Szkoła Podstawowa nr 50 im. Włodzimierza Tetmajera w Krakowie

# NIEKTÓRE WŁASNOŚCI OŚMIOŚCIANU FOREMNEGO WYKONANEGO W TECHNICE ORIGAMI

*Małgorzata Mazur*
*Maria Rychter*

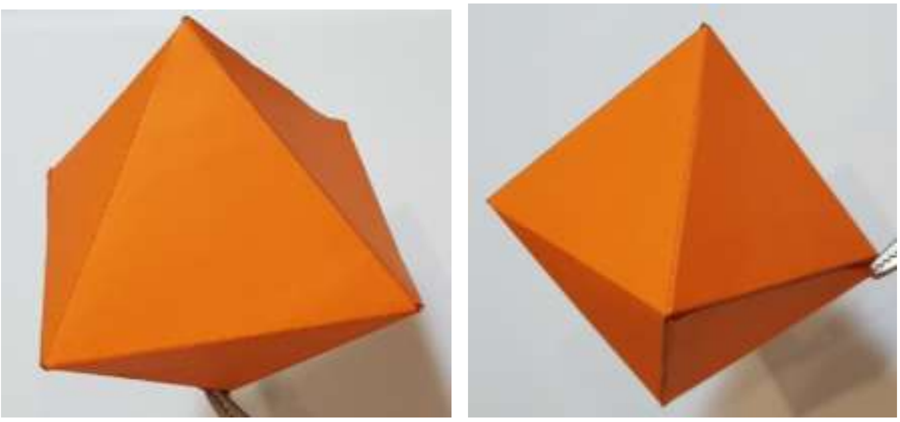
*Opiekun pracy:*
*mgr Dorota Szczepańska*

Kraków, luty 2020 r.

Nasza przygoda z konkursem zaczęła się od zabawy origami i zamiłowania do matematyki. Kiedy bawiąc się origami zbudowałyśmy poniższy model (rys.1), nasza Pani od matematyki zachęciła nas do tego, żeby wykorzystać ją jako część pracy konkursowej.

Rys.1

Oczywiście chętnie się zgodziłyśmy choć początkowo zniechęciła nas zabawna potoczna nazwa tej figury: OŚMIOŚCIAN DLA LENIWYCH. Pani pokazała nam również model OŚMIOŚCIANU FOREMNEGO (rys.2) i zaproponowała nam porównanie obydwu modeli.



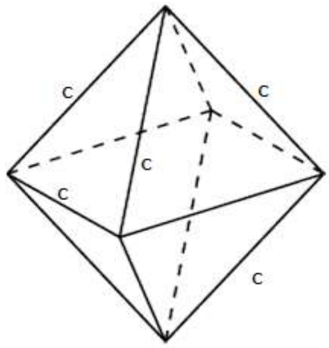
Rys.2

Pani zapytała nas: czy wiemy lub jak myślimy:

**KTÓRA Z TYCH FIGUR BĘDZIE MIAŁA WIĘKSZE POLE POWIERZCHNI CAŁKOWITEJ**.

By znaleźć odpowiedź na to pytanie było trzeba dokonać obliczeń, co jest tematem niniejszej pracy. Pierwszą rzeczą było poszukanie informacji co to w ogóle jest ośmiościan foremny?

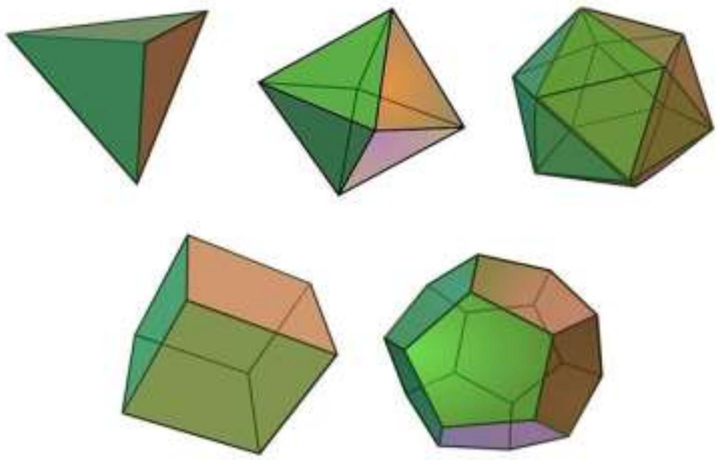
Według zdobytej przez nas wiedzy, ośmiościan foremny to figura posiadająca 8 ścian, z których każda jest trójkątem równobocznym. Ma 12 krawędzi i 6 wierzchołków (rys.3). Jest też bryłą platońską.




