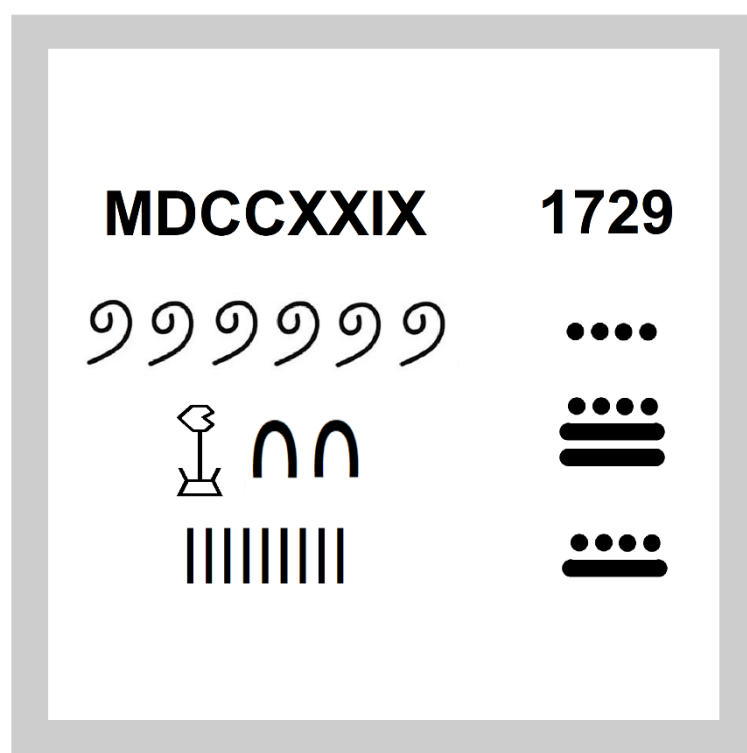


TROCHE HISTORII O HISTORII LICZB I ICH LICZENIU



Opracowała :

Magdalena Bachleda – Żarska,

Szkoła Podstawowa nr 2 im. Mikołaja Kopernika w Nowym
Targu,

Klasa 7 c

1. Początki liczb i obliczeń.

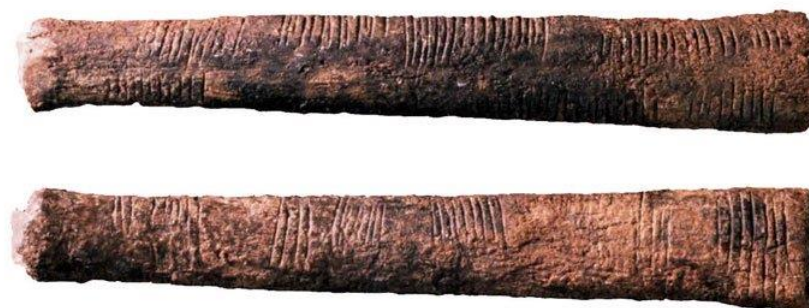
„Bóg stworzył liczby naturalne, reszta jest dziełem człowieka”

Leopold Kronecker

Matematyka istnieje już tak długo jak ludzkość. Jest ona bardzo rozległą dziedziną nauki. Matematyką pierwszych ludzi było zaledwie zliczanie przedmiotów i zwierząt. Pasterz na pewno liczył owce przed opuszczeniem ich na pastwisku i po powrocie do zagrody aby mieć pewność, że są wszystkie. Nie musiał on wykonywać żadnych skomplikowanych obliczeń, wystarczało tylko dodawanie i odejmowanie. Nie musiał znać też nazw liczb. Mógł liczyć na palcach i takimi symbolami się posługiwać. Przykładowo mógł stwierdzić, że brakuje mu „palec wskazujący owiec”. Oznaczałoby to, że zaginęły mu dwie owce. Jednak gdyby ktoś powiedział pasterzowi, że brakuje mu „dwóch owiec” to prawdopodobnie by go nie zrozumiał. Liczenie na palcach stanowiłoby dla pasterza problem dopiero wtedy, kiedy miałby więcej owiec niż palców. Z tego powodu zaczęto zapisywać liczby i obliczenia. Określano nazwy i znaki dla coraz większych ilości. Każdy mógł inaczej mówić i inaczej zapisywać liczbę 7 ale każdy miał na myśli tą samą ilość. Różne cywilizacje radziły sobie inaczej z problemem zapisu liczb.

