

Szkoła Podstawowa nr. 50
im. Włodzimierza Tetmajera w Krakowie

Michał Rychter
Krzysztof Suliński

KOSTKA RUBIKA ***W MATEMATYCE***

Opiekun pracy:
mgr Dorota Szczepańska

Kraków, luty 2020

Braliśmy udział w zeszłorocznym konkursie i bardzo się nam podobało to doświadczenie. W tym roku postanowiliśmy połączyć nasze zamiłowanie do Kostki Rubika z matematycznym tematem pracy.

Okazuje się, że ten wynalazek ma już pół wieku i był początkowo zamyślony jako pomoc dydaktyczna. Od tamtego czasu powstało wiele różnych odmian tej zabawki logicznej. Sam wynalazca układał ją za pierwszym razem przez... miesiąc. Aktualny światowy rekord to niecałe 4 sekundy.

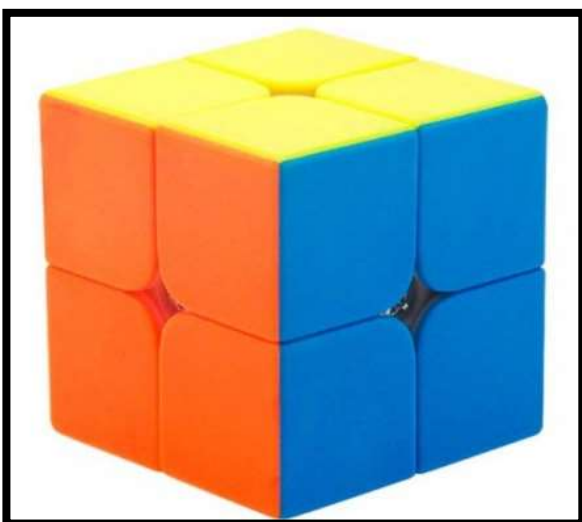
Nasza przygoda z kostką zaczęła się kilka lat temu, kiedy traktowaliśmy ją jako elementy dziecięcej kolekcji, całkowicie niemożliwe do ułożenia. Po poznaniu podstawowych algorytmów i kilkunastu dniach treningu, układanie zajmuje nam około minuty :)

HISTORIA I RODZAJE KOSTEK

Kostkę Rubika wymyślił w **1974 roku** węgierski profesor **Erno Rubik** był profesorem architektury na budapesztańskiej Akademii Sztuki Użytkowej. Kostkę wymyślił po to, aby **pomóc studentom w zrozumieniu przestrzeni**.

„Zwykłe” sześciennie Kostki Rubika dzielimy na dwa rodzaje: **parzyste i nieparzyste**. To do jakiej z tych dwóch grup zalicza się kostka rozpoznajemy po ilości elementów na jednej ścianie (np. kostka 2x2x2 jest kostką parzystą, ponieważ ma cztery elementy na jednej ścianie).