Rys.3

Nazwa WIELOŚCIANY PLATOŃSKIE pochodzi od nazwiska znanego, greckiego filozofa i matematyka. Platon bryłom zbudowanym z trójkątów, kwadratów lub pięciokątów nadał nazwy i znaczenia. Żeby powstało naroże z takich jednakowych płaszczyzn potrzebne są co najmniej 3 ściany. Zatem jeśli wielokąty foremne tego samego rodzaju maja utworzyć naroże, to takich kombinacji jest właśnie pięć (rys.4):

- tetraedr (czworościan foremny) - odpowiadał żywiołowi ognia
- heksaedr (sześcian foremny) - odpowiadał żywiołowi ziemi
- oktaedr (ośmiościan foremny) – odpowiada żywiołowi powietrza
- dodekaedr (dwunastościan foremny) - odpowiadał za cały wszechświat
- ikosaedr (dwudziestościan foremny) - odpowiadał żywiołowi wody



Rys.4 (źródło: wikipedia.pl)

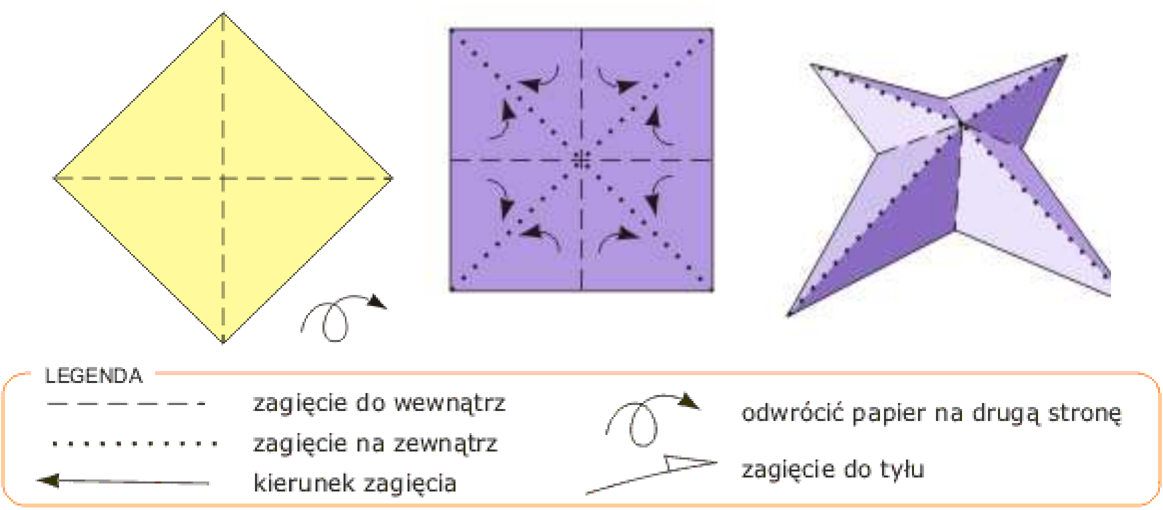
WŁASNOŚCI BRYŁ PLATOŃSKICH

1. Wszystkie ściany są wielokątami foremnymi przystającymi,
2. W każdym wierzchołku zbiega się taka sama liczba ścian,
3. Bryły platońskie są bryłami wypukłymi.

Teraz spróbujemy opisać w jaki sposób zbudowałyśmy pierwotny model origami.

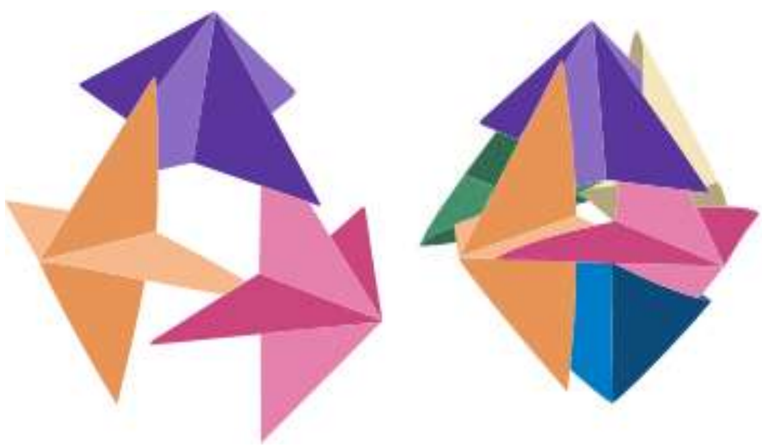
Jest to tzw. model wierzchołkowy, dlatego wykonujemy go z 6 jednakowych modułów (ośmiościan foremny ma 6 wierzchołków). Potrzebnych jest w tym celu 6 jednakowych kwadratowych kartek dowolnej wielkości. My wykonałyśmy model o boku kwadratu równego 21 cm.