Jedną z najciekawszych, znanych nam dawnych prób zapisu liczb jest odkryta w 1960 r. przez francuskiego archeologa, Jeana de Heinzelin de Braucourta, kość strzałkowa pawiana z wyciętymi na niej kreskami. Została odnaleziona w Ishango (na granicy dzisiejszej Ugandy i Kongo). Stąd pochodzi jej nazwa – kość z Ishango (rys.1). Szacuje się, że ma około 20 000 lat i pochodzi z paleolitu. Naukowcy stwierdzili, że te kreseczki są śladami rachunków pierwotnych ludzi. Na kości widać trzy rzędy nacięć. W pierwszym jest ich 60, w drugim 48, w trzecim ponownie 60. Nacięcia prawdopodobnie oznaczają ilość upolowanych przez posiadacza kości zwierząt ale w nacięciach można też zauważyć zaskakujący porządek. Pierwszy rząd zawiera nacięcia w czterech grupach: 19, 17, 13 i 11 nacięć. Przecież to liczby pierwsze pomiędzy 10 a 20 ! W drugim rzędzie mamy kolejno 3, 6, 4 i 8 nacięć. Czyżby to była próba przedstawienia mnożenia $3 \times 2 = 6$ i $4 \times 2 = 8$? Dalej jest 10, 5, 5 i 7 nacięć. Może to przedstawienie dzielenia bo przecież $\frac{10}{2} = 5$? W trzecim rzędzie nacięcia występują w grupach 11, 21, 19 i 9. Być może to dodawanie i odejmowanie: $10 + 1$, $20 + 1$, $20 - 1$, $10 - 1$? Kość z Ishango nie jest jedyną ani najstarszą taką

kością z nacięciami. Znana jest tzw. kość z Lebombo, której wiek szacowany jest na 37000 lat z 29 wyraźnymi nacięciami. Przypuszcza się, że był to zapis kalendarza księżycowego gdyż podobnymi posługują się do dzisiaj Buszmeni z Namibii. Znalaziono więcej podobnych, również w Europie. A być może kości z Ishango, Lebombo i inne nie ukazują jeszcze żadnych obliczeń i są to tylko same zapisy ilości ? Były to jednak jeden z pierwszych kroków człowieka w ogromny świat matematyki. Aktualnie kość z Ishango jest na wystawie w Królewskim Belgijskim Instytucie Nauk Przyrodniczych w Brukseli.



Rys. 1

Kolejną prawdopodobną próbą dokonywania obliczeń przez ludzi tysiące lat temu jest posiadający ponad 6000 lat układ kamieni znajdujący się we Francji. Są to tzw. megality z Carnac (rys.2). Znajduje się tam łącznie ok. 3000 megalitów tworzących menhiry, dolmeny i kromlechy. Pierwotnie było ich tam znacznie więcej, prawdopodobnie ok. 10000. Ciekawe jest to, że część megalitów ułożona jest w szeregi, w których liczby głazów są liczbami pierwszymi. Nie jest wiadome czy jest to przypadek, czy jakaś forma obliczeń. Megality z Carnac są wielką zagadką dla archeologów. Nie wiadomo dlaczego ułożono tyle wielkich skał w rzędach. Podobna bardzo znana starożytna budowla to tzw. kamienne kręgi w Stonehenge w Anglii. Tam ułożono kamienie w kształt okręgów czyli kromlechów.



Rys. 2

Następnym ciekawym sposobem zapisu liczb jest pismo kipu, zwane również pismem węzełkowym (rys.3). Było ono wykorzystywane przez starożytnych Inków. Jest to jeden z najstarszych sposobów zapisu informacji. System ten wbrew pozorom jest wyjątkowo precyzyjny. Te niepozorne węzłki oznaczają litery i liczby. Istotny jest nie tylko sposób w jaki zawiązano sznurki. Znaczenie ma kolor, długość, skręt sznurka i rodzaj przędzy. Pismo to wciąż pozostawia wiele tajemnic. Dalej nie zostało w całości odszyfrowane. Wiemy jednak, że pismo to stosowane było nie tylko przez Inków. Podobny system zapisu informacji odkryto również w Chinach.