KOSTKI PARZYZSTE

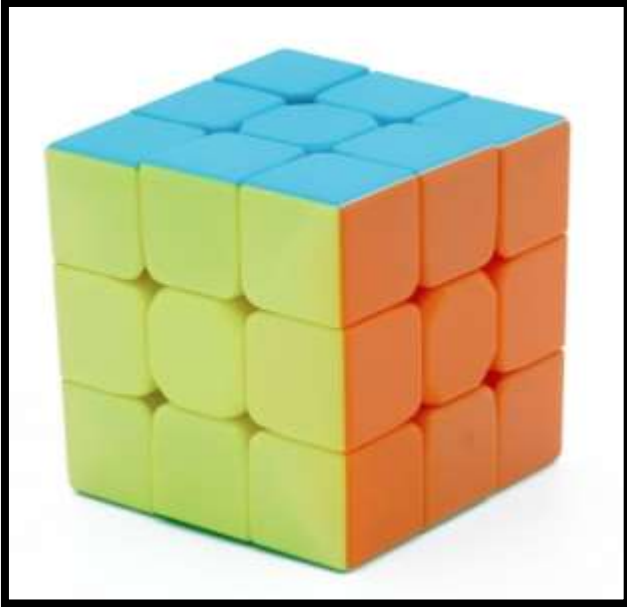


Kostka **2x2x2**

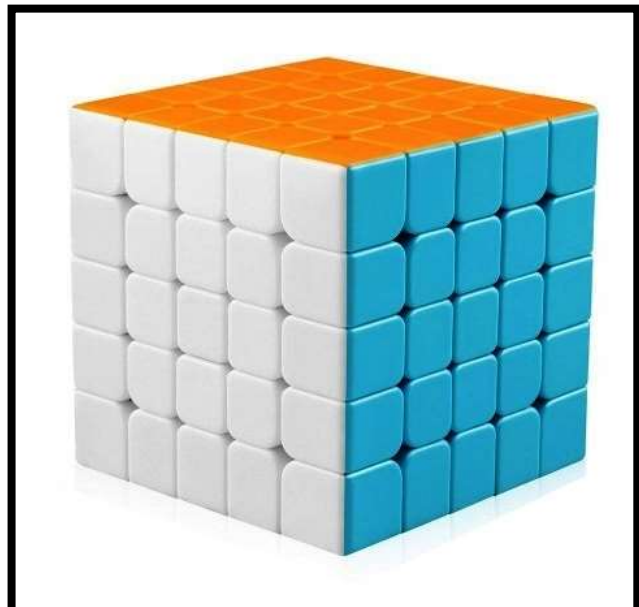


Kostka **4x4x4**

KOSTKI NIEPARZYSTE



Kostka **3x3x3**



Kostka **5x5x5**

TERMINOLOGIA

NAZWY ELEMENTÓW

NAROŻNIK	NAROŻNIK
NAROŻNIK	NAROŻNIK

KOSTKA 2x2x2

W całej kostce jest

- 8 narożników

KOSTKA 3x3x3

W całej kostce jest:

2

- 8 narożników
- 12 krawędzi
- 6 środków (center)

NAROŻNIK	KRAWĘDŹ	NAROŻNIK	
KRAWĘDŹ	ŚRODEK (CENTRA)	KRAWĘDŹ	
NAROŻNIK	KRAWĘDŹ	KRAWĘDŹ	NAROŻNIK
KRAWĘDŹ	ŚRODEK (CENTRA)	ŚRODEK (CENTRA)	KRAWĘDŹ
KRAWĘDŹ	ŚRODEK (CENTRA)	ŚRODEK (CENTRA)	KRAWĘDŹ
NAROŻNIK	KRAWĘDŹ	KRAWĘDŹ	NAROŻNIK

KOSTKA 4x4x4

W całej kostce jest:

- 8 narożników
- 24 krawędzi
- 24 środków (center)

NAROŻNIK	KRAWĘDŹ	KRAWĘDŹ	KRAWĘDŹ	NAROŻNIK
KRAWĘDŹ	ŚRODEK (CENTRA)	ŚRODEK (CENTRA)	ŚRODEK (CENTRA)	KRAWĘDŹ

KOSTKA 5x5x5

W całej kostce jest:

- 8 narożników
- 48 krawędzi
- 54 środków (center)

KRAWĘDŹ	ŚRODEK (CENTRA)	ŚRODEK (CENTRA)	ŚRODEK (CENTRA)	KRAWĘDŹ
KRAWĘDŹ	ŚRODEK (CENTRA)	ŚRODEK (CENTRA)	ŚRODEK (CENTRA)	KRAWĘDŹ
NAROŻNIK	KRAWĘDŹ	KRAWĘDŹ	KRAWĘDŹ	NAROŻNIK

NOTACJE

Notacje na kostce są używane przy zapisywaniu algorytmów – czyli ciągów ruchów na kostce. Notacje to te pojedyncze literki obrazujące ruchy kostki. Każda z nich jest skrótem od angielskich nazw:

