Małopolski Konkurs Prac Matematycznych

Zastosowania własności wartości bezwzględnej w zadaniach

Autor

Daria Ivanchenko

klasa 1C
VI Liceum Ogólnokształcące
im. Adama Mickiewicza
Kraków, ul. Wąska 7

Opiekun

W. W. Wdowik

25 lutego 2021

1. Definicja wartości bezwzględnej

Definicja. *Wartością bezwzględną* liczby rzeczywistej a nazywamy liczbę a, jeśli jest ona nieujemna oraz liczbę $-a$, jeśli jest ona ujemna.

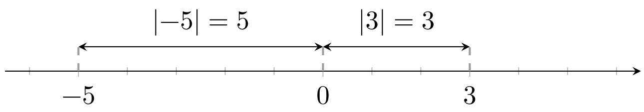
Wartość bezwzględną (zwaną też *modułem*) oznaczamy $|a|$. Symbolicznie zapisując:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{jeśli } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{jeśli } a < 0. \end{cases}$$

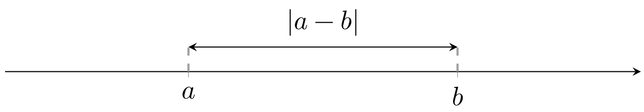
Notacja $|a|$ została wprowadzona przez niemieckiego matematyka Karla Weierstrassa w 1841 roku.

2. Interpretacja geometryczna

Geometrycznie, wartość bezwzględna liczby a równa jest odległości punktu o współrzędnej a od punktu 0 na osi liczbowej.



Wartość bezwzględna $|a - b|$ różnicy dwóch punktów a i b określa odległość między tymi punktami.



Korzystając z interpretacji geometrycznej możemy rozwiązywać równania i nierówności z wartością bezwzględną.

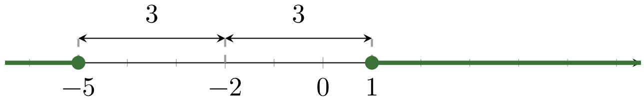
1. Rozwiązaniem równania $|x| = a$, przy czym $a \geqslant 0$, są liczby, których odległość od liczby 0 jest równa a. Zatem $x = a$ lub $x = -a$. Jeśli natomiast $a < 0$, to równanie nie ma rozwiązań.

2. Rozwiązaniem nierówności $|x| < a$, przy czym $a \geqslant 0$, są liczby, których odległość od liczby 0 jest mniejsza niż a. Zatem $x \in (-a, a)$. Jeśli jednak $a < 0$, to rozwiązań nie ma.

3. Rozwiązaniem nierówności $|x| > a$, przy czym $a \geqslant 0$, są liczby, których odległość od liczby 0 jest większa niż a. Zatem $x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$. Jeśli natomiast $a < 0$, to rozwiązaniem jest dowolna liczba rzeczywista.

Przykład 1. Rozwiązać nierówność $|x + 2| \geqslant 3$.

Rozwiązanie. Zapiszemy nierówność jako $|x - (-2)| \geqslant 3$, co oznacza, że szukamy takich liczb x, których odległość od liczby -2 jest większa od 3. Zaznaczymy liczby spełniające nierówność na osi liczbowej.



Nierówność spełniają liczby $x \in (-\infty, -5\rangle \cup \langle 1, \infty)$.

3. Własności wartości bezwzględnej

Twierdzenie. Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b mamy:

1. $|a| \geqslant 0$, przy czym $|a| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$,
2. $|-a| = |a|$,
3. $|a|^2 = a^2$,
4. $|a| \geqslant a$,
5. $|ab| = |a||b|$,
6. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, o ile $b \neq 0$,
7. $|a+b| \leqslant |a| + |b|$, przy czym $|a+b| = |a| + |b|$ wtedy i tylko wtedy, gdy $ab \geqslant 0$,
8. $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$.

Własności wymienione w punktach od (1) do (6) są łatwe w dowodzie, który pominiemy. Będziemy jednak odtąd korzystali z wymienionych własności.

Własność wymieniona w punkcie (7) nazywana jest *nierównością trójkąta.* Udowodnimy ją teraz.

Dowód własności 7. Skorzystamy z własności (3) i (5) oraz ze wzorów skróconego mnożenia w następującym równoważnym przekształceniu tezy.

$$\begin{aligned}
|a+b| &\leqslant |a| + |b|, \\
|a+b|^2 &\leqslant (|a| + |b|)^2, \\
(a+b)^2 &\leqslant |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2, \\
a^2 + 2ab + b^2 &\leqslant a^2 + 2|ab| + b^2, \\
2ab &\leqslant 2|ab|, \\
ab &\leqslant |ab|.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że ostatnia nierówność zachodzi dzięki własności (4).