Rys. 3

Kipu jest bardzo starym i skomplikowanym sposobem zapisywania liczb. Nie można jednak tego powiedzieć o każdym dawnym sposobie zapisywania liczb. Powstało wiele systemów. Wśród nich można znaleźć kilka, które się bardzo wyróżniają.

2. Jak zapisywano liczby.

2.1 Addytywne systemy zapisu liczb.

Addytywny sposób zapisu liczb to taki, w którym liczby tworzy się przez dodawanie kolejnych symboli. Przykładami systemów addytywnych są m.in. systemy egipski, etruski i rzymski.

Zacznijmy od omówienia egipskiego systemu liczbowego. Składał się on z 7 hieroglifów oznaczających liczby 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 oraz 1000000 (rys.4). Można zatem powiedzieć, że był to system dziesiętny. Jeśli chcielibyśmy napisać liczbę „300” to musieliśmy zapisać obok siebie 3 znaki liczby „100”, jeśli chcielibyśmy napisać liczbę „26” to zapisywaliśmy dwa znaki liczby „10” i sześć znaków liczby „1” itd.. Oto jak wyglądały egipskie cyfry i podstawowe liczby:

Wartość	1	10	100	1000	10000	100000	1000000
Hieroglif	I	∩	ϣ	ⲁ	Ⲙ	Ⲛ	Ⲟ

Rys. 4

Zobaczmy zatem teraz jak wyglądają przykładowe liczby zapisane w systemie egipskim.

Liczba 463 wyglądałaby tak:

ϣϣϣϣ
 ∩∩∩∩∩∩
 III

A liczba 625 tak :



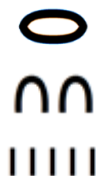
Liczby egipskie mogły być zapisywane w obu kierunkach lub pionowo. Kierunek pisania był bardzo ważny ze względu na działania dodawania i odejmowania. Służył do tego specjalny hieroglif, znak „stopy”. Jeżeli „stopa” była skierowana zgodnie z kierunkiem pisania oznaczała dodawanie a jeżeli przeciwnie, odejmowanie. Oto przykład dodawania „12 + 110” :



oraz przykład odejmowania „111 – 21”:



Egipskie hieroglify pozwalały również na zapisywanie ułamków. Służył do tego specjalny hieroglif, znak przypominający usta. „Usta” umieszczone nad zapisaną liczbą oznaczały ułamek o liczniku „1” i mianowniku równym tej liczbie. Hieroglify zapisane poniżej oznaczają ułamek $\frac{1}{25}$:



Ponadto istniały specjalne znaki dla ułamków $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ oraz $\frac{3}{4}$:

$$\text{ankh with horizontal bar} = \frac{1}{2} \quad \text{ankh with oval} = \frac{2}{3} \quad \text{ankh with oval and vertical bar} = \frac{3}{4}$$

W matematyce istnieje dzisiaj pojęcie tzw. ułamka egipskiego czyli sposobu przedstawiania liczby wymiernej (ułamka) za pomocą sumy ułamków zwykłych o liczniku równym „1” i mających różne mianowniki. Oto przykłady:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{9}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

Kolejnym systemem addytywnym jest system rzymski. Posługujemy się nim w ograniczonym zakresie do dzisiaj. Zapis ten jest najczęściej wykorzystywany do zapisu dat (np. 8 VIII 2006), numeracji niektórych budynków, numeruje się nimi cykliczne wydarzenia (np. II Puchar Długiej Polany), oznacza się kolejne stulecia (np. XXI wiek), wykorzystuje w tytułowaniu władców i papieży (np. Jan Paweł II) oraz w nazwach niektórych wydarzeń historycznych (np. II Wojna Światowa). Początki cyfr rzymskich sięgają VI w. p.n.e.. Tak naprawdę Rzymianie wcale nie są ich autorami. Przejęli je od cywilizacji etruskiej i nieco zmodyfikowali. Oto jak wyglądały liczby etruskie :