Pojedynczy moduł - każdą kartkę osobno zaginamy wzdłuż wszystkich osi symetrii kwadratu (rys.5) formując rozgwiazdę.



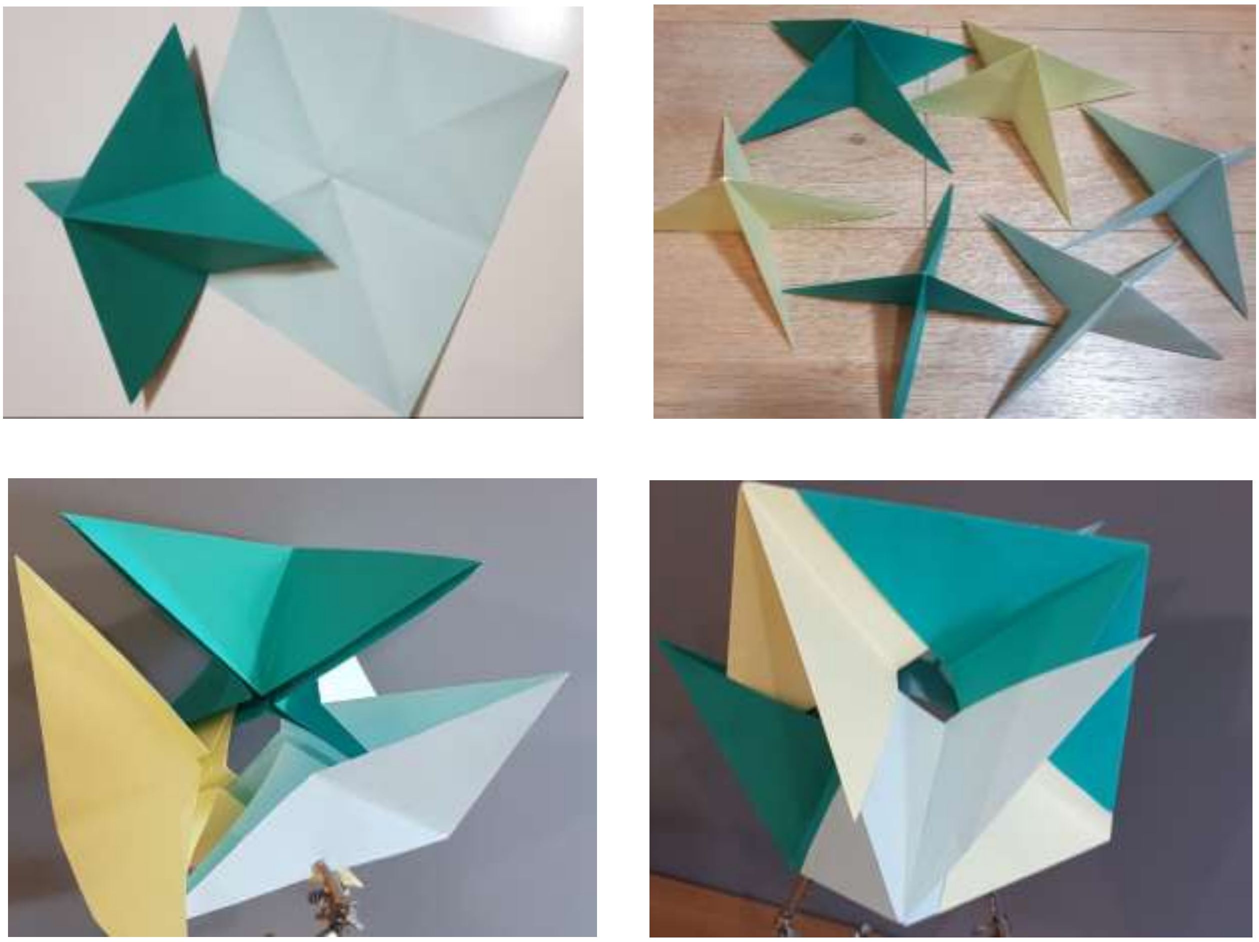

Rys.5 (źródło: matematyka.wroc.pl)

Jak złożyć model - powstałych 6 elementów nasuwamy jeden na drugi, po dwa z każdego z trzech prostopadłych kierunków (jeden z góry, drugi z dołu, trzeci z przodu, czwarty z tyłu, piąty z prawej, szósty z lewej). Należy uważać, aby co drugie ramię rozgwiazdy wypadało na wierzchu, a co drugie wewnątrz konstrukcji (rys.7).