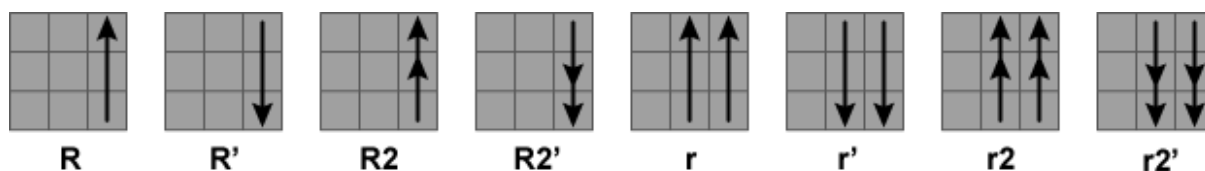
R - right (prawo), **L- left** (lewo),
D - down (dół), **U- up** (górze),
F - front (przód), **B – back** (tył).

Gdy przy literce nie ma apostrofu to ruch jest wykonywany zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Lecz gdy jest (zapisujemy to tak: U'), to ruch wykonujemy przeciwnie do ruchów wskazówek zegara.

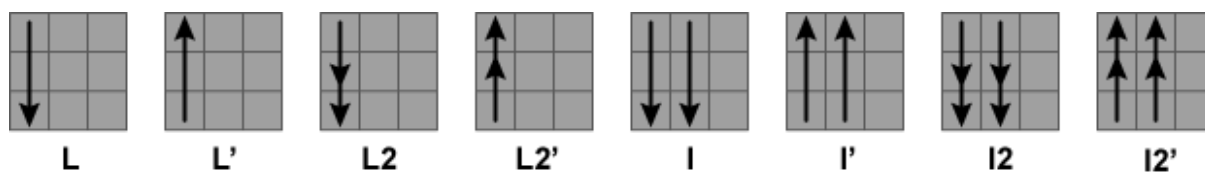
Można też się spotkać z literą i cyfrą 2 (np. **U2**) wtedy wykonujemy ten ruch dwa razy. Natomiast jeżeli literka jest mała (np. **u2**) to oznacza, że ruch wykonujemy dwoma ściankami.

Poniżej przedstawiamy wszystkie notacje w formie obrazkowej:

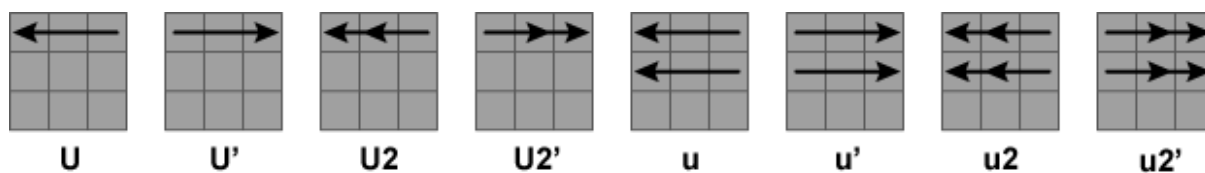
RUCHY „R”



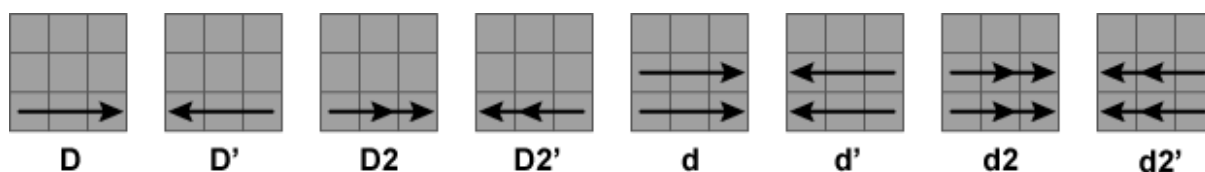
RUCHY „L”