Liczba arabska	Znak etruski
1	I
5	Λ
10	X
50	↑
100	✕

Rys. 5

Etruskich znaków (liczb) było tylko pięć, Rzymianie wprowadzili jeszcze kilka innych. Aktualnie posługujemy się w systemie rzymskim tylko 7 znakami. Trzy symbole, które oznaczały 5000, 10000 i 0,5 wyszły już z użycia. Cyfry rzymskie przez lata również bardzo się zmieniły. Ich zapis został nieco uproszczony. Oto przybliżony (rys.6) wygląd liczb rzymskich przed i po zmianach :

Liczba arabska	Liczba rzymska przed zmianami	Liczba rzymska po zmianach
0,5	S	
1	I	I
5	V	V
10	X	X
50	L	L
100	C	C
500	D	D
1000	M	M
5000		
10 000		

Rys. 6

Dzisiaj nie stosuje się znaków dla liczb większych od „1000” ale można zapisać liczbę stukrotnie większą przez zapis $|X|$. Przykładowo $|D|$ oznaczałoby liczbę „50000” a $|M|$ liczbę „100000”. Liczbę tysiąckrotnie większą zapisać można stosując nadkreślenie $\overline{X}$, czyli $\overline{D}$ oznaczałoby liczbę „500000”. Można stosować te oznaczenia równocześnie, mnożąc w ten sposób podstawową liczbę 100000 razy, czyli zapis $|\overline{M}|$ oznacza liczbę „100000000”.

Pomimo, że liczby rzymskie są w użyciu tak długo, mają one jednak wiele wad. Nie można nim zapisywać np. liczby „0”. Znak ZERA w zapisie rzymskim po prostu nie istnieje. Rzymianie nie uznawali bowiem ZERA za liczbę i nie widzieli sensu ani potrzeby zapisywania czegoś, czego nie ma. Znakami rzymskimi nie zapisuje się współcześnie również ułamków. Mało kto dzisiaj wie, że dawniej istniały znaki rzymskie do zapisywania ułamków. Jedyne ułamki, które można zapisać znakami rzymskimi to ułamki zwykłe, które miały mianownik równy „12” lub były jego skróceniem. Oto tabela (rys.7) z ułamkami zapisanymi w systemie rzymskim :

Ułamek	Oznaczenie
$\frac{1}{12}$	•
$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$	••
$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$	•••
$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$	•• ••
$\frac{5}{12}$	•• •• ••
$\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$	S
$\frac{7}{12}$	S •
$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$	S ••
$\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$	S •••
$\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$	S •• ••
$\frac{11}{12}$	S •• •• ••

Rys. 7

Ponadto, o ile zapisanie nawet większej liczby znakami rzymskimi nie jest trudne to już wykonywanie na tak zapisanych liczbach jakichkolwiek obliczeń jest prawdziwym wyzwaniem. Te niekorzystne cechy spowodowały, że rzymski zapis liczb został praktycznie całkowicie zarzucony.

W systemie rzymskim możemy również dostrzec pewną nieścisłość. Dotyczy ona liczby „cztery”. Zapisujemy ją jako „IV” ale na bardzo wielu zegarach z rzymskim oznaczeniem godzin liczba ta jest przedstawiona jako „IIII” (rys.8). Jest tak między innymi dlatego, że „IIII” było łatwiejsze do zapamiętania od „IV”. Starożytni skrybowie unikali więc zapisu „IV”, dlatego też „4” na najstarszym zegarze na świecie ma postać „IIII”. Znajduje się on w katedrze Wells w Somerset w Wielkiej Brytanii (rys. 9). Był inspiracją dla wielu zegarmistrzów, którzy upodabniali do niego swoje dzieła. Nie był to jednak jedyny powód umieszczania na tarczach zegarów takiego „niepoprawnego” zapisu. Prawdopodobnie swój udział miał w tym również król Ludwik XIV. Nie był zwolennikiem zapisu „IV” i kazał korzystać tylko z

zapisu „IIII” przy produkcji zegarów. Nie wiemy jednak dlaczego tak postępował.