Rys.6 (źródło: Internet)

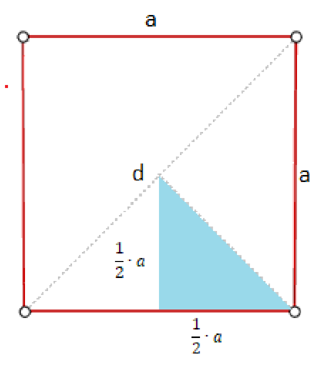
Ostateczny efekt widzimy na zdjęciach poniżej (rys.7):



Rys.7

Następnie wykonałyśmy obliczenia. Pomagali nam rodzice, bo podobno bardzo ważna w matematyce jest umiejętność wyprowadzania wzorów. I to nie na liczbach, tylko na ogólnych zasadach, korzystając z literek opisujących dane matematyczne. Wtedy można skrócić obliczenia liczbowe oraz podstawić dowolne dane początkowe.

Zaczęłyśmy od jednej z 3 powierzchni tworzących „wnękę" bryły origami:




Rys.8

Policzyłyśmy powierzchnię tego zaznaczonego powyżej trójkąta (rys.7 i 8):

$$P\Delta = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a\right)$$

$$P\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{1}{8} \cdot a^2$$

$$P\Delta = \frac{1}{8} \cdot a^2$$

A skoro powierzchnia całkowita OŚMIOŚCIANU Z ORIGAMI składa się z 12 takich trójkątnych ścian, to powierzchnia całkowita tej bryły wynosi:

$$P_{całk.\ ORIGAMI} = 12 \cdot \frac{1}{8} a^2 = \frac{3}{2} a^2$$

$$\boldsymbol{P_{całk.\ ORIGAMI}} = 1{,}50 \cdot \boldsymbol{a^2}$$

Nasz model powstawał z kartek A4. Wycięłyśmy kwadraty o długości boku krótszej krawędzi kartki, czyli 21 cm (będziemy wykonywać obliczenia w centymetrach, bo tak łatwiej sobie to wyobrazić). To nasza wartość "a" boku kwadratu, który posłużył nam do zbudowania obu figur.

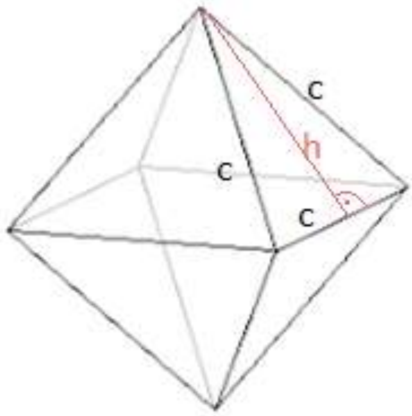
Sprawdźmy. Jak pokazałyśmy powyżej, potrzebna jest połowa boku i połowa przekątnej . Zmierzyłyśmy odcinki w naszym ośmiościanie foremnym wykonanym z przyciętych kwadratów. Długości odcinków przy pomiarach zgadzały się z obliczeniami. Hurrraaa :)

Zatem pole powierzchni całej bryły:

$$\boldsymbol{P_{całk.\ Ośmiościanu\ ORIGAMI}} = 1{,}\boldsymbol{5} \cdot 2\boldsymbol{1^2} = 1{,}\boldsymbol{5} \cdot 441 = 661{,}\boldsymbol{5\ cm^2}$$

Uzyskałyśmy zatem pierwszą informację w naszej pracy.

Teraz zajmiemy się obliczeniem pola powierzchni bryły platońskiej. OKTAEDR zbudowany jest z ośmiu trójkątów o boku „c” (rys.9).