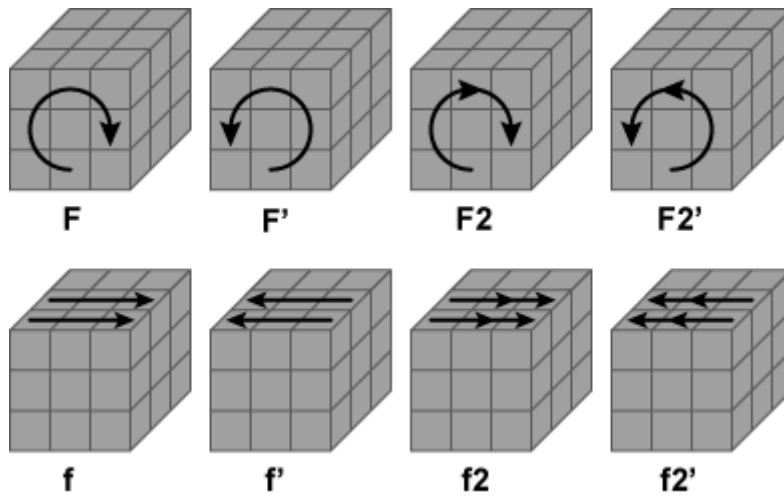
RUCHY „U”



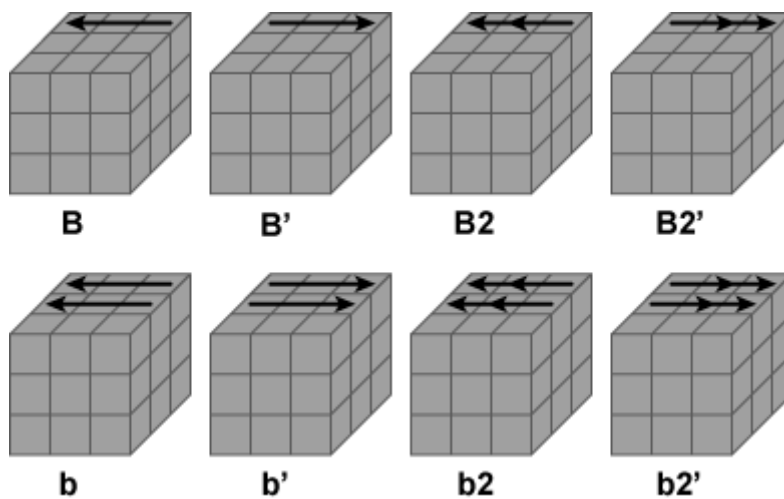
RUCHY „D”



RUCHY „F”



RUCHY „B”



METODY UKŁADANIA

Kostka 2x2x2

1. Ułożenie pierwszej warstwy

Algorytm: **RUR'U' / LUL'U'**

2. Ustawienie narożników (tak aby były w dobrych miejscach)

Algorytm: $U R U' L' U R' U' L$

3. Wstawienie narożników

Algorytm: $R U R' U' / L U L' U'$

Kostka 3x3x3

1. Ułożenie krzyża z dobrze ustawionymi krawędziami

Intuicyjnie - **bez algorytmu**

2. Ułożenie pierwszej warstwy

Algorytm: $R U R' U' / L U L' U'$

3. Ułożenie drugiej warstwy

Algorytm: $U' L' U L U F U' F' / U R U' R' U' F' U F$

4. Ułożenie żółtego krzyża

Algorytm: $F R U R' U' F'$

5. Ustawienie krawędzi (w dobrych miejscach)

Algorytm: $R U R' U R U^2 R' U$

6. Ustawienie krawędzi (w dobrych miejscach)

Algorytm: $U R U' L' U R' U' L$

7. Wstawienie narożników

Algorytm: $R U R' U' / L U L' U'$

Kostka 4x4x4

1. Ułożenie center (środków)

Intuicyjnie - **bez algorytmu**

2. Ułożenie krawędzi

Algorytm: $d R U R' F R F' R' d'$

3. Po ułożeniu centrów i krawędzi kostkę układamy **tak samo jak kostkę 3x3x3.**

Kostka 5x5x5

1. Ułożenie center (środków)

2. „Trójkowanie” krawędzi
3. Ułożenie kostki **tak samo jak kostki 3x3x3**.