Rys. 8



Rys. 9

Majowie posługiwali się już innym systemem liczbowym. Był to system o podstawie „20”. Dlaczego o podstawie „20” a nie „10” ? Prawdopodobnie Majowie do liczenia używali również palców u nóg, stąd taka podstawa liczbowa systemu. Ich liczby składały się z kombinacji kresek i kropek. Oto zestawienie jednostkowych cyfr zapisanych systemem Majów :

0	1	2	3	4
	•	••	•••	••••
5	6	7	8	9
				
10	11	12	13	14
				
15	16	17	18	19
				

Rys.10

Jak można łatwo zauważyć cały system składał się tylko z 3 znaków – specyficznego zera przypominającego oko lub muszlę, kropki i kreski. Kropka oznacza liczbę 1, a kreska liczbę 5. Ale to dopiero początek. W systemie Majów stosowane są również rzędy wielkości. Poniżej (rys. 11) przedstawiono tabelę z rzędami wielkości i ich nazwami. Łatwo zauważyć, że Majowie wypracowali „prawie” pozycyjny system liczbowy o podstawie „20”. „Prawie”, gdyż 3-ci rząd wielkości „tun” to 18 x „uinal” a nie 20 x „uinal”. Być może wynika to z faktu, iż Majowie dzielili rok na 18 miesięcy po 20 dni każdy miesiąc oraz dodatkowo 5 dni. Liczby zapisywane były w rzędach wielkości, od góry do dołu. Wyżej rzędy wyższej wielkości, rzędy niższe na dole. Liczby wynikające z każdego rzędu dodajemy do siebie.

Wielkość	Nazwa	Mnożnik
1	kin	
20	uinal	$20 \times \text{kin}$
360	tun	$18 \times \text{uinal}$
7200	katun	$20 \times \text{tun}$
144000	baktun	$20 \times \text{katun}$
28800000	piktun	$20 \times \text{baktun}$
576000000	calabtun	$20 \times \text{piktun}$
11520000000	kinchiltun	$20 \times \text{calabtun}$
230400000000	alautun	$20 \times \text{kinchiltun}$

Rys. 11

Aby zapisać np. liczbę „20” trzeba użyć 2 rzędów, „uinal” oraz „kin”:

uinal • czyli $1 \times 20 = 20$
kin  czyli „0”

Aby zapisać liczbę „505”, musimy użyć już 3 rzędów, „tun”, „uinal” i „kin”:

tun • czyli $1 \cdot 360 = 360$
uinal  czyli $7 \cdot 20 = 140$
kin  czyli 5

Największą liczbę jaką możemy zapisać systemem Majów to 460800000039. Będzie to liczba zapisana w 9 rzędach a w każdym z nich cyfra „19”. Dzisiaj nie wiemy czy Majowie zapisywali większe liczby gdyż nie znamy wyższego rzędu wielkości od „alautun”.

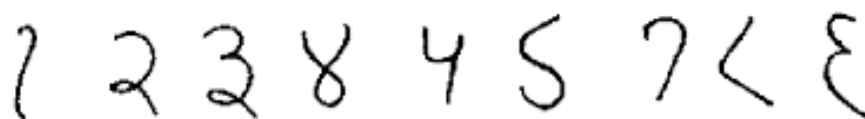
2.2 Pozycyjne systemy zapisu liczb.

Drugą grupą systemów liczbowych są systemy pozycyjne. W nich najważniejsza jest pozycja cyfry, od tego pochodzi ich nazwa. Posiadając dowolne dwie cyfry możemy ułożyć z nich nie jedną a dwie liczby. Przykładowo weźmy cyfry 3 i 7. Możemy ułożyć liczby 37 i 73. O wielkości stworzonych przez nas liczb zadecydowała ich kolejność. Wartość kolejnych liczb w systemie pozycyjnym zależy od ich miejsca w ciągu a miejsce to określa potęgę pewnej liczby, którą przyjmujemy jako podstawę systemu. Dzisiaj posługujemy się systemem dziesiętnym ale do niego jeszcze wrócimy. Wróćmy jeszcze do początku liczb i pierwszych odkrytych notacji obliczeń.