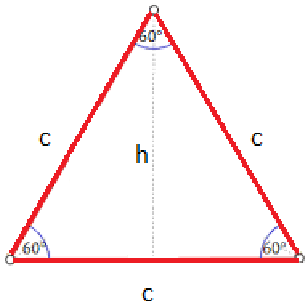

Rys.9

Spójrzmy na naszą początkową rozgwiazdę tworzącą bryłę origami. Stanowi ona niejako szkielet dla oktaedru, którego ściany obudowują początkową bryłę origami (spójrz na rys. 1 i 2)

Krawędź „c” jest bokiem obliczanego trójkąta równobocznego. Jest to połowa przekątnej „d” kwadratu o boku „a” (rys. 7 i 8). Oczywiście znamy wzór na pole trójkąta, więc przeszłyśmy do wyliczenia jego powierzchni.

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} c \cdot \boldsymbol{h}$$

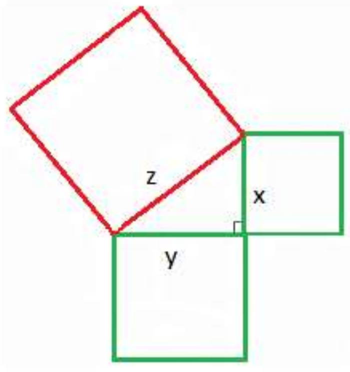
Hmmm. Tylko ile wynosi wysokość „h”?




Rys.10

Jak widać połowa tego trójkąta jest trójkątem prostokątnym (rys.10). A o takim napisał twierdzenie niejaki Pitagoras (a przynajmniej jest ono nazwane jego imieniem). Wykazał on, (lub któryś z jego uczniów), że suma kwadratów narysowanych na bokach przyprostokątnych tego trójkąta, jest równa kwadratowi narysowanemu na boku przeciwprostokątnej (rys.11):

$$x^2 + y^2 = z^2$$



Rys.11

Stosując tę zasadę do naszego trójkąta będącego ścianą naszej bryły platońskiej:

$$h^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot c\right)^2 = c^2$$

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot c\right)^2$$

$$h^2 = c^2 - \frac{1}{4}c^2 = c^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} \cdot c^2$$

$$h = \sqrt{\frac{3}{4}c^2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} \cdot \sqrt{c^2}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot c$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, policzyłyśmy też długość przekątnej kwadratu.

$$a^2 + a^2 = d^2$$

$$d^2 = 2 \cdot a^2$$

$$\sqrt{d^2} = \sqrt{2 \cdot a^2}$$

$$d = \sqrt{2} \cdot a$$

A znając te dane możemy wrócić do obliczania pola trójkąta. Zatem:

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} c \cdot h$$

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot c$$

$$P_{\Delta} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot c^2$$

Pozostało już podstawienie danych, które wcześniej wyliczyłyśmy:

$$c = \frac{1}{2} d \qquad \text{oraz} \qquad d = \sqrt{2} \cdot a$$

$$P_{\Delta} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} d\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{4} d^2$$

$$P_{\Delta} = \frac{\sqrt{3}}{16} (\sqrt{2} \cdot a)^2 = \frac{\sqrt{3}}{16} \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot a^2 = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{16} \cdot a^2$$

$$P_{\Delta} = \frac{\sqrt{3}}{8} a^2$$

Znamy już pole trójkąta tworzącego OKTAEDR. Ten ośmiościan foremny składa się z ośmiu takich trójkątów, zatem pole powierzchni całkowitej tej bryły platońskiej to:

$$P_{całk.\,OKTAEDRA} = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} a^2 = \sqrt{3} \cdot a^2$$

$$P_{całk.OKTAEDRA} = 1{,}73 \cdot a^2$$

A podstawiając dane z naszego kwadratu wyciętego z kartki A4:

$$P_{całk.pełnego\ OKTAEDRA} = 1{,}73 \cdot 21^2 = 1{,}73 \cdot 441 \approx 762{,}93 cm^2$$

<u>Odpowiedź:</u>

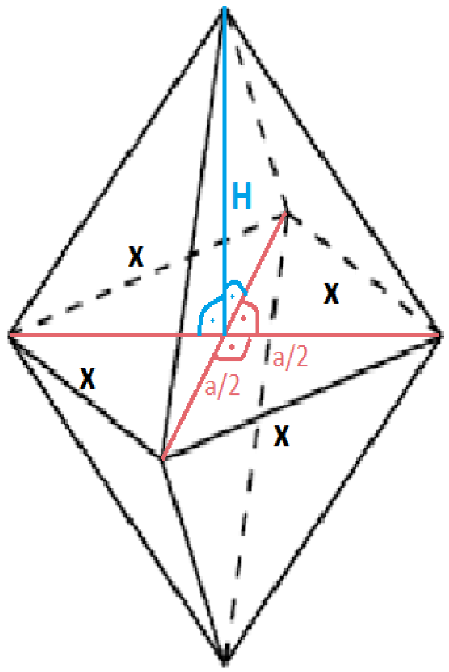
$1{,}73\ a^2 > 1{,}50\ a^2$, (w naszym przypadku ok.763 $cm^2$ > ok.662 $cm^2$),