Udowodnimy teraz dodatek do nierówności trójkąta, badając, kiedy zachodzi w niej równość. Rozpatrzymy wszystkie możliwe wybory znaków liczb a i b:

— jeśli $a \geqslant 0$ i $b \geqslant 0$, to $2|ab| = 2ab$,

— jeśli $a < 0$ i $b < 0$, to $2|ab| = 2(-a)(-b) = 2ab$,

— jeśli $a > 0$ i $b < 0$ lub $a < 0$ i $b > 0$, to $2|ab| = -2ab \neq 2ab$. **Q.E.D.**

Korzystając z nierówności trójkąta możemy następnie udowodnić nierówność z punktu (8).

Dowód własności 8. Zauważmy, że:

$$\begin{aligned}
|a| &= |(a-b) + b|, \\
|b| &= |(b-a) + a|.
\end{aligned}$$

Korzystając z udowodnionej już nierówności trójkąta otrzymamy:

$$|a| = |(a-b) + b| \leqslant |a-b| + |b|, \tag{1}$$
$$|b| = |(b-a) + a| \leqslant |b-a| + |a|. \tag{2}$$

Z nierówności (1) wynika, że
$$|a| - |b| \leqslant |a - b|,$$
a z nierówności (2) otrzymujemy natomiast, że
$$|a| - |b| \geqslant -|a - b|.$$
Łącząc te dwie nierówności mamy
$$-|a - b| \leqslant |a| - |b| \leqslant |a - b|,$$
a więc
$$||a| - |b|| \leqslant |a - b|. \qquad \textbf{Q.E.D.}$$

Podamy teraz prosty przykład zastosowania udowodnionej nierówności trójkąta.

Przykład 2. Rozwiązać nierówność $|x| < |x - 1| + |x + 1|$.

Rozwiązanie. Z nierówności trójkąta wynika, że dla $x \neq 0$ mamy
$$|x - 1| + |x + 1| \geqslant |x - 1 + x + 1| = 2|x| > |x|.$$
Gdy natomiast $x = 0$, to dostaniemy
$$|0 - 1| + |0 + 1| = 2 > |0|.$$
Zatem nierówność jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

4. Zastosowania własności wartości bezwzględnej w zadaniach

Jako przykład zastosowań wymienionych własności wartości bezwzględnej rozwiążemy następujące cztery ciekawe zadania.

Zadanie 1 (por. [1], str. 86). Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y i z zachodzi nierówność
$$|x| + |y| + |z| \leqslant |x + y - z| + |x - y + z| + |-x + y + z|.$$
Dowód. Korzystając trzykrotnie z nierówności trójkąta dostaniemy:
$$\begin{aligned}
|x + y - z| + |x - y + z| &\geqslant |(x + y - z) + (x - y + z)| = 2|x|,\\
|x + y - z| + |-x + y + z| &\geqslant |(x + y - z) + (-x + y + z)| = 2|y|,\\
|x - y + z| + |-x + y + z| &\geqslant |(x - y + z) + (-x + y + z)| = 2|z|.
\end{aligned}$$
Dodajemy otrzymane nierówności i otrzymujemy:
$$\begin{gathered}
|x + y - z| + |x - y + z| + |x + y - z|\\
+ |-x + y + z| + |x - y + z| + |-x + y + z| \geqslant 2|x| + 2|y| + 2|z|,\\
2(|x + y - z| + |x - y + z| + |-x + y + z|) \geqslant 2(|x| + |y| + |z|).
\end{gathered}$$
Dzieląc wreszcie obustronnie przez 2 dostaniemy
$$|x + y - z| + |x - y + z| + |-x + y + z| \geqslant |x| + |y| + |z|. \qquad \textbf{Q.E.D.}$$

Zadanie 2 (por. [1], str. 86). Udowodnić, że jeśli liczby rzeczywiste a, b i c spełniają nierówności $|a+b| \leqslant |c|$, $|b+c| \leqslant |a|$ i $|c+a| \leqslant |b|$, to

$$a+b+c=0.$$

Dowód. Lewa i prawa strona każdej założonej nierówności jest nieujemna, możemy więc je podnieść do kwadratu.

Dla pierwszej nierówności dostaniemy:

$$\begin{aligned} |a+b| &\leqslant |c|, \\ (a+b)^2 &\leqslant c^2, \\ (a+b)^2 - c^2 &\leqslant 0. \end{aligned}$$