Tutaj nie podawaliśmy algorytmów, ponieważ jest ich bardzo dużo i można by im poświęcić całą osobną pracę.

KOMBINATORYKA

Zacznijmy może od tego czym jest kombinatoryka – **jest to dział matematyki, zajmujący się badaniem struktur skończonych lub nieskończonych, ale przeliczalnych.**

Pomaga ona odpowiedzieć na pytania takie jak: *Jakie jest prawdopodobieństwo trafienia „6” w „totolotka”?* lub *Na ile sposobów możemy usadzić sześć osób przy 6-osobowym stole?*

Aby rozwiązać tego typu zadania, często stosuje się wzory na **permutacje, kombinacje, wariacje oraz wariacje z powtórzeniami**. No właśnie, ale czym są te permutacje, kombinacje, wariacje oraz wariacje z powtórzeniami, oraz jaki jest związek pomiędzy kombinatoryką, a kostką Rubika?

Zacznijmy może od tego drugiego pytania - **kombinatoryka pozwoli nam obliczyć ilość różnych ułożeń kostki.**

A teraz odpowiedź na pierwsze pytanie:

- **PERMUTACJA** - wzajemnie jednoznaczne przekształcenie pewnego zbioru na siebie.
- **KOMBINACJA** - każdy podzbiór skończonego zbioru.
- **WARIACJA** - dowolny ciąg różnych elementów wybranych z pewnego skończonego zbioru.
- **WARIACJA Z POWTÓRZENIAMI** - dowolny, skończony ciąg elementów wybranych z pewnego skończonego zbioru.

Jeżeli będziemy chcieli obliczyć ilość możliwych ułożeń musimy przyjąć (na razie teoretycznie, nie biorąc pod uwagę budowy kostki), że kostka składa się z **3 x 3 x 3 = 27 elementów**.

Każdy element możemy ułożyć na sześć sposobów, czyli kostkę możemy ułożyć na:

$$6^{27} = 1,02 \times 10^{21}$$

Ale zaraz, zaraz. Jak rozłożymy kostkę Rubika okaże się, że mamy **tylko 26 elementów**. Jest tak dlatego, że w samym środku kostki nie ma elementu. Teraz nasze równanie wygląda tak:

$$6^{26} = 1,70 \times 10^{20}$$

Natomiast, jeśli dodatkowo przyjmiemy, że każdy z 26 elementów **może być na miejscu każdego innego** to okaże się, że musimy tu wykorzystać omawianą wcześniej permutację. Nasze równanie uwzględniające to założenie będzie wyglądało następująco:

$$6^{26} \times 26! = 6,88 \times 10^{46}$$

Oczywiście takie obliczenia są teoretyczne, ponieważ poszczególne elementy kostki pasują tylko w określone miejsca, a poszczególnych nie możemy odzepić od znajdującego się w środku „krzyżaka”.

Musimy w takim razie zacząć zmieniać nasze obliczenia, ograniczając ilość możliwych ułożeń. Teraz będziemy musieli kolejno zmieniać nasze obliczenia biorąc pod uwagę kolejne własności budowy kostki. Zaczniemy od środków (center) - w całej kostce jest ich tylko sześć. Jako, że te elementy mogą być umiejscowione tylko w jednym miejscu, nasze wyliczenia musimy trochę zmienić. Nasza liczba będzie wtedy wyglądała tak:

$$6^{20} \times 20! = 8,90 \times 10^{33}$$

Teraz musimy się przyjrzeć kostce, aby móc kontynuować nasze obliczenia. Prócz sześciu center na kostce mamy dwanaście dwukolorowych krawędzi (chodzi o elementy po środku krawędzi całej kostki). Tak więc od 20 małych sześciątów (z poprzedniego ograniczania) musimy odjąć jeszcze 12. Wprawdzie ruchomych, ale tylko dwukolorowych. Każdy z tych 12 elementów może występować w dwunastu różnych pozycjach. Jaka zatem jest możliwa liczba takich układów?