**OKTAEDR** (czyli ośmiościan foremny) **ma większe pole powierzchni, niż ORIGAMI** (zwany ośmiościanem dla leniwych)**.**

Zgodnie z sugestią naszej pani od matematyki podeszłyśmy jeszcze do wyliczenia

**OBJĘTOŚCI PEŁNEGO OŚMIOŚCIANU FOREMNEGO.**

Składa się on z dwóch ostrosłupów czworokątnych prawidłowych (połączonych podstawą, jeden od góry i drugi od dołu – rys.12).




Rys.12

Wzory dla obliczenia objętości:

$$V_{ostrosłupa} = \frac{1}{3} \bullet P_{podstawy} \cdot H$$

$$V_{ośmiościanu} = 2 \cdot V_{ostrosłupa} = 2 \cdot \frac{1}{3} \bullet P_{kwadratu} \cdot H$$

Długość boku i pole kwadratu, będącego podstawą ostrosłupa, obliczyłyśmy na podstawie rys. 5 i 8. Bok tego kwadratu „x" jest przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego. Jest on jednocześnie podstawą tego trójkąta równoramiennego o ramieniu równym połowie naszej początkowej kartki papieru, czyli „$^{a}/_{2}$". Znowu sięgamy do twierdzenia Pitagorasa:

$$\left(^{a}/_{2}\right)^{2} + \left(^{a}/_{2}\right)^{2} = x^{2}$$

$$x = \sqrt{\frac{a^{2}}{4} + \frac{a^{2}}{4}} = \sqrt{\frac{2a^{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$P_{pods.(kwadratu)} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^{2} = \frac{2}{4}a^{2} = \frac{a^{2}}{2}$$

Wysokość ostrosłupa to połowa boku kwadratu (rys.5), czyli:

$$H = \frac{a}{2}$$

Pozostało nam podstawić:

$$V_{ośmiościanu} = 2\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\frac{a}{2}$$

$$V_{ośmiościanu} = \frac{a^3}{6}$$

I policzyć objętość naszego modelu, gdyby „wypełnić" jego ściany. Przypominamy, że „a" to nasz bok kwadratu o długości 21 cm:

$$V_{ośmiościanu} = \frac{21^3}{6} = \frac{9261}{6} \approx 1544\ \mathrm{cm}^3 \approx 1{,}5\ \mathrm{dm}^3$$

Odpowiedź:

**Objętość ośmiościanu foremnego,**
zbudowanego na bryle origami złożonej z kwadratów o boku a=21 cm,
**wynosi ok. 1,5 dm$^3$, co odpowiada pojemności butelki półtoralitrowej.**

## WNIOSKI

czyli czego się nauczyłyśmy przy tej pracy.

- Zabawa w origami to też matematyka,
- **Poznałyśmy co to są bryły platońskie,**
- Ćwiczyłyśmy odczytywać dane z rysunku bryły lub figury płaskiej, (przez analogię do brył i figur je tworzących),
- **Poznałyśmy twierdzenie Pitagorasa** (i dowiedziałyśmy się, co to jest pierwiastkowanie),
- Wiemy, że trójkąt równoboczny i równoramienny można przedstawić jako dwa trójkąty prostokątne,
- **Nauczyłyśmy się wyliczać przekątną kwadratu,**
- Jaka jest korzyść ze stosowania „literek" we wzorach, (zamiast liczb w początkowych obliczeniach),
- Matematyka jest fajna.

oraz

- Wykazałyśmy, że **szkielet ośmiościanu ma mniejszą powierzchnię, niż jego zewnętrzna powłoka,**

- **Objętość ośmiościanu zbudowanego z kartek A4 wynosi tyle, co pojemność 1,5-litrowej butelki napoju.**

# BIBLIOGRAFIA (ŹRÓDŁA)


1. M. Braun, A. Mańkowska, M. Paszyńska, K. Wiej, W. Babiański, E. Szmydtkiewicz, J. Janowicz „Matematyka z kluczem”- podręcznik do klasy siódmej („Nowa Era”, 2017 r.)
2. www.Wikipedia.pl,
3. www.matematyka.wroc.pl,
4. www.obliczeniowo.com.pl.