Wszystko co zostało odkryte zawdzięczamy ludzkiej ciekawości. Wielu osobom jej niestety brakuje. Mnóstwo rzeczy wydaje nam się oczywiste i nawet nie zastanawiamy się dlaczego są takie a nie inne. Doskonałym przykładem jest pomiar czasu. Każdy wie, że godzina ma 60 minut, a minuta 60 sekund. Mało kto zastanawiał się dlaczego właściwie nie 10 lub 100. Posługujemy się przecież na co dzień systemem dziesiętnym. Nie posługiwano się nim jednak zawsze. Babilończycy posługiwali się systemem o podstawie sześćdziesiąt. To oni podzielili godzinę na 60 minut, a minutę na 60 sekund. To jednak nie koniec wkładu Babilończyków i ich systemu do naszego życia. Zawdzięczamy im także podział kąta pełnego na 360 stopni i wielkości takie jak tuzin, kopa i mendel. Kopa jest równa podstawie systemu Babilończyków, czyli 60. Tuzin to jej $\frac{1}{5}$, a mendel to $\frac{1}{4}$. Czemu jednak Babilończycy wybrali na podstawę swojego systemu tak dużą liczbę jak 60? Pewien austriacki historyk – Otto Neugebauer zasugerował, że było tak dlatego, że 60 jest podzielne przez 2, 3, 4, 6, 10, 12, 15, 20 i 30. Do mierzenia często były potrzebne ułamki takie jak $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{4}$. Możliwe, że podstawa 60 miała rozwiązać problem jednoczesnej podzielności przez 2, 3 i 4. Jeśli ktoś chciał kupić ćwierć sera ważącego 60 babilońskich jednostek wagi nie miał z tym problemu. Nasza podstawa, czyli 10 nie ma takiej zalety. Jeśli coś waży 10 kg to odmierzenie $\frac{1}{3}$ z tego przedmiotu będzie dużo trudniejsze.

Gdzie jednak miały początek dzisiaj używane cyfry arabskie i system dziesiętny? Musimy odwiedzić Indie czyli miejsce narodzin cyfr arabskich. Z tego powodu nazywane są również cyframi indyjskimi lub indyjsko – arabskimi. Ktoś mógłby zapytać: *Dlaczego powszechnie nazywamy je arabskimi?* Zostały przecież wynalezione w Indiach? Powodem tego był najazd Arabów na Indie. Najeźdźcy otrzymali dostęp do indyjskiej wiedzy i dokumentów. Indyjskie cyfry weszły do użytku dzięki Arabom, którzy

zapewne przypisywali sobie ich odkrycie. Z biegiem lat ich wygląd nieco się zmienił. Poniżej (rys.12) pokazano indyjskie cyfry (VIII w. n. e.) od 1 do 9.



Rys. 12

Dużym osiągnięciem była liczba „0”. Rzymianie nie widzieli potrzeby zapisywania czegoś, czego nie ma. Hinduscy matematycy odkryli jednak zastosowanie tej liczby w zapisywaniu większych liczb. Jak widać, ich pomysł był bardzo dobry. Do dziś nikt nie szuka nowego systemu zapisu liczb. Ale dlaczego cyfr jest 10 ? Prawdopodobnie dlatego, że człowiek ma 10 palców u rąk. Niegdyś liczono przecież na palcach. Hipoteza ta nie jest jednak udowodniona.

Wróćmy zatem do naszego, dziesiętnego systemu liczbowego. Wynaleziony został podobno przez Archimedesesa (ok. 287-212 p.n.e.) ale ten nie zdawał sobie w pełni sprawy z tego odkrycia. Podstawą jest liczba „10” a kolejne miejsca w liczbie zajmują cyfry przez które mnożona jest kolejna potęga „dziesiątki”. Najlepiej obrazuje to prosty przykład:

$$1234 = 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 = 1000 + 200 + 30 + 4$$

Majowie układali kolejne rzędy z góry na dół, my robimy to samo od lewej do prawej strony.