Z dwunastoelementowego zbioru wybieramy także dwunastoelementowe ciągi. Jest to permutacja, więc liczba układów wynosi **12!**. Każdy z tych dwukolorowych klocków może występować w dwóch pozycjach. Więc ilość możliwych układów wynosi **2¹²**. Tak więc teraz ilość układów krawędzi wynosi **12! x 2¹²**. Zatem teraz nasza liczba możliwych ułożeń kostki to:

$$6^8 \times 8! \times 2^{12} \times 12! = 1,33 \times 10^{23}$$

Jako, że podczas naszego „ograniczania” liczby możliwych ułożeń wzięliśmy już pod uwagę centry i krawędzie, więc zostały nam narożniki. Narożniki mają trzy kolory.

Obliczamy to podobnie jak przy krawędziach: mamy osiem narożników i możemy je rozmieścić w ośmiu różnych lokalizacjach czyli **8!** Każdy z trzykolorowych narożników może przyjąć trzy różne orientacje - liczba możliwych układów to **3⁸**.

Otrzymujemy więc ogólną liczbę możliwych układów w kostce Rubika:

$$12! \times 2^{12} \times 8! \times 3^8 = 5,19 \times 10^{20}$$

Ale moment, czy o czymś nie zapomnieliśmy? Musimy wziąć jeszcze pod uwagę, to że krawędzie lub narożniki mogą być ze sobą pozamieniane. Jeśli chcemy to wziąć pod uwagę, to naszą dotychczasową liczbę musimy podzielić

$$\frac{12! \times 2^{12} \times 8! \times 3^8}{12} = 4,33 \times 10^{19}$$

A jest to dokładnie:

43 252 003 274 489 856 000

Ufff... to już koniec naszych długich obliczeń.
Jeszcze tylko to przeczytać:

ok. 43,2 tryliony
możliwych wersji ułożenia kostki 3x3x3.

przez $3 \times 2 \times 2 = 12$. Nasz wynik to ostatecznie:

A jak sobie to wyobrazić?

Dla zobrazowania jak wielka jest to liczba pomyślmy o najbogatszym państwie na świecie. To Stany Zjednoczone Ameryki Północnej. Budżet tego kraju na wszystkie wydatki w całym USA na 2020 rok jest... 7,5 miliona razy mniejszy od naszej liczby (w przeliczeniu na złotówki).

WNIOSKI

- Dziecięca zabawka kryje w sobie ogrom matematycznych kombinacji,
 - Parząc na kostkę Rubika widzimy tylko 26 ruchomych elementów,
 - Można się nauczyć ją sprawnie układać, ale...
 - Trudno uwierzyć, że różnorodność możliwych ułożeń jest opisywana aż dwudziestocyfrową liczbą,
 - Matematyka jest wszędzie i pozwala rozwiązać niedostrzegalne początkowo problemy.
-

BIBLIOGRAFIA

- pl.wikipedia.org
- Historia Kostki Rubika oraz definicje.
- www.matemaks.pl
- Kombinatoryka
- www.rubiks.com
- Historia Kostki Rubika
- www.worldcubeassociation.org
- Rekord układania kostki
- towarzystwo.edu.pl
- Praca matematyczna o kostce Rubika,
- kostkarubika.net
- Zapisy notacji
- allegro.pl
- Zdjęcia kostek
- kostkirubikasklep.pl
- Zdjęcie kostki
- imged.pl
- Zdjęcie kostki

którą przeczytaliśmy przed napisaniem
naszej pracy