Ze wzoru na różnicę kwadratów dostaniemy

$$((a+b)+c)((a+b)-c) \leqslant 0,$$

czyli

$$(a+b+c)(a+b-c) \leqslant 0. \tag{3}$$

Postępując podobnie z dwoma pozostałymi założeniami wywnioskujemy, że

$$(a+b+c)(a-b+c) \leqslant 0 \tag{4}$$

oraz

$$(a+b+c)(-a+b+c) \leqslant 0. \tag{5}$$

Dodajemy nierówności (3), (4) i (5), dostając:

$$\begin{aligned} (a+b+c)(a+b-c) + (a+b+c)(a-b+c) + (a+b+c)(-a+b+c) &\leqslant 0, \\ (a+b+c)(a+b-c+a-b+c-a+b+c) &\leqslant 0, \\ (a+b+c)^2 &\leqslant 0. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że

$$a+b+c=0.$$ **Q.E.D.**

Zadanie 3 (por. [1], str. 86). Wykazać, że jeśli liczby rzeczywiste a, b i c spełniają nierówności $|a-b| \geqslant |c|$, $|b-c| \geqslant |a|$ i $|c-a| \geqslant |b|$, to

$$(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) = 0.$$

Dowód. Skoro obie strony każdego założenia są nieujemne, to możemy podnieść je do kwadratu. Z pierwszego założenia dostaniemy

$$\begin{aligned} |a-b| &\geqslant |c|, \\ (a-b)^2 &\geqslant c^2, \\ (a-b)^2 - c^2 &\geqslant 0, \end{aligned}$$

co dzięki wzorowi na różnicę kwadratów da

$$(a-b-c)(a-b+c) \geqslant 0. \tag{6}$$

Postępując podobnie z pozostałymi nierównościami uzyskamy, że

$$(b-c-a)(b-c+a) \geqslant 0. \tag{7}$$

oraz

$$(c-a-b)(c-a+b) \geqslant 0. \tag{8}$$

Wymnożenie nierówności (6), (7) i (8) stronami daje nam

$$(a-b-c)(a-b+c)(b-c-a)(b-c+a)(c-a-b)(c-a+b) \geqslant 0.$$

Zauważmy, iż wyrazy: pierwszy i szósty, drugi i trzeci oraz czwarty i piąty różnią się jedynie znakiem, więc

$$\begin{gathered}(-1)^3(c-a+b)^2(a-b+c)(a-b+c)^2(b-c+a)^2 \geqslant 0,\\ (c-a+b)(a-b+c)^2(b-c+a)^2 \leqslant 0,\end{gathered}$$

co jest możliwe jedynie wtedy, gdy

$$(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) = 0. \qquad \textbf{Q.E.D.}$$

Nim przejdziemy do ostatniego zadania, udowodnimy pewien lemat, którego będziemy potrzebowali.

Lemat. Dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y zachodzi równość

$$x + y + |x-y| = 2\max(x,y),$$

przy czym $\max(x,y) = \begin{cases} x, & \text{jeśli } x \geqslant y,\\ y, & \text{jeśli } x < y.\end{cases}$

Dowód. Rozpatrzmy możliwe przypadki. Jeśli $x \geqslant y$, to

$$x + y + |x-y| = x + y + x - y = 2x = 2\max(x,y),$$

a jeśli natomiast $x < y$, to

$$x + y + |x-y| = x + y + y - x = 2y = 2\max(x,y). \qquad \textbf{Q.E.D.}$$

Zadanie 4 (por. [2], str. 78). Niech

$$f(a,b,c) = \left|\frac{|b-a|}{|ab|} + \frac{b+a}{ab} - \frac{2}{c}\right| + \frac{|b-a|}{|ab|} + \frac{b+a}{ab} + \frac{2}{c}$$

dla niezerowych liczb rzeczywistych a, b i c. Udowodnić, że

$$f(a,b,c) = 4\max\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right).$$

Dowód. Przekształcimy najpierw wyrażenie $f(a,b,c)$. Mamy

$$\frac{|b-a|}{|ab|} = \left|\frac{b-a}{ab}\right| = \left|\frac{b}{ab} - \frac{a}{ab}\right| = \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right|$$

oraz

$$\frac{b+a}{ab} = \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

więc

$$f(a,b,c) = \left|\left|\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right| + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{c}\right| + \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right| + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c}.$$

Z poprzedniego lematu wiemy, że dowolnych liczb rzeczywistych x i y mamy

$$|x-y| + x + y = 2\max(x,y),$$

więc

$$f(a,b,c) = \left|2\max\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) - \frac{2}{c}\right| + 2\max\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) + \frac{2}{c}.$$

Korzystając raz jeszcze z lematu dostaniemy, że

$$f(a,b,c) = 2\max\left(2\max\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right), \frac{2}{c}\right) = 4\max\left(\max\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right), \frac{1}{c}\right) = 4\max\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right). \quad \textbf{Q.E.D.}$$

Literatura

[1] H. Pawłowski, *Matematyka 1. Zakresy podstawowy i rozszerzony. Zbiór zadań*, Wydawnictwo Pedagogiczne Operon, Gdynia, 2007.

[2] H. Pawłowski, *Zadania z olimpiad matematycznych z całego świata. Teoria liczb, algebra i elementy analizy matematycznej*, Oficyna Wydawnicza Tutor, Toruń, 2005.