A co oznacza zapis ułamka dziesiętnego np. 123,4 ? Nic się w zapisie nie zmienia, separator (przecinek lub kropka) oddziela jedynie część całkowitą od ułamkowej gdzie pojawiają się kolejne potęgi „10” o ujemnym wykładniku:

$$123,4 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} = 100 + 20 + 3 + 0,4$$

$$12,34 = 1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} = 10 + 2 + 0,3 + 0,04$$

Możemy ogólnie stwierdzić, że system pozycyjny to zapis liczb w postaci:

$$c_{i-1} \cdot p^{i-1} + c_{i-2} \cdot p^{i-2} + \dots + c_1 \cdot p^1 + c_0 \cdot p^0$$

gdzie p to liczba zwana podstawą systemu a c_i to cyfry, które wyrażają liczbę jednostek użytego rzędu, przy którym stoją. Cyfr jest zawsze tyle ile wynosi podstawa p systemu, od 0, 1, 2, do $p-1$.

Chociaż bez trudu można sobie wyobrazić system pozycyjny o dowolnej podstawie, szerokie zastosowanie, przede wszystkim w technice cyfrowej i informatyce, znalazły systemy dwójkowy i szesnastkowy.

System dwójkowy to „wewnętrzny język komputerów”, dla których rozumiały są tylko 2 poziomy sygnały elektrycznego: JEST oraz NIE MA. W praktyce są to napięcia jakie podawane są do odpowiednich obwodów komputera np. +5 V oraz 0 V, które procesor odpowiednio interpretuje. Idealnie do zapisywania „komputerowych słów” nadaje się system dwójkowy, w którym występują tylko cyfry „1” i „0” czyli JEST SYGNAŁ i NIE MA SYGNAŁU. W matematyce podstawą tego systemu jest liczba „2”. Przykładowa liczba zapisana w tym systemie wygląda np. tak:

$$100101 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 32 + 4 + 1 = 37$$

Oczywiście komputer nie zrozumie nieprzerwanego ciągu zer i jedynek. Polecenia i wyniki muszą być „pakietowane” w słowa o odpowiedniej długości i przesyłane do komputera słowo po słowie. Procesor tzw. 8 bitowy będzie rozumiał kod, w którym każde słowo ma 8 znaków np.: 10001011, 10100011. Procesor 16 bitowy będzie pracował na słowach o 16 znakach itd..

W informatyce używa się również zapisu szesnastkowego. Podstawą jest liczba „16” a cyframi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E i F. Główną zaletą posługiwania się tym systemem liczbowym jest możliwość zapisania dużych liczb za pomocą mniejszej ilości znaków. Przykładowa liczba szesnastkowa:

$$FF1AB = 15 \times 16^4 + 15 \times 16^3 + 1 \times 16^2 + 10 \times 16^1 + 11 \times 16^0 = 1044651$$

Czyli przy pomocy 5 znaków zapisaliśmy liczbę, która w systemie dziesiętnym miałaby 7 znaków

Wielką zaletą systemów pozycyjnych jest ich prostota, łatwość zapisu dowolnie dużej liczby oraz łatwość dokonywania dowolnych obliczeń na liczbach. System pozycyjny ma również pewne „pułapki”. Zmiana miejsca położenia separatora w ułamku lub przestawienie kolejności cyfr w liczbie powoduje od razu dużą zmianę wartości całej liczby. W systemach o niższej podstawie zapisanie dużej liczby skutkuje z kolei koniecznością zapisania dużej liczby cyfr a wtedy łatwo jest o pomyłkę.

3. Naturalnie liczby naturalne.

Matematyka od najdawniejszych czasów służyła nazewnictwu oraz zapisywaniu ilości. Już starożytni matematycy zaczęli szukać zawsze sprawdzających się wzorów na pola powierzchni, obwody i objętości figur geometrycznych. Matematyka zaczęła być więc coraz częściej wykorzystywana w architekturze i budownictwie. Ale pierwszym co przychodzi nam na myśl na hasło „matematyka” nie jest architektura, budownictwo ani konstrukcje mechaniczne. Najczęstszym skojarzeniem z tą dziedziną nauki są liczby. Matematyka zaczęła się rozwijać jako nauka w chwili gdy ludzie potrafili spojrzeć na liczby jako na osobne „twory” nie związane z żadnymi konkretnymi pomiarami lub obliczeniami. Liczby dla matematyka stały się czymś co wcale nie musi być powiązane z codziennymi pomiarami, zliczaniem czy ważeniem. Liczby zaczęły żyć własnym życiem.

Podstawowym zbiorem liczbowym jest zbiór liczb naturalnych, czyli liczb całkowitych nieujemnych. Można powiedzieć, że liczby naturalne „pojawiły” się wraz z próbami zapisywania liczb. Są to liczby całkowite dodatnie lub nieujemne. Nie jest bowiem wyraźnie ustalone, czy do tego zbioru zalicza się również liczba zero. Często uznaje się, że tak, jednak zależy to od podanej definicji i matematycznie nie ma większego znaczenia. Pomimo tego, iż nie ma nic bardziej naturalnego od liczb naturalnych, naukowcy potrzebowali dużo czasu do określenia ich dokładnej definicji. Bardziej skomplikowane liczby rzeczywiste, używane zresztą już w starożytności, zostały matematycznie zdefiniowane w połowie XIX w., podczas gdy liczby naturalne, włoski matematyk Giuseppe Peano, zdefiniował dopiero pod koniec XIX w.. Peano określił następujące cechy liczb naturalnych:

- *istnieje liczba naturalna „0”;*
- *każda liczba naturalna ma swój następnik;*
- *„0” nie jest następnikiem żadnej liczby naturalnej;*
- *różne liczby naturalne mają różne następniki;*
- *jeśli „0” ma daną własność i następnik dowolnej liczby naturalnej ma tę samą własność, to każda liczba naturalna ma tę własność.*

Jak widać, Peano uznawał „0” za liczbę naturalną. Dzisiaj zbiór liczb naturalnych oznaczamy literą „N”. Arytmetyka i teoria liczb zajmuje się właśnie liczbami naturalnymi. Filozofowie matematyki z radykalnego nurtu tzw. finitystów uznawali nawet, że matematycy powinni zajmować wyłącznie liczbami naturalnymi. Badając liczby naturalne matematycy odkrywali ich różne właściwości. Najważniejszymi liczbami naturalnymi są liczby pierwsze ale ciekawe są także liczby doskonałe i zaprzyjaźnione.

3.1 Liczby pierwsze.

Liczbami, które intrygują ludzi nauki od starożytności są liczby pierwsze. Od zawsze były zagadką i ciekawym obszarem badań dla matematyków. Każda liczba pierwsza posiada tylko dwa dzielniki, liczbę „1” i ją samą. Liczbami pierwszymi są zatem np. 5, 17 lub 13. Przeciwnieństwem liczb pierwszych są liczby złożone, mają one powyżej dwóch dzielników. Są to przykładowo liczby 4, 16 i 45. Wróćmy jednak do liczb pierwszych. Ciekawe jest to, że liczba 1 nie jest uznawana za liczbą pierwszą ! Jest tak dlatego, że ma tylko jeden dzielnik naturalny, „1”. Poza tym w wielu definicjach liczb pierwszych podaje się, że są to liczby większe od 1. Kolejnym powodem tego, że „1” nie jest liczbą pierwszą jest treść podstawowego twierdzenia arytmetyki. Brzmi ono następująco :

Każdą liczbę naturalną większą od 1, nie będącą liczbą pierwszą, można jednoznacznie przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych.

Za przykład weźmy liczbę 12:

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

W definicji podkreślone zostało słowo *jednoznacznie*. Gdyby 1 było liczbą pierwszą nie byłoby jednoznaczności. Wtedy :

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$12 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$12 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

Widać zatem, że definicja byłaby błędna i jednocześnie można powiedzieć, że liczba „1” nie jest ani liczbą pierwszