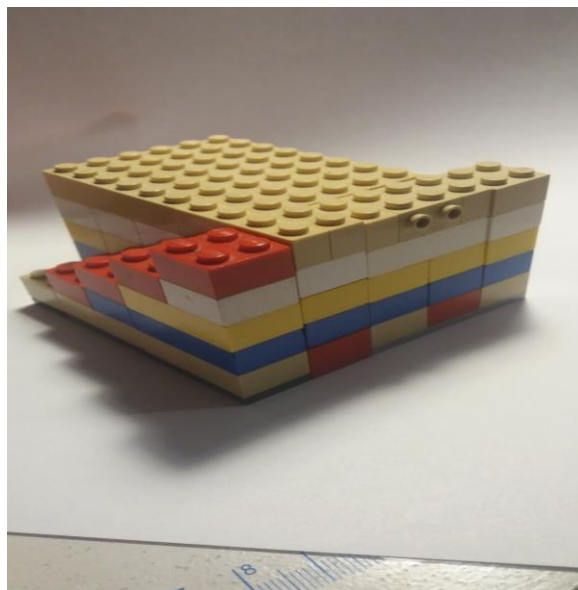
*$5^3=125$ komórek $\rightarrow$ minimalna ilość chorych komórek
do zainfekowania całego sześciangu =7*

widok z przodu ¹³



widok z góry

¹⁸



widok z boku

¹⁹

¹⁹

¹³ moje własne rozmieszczenie , budowa i zdjęcia
¹⁸ moje własne rozmieszczenie , budowa i zdjęcia

Możliwe są jeszcze inne modele infekcji np. typu 3 gdzie do zainfekowania jednej komórki konieczne są trzy chore komórki. Każda komórka zdrowa, która styka się trzema bokami z chorą zostaje zainfekowana.

3-infekcja -> na płaszczyźnie

Dla $n=3$ $3^2=9$

X	v_1	X
v_1	X	v_1
X	v_1	X

- *minimalna ilość chorych komórek, które infekują =5
pozostałe zdrowe komórki=4*

Dla $n=5$ $5^2=25$

X	v_1	X	v_1	X
v_1	X	v_1	X	v_1
X	v_1	X	v_1	X
v_1	X	v_1	X	v_1
X	v_1	X	v_1	X

- *minimalna ilość chorych komórek, które infekują=13
pozostałe zdrowe komórki=12*

Dla dużych zbiorów skuteczną 2-infekcję wywołuje relatywnie mały zbiór, ale skuteczną 3-infekcję może wywołać tylko duży zbiór, stanowiący co najmniej trzecią część wszystkich komórek. Odporność na infekcje jest istotna!

WNIOSKI:)

- *W projekcie pokazałam jak chore komórki -pojedyncze (wyróżnione czerwone klocki), rozszerzają infekcję na inne zdrowe komórki.*
- *Poznałam nowe pojęcie matematyczne cecha liczby tj. funkcję zaokrąglającą.*
- *Odpowiedziałam na pytanie: Jaka jest minimalna liczba zainfekowanych komórek, które zarażają zdrowe komórki w danym obszarze?*
- *W modelu 2-infekcja widać, że w rozprzestrzenianiu się wirusa ważne jest rozmieszczenie chorych komórek infekujących i ich obwody.*
- *Model przestrzenny ukazuje, że do zarażenia się nie jest konieczne przebywanie z chorą komórką. (np. model przestrzenny dla $n=4$)*
- *Klocki lego przydają się, też jako modele matematyczne.*

źródła:

- <http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/kombinatoryka/2020/10/31/infekcja/>
- https://pl.wikipedia.org/wiki/Wirusy#Budowa_wirus
- <http://www.uwm.edu.pl/egazeta/matematyka-kontra-koronawirus>
- <https://www.termia.pl/koronawirus/Jak-dlugo-trwa-transmisja-SARS-CoV-2-z-organizmu-,40627.html>
- <https://eszkola.pl/matematyka/cecha-i-mantysa-liczby-9709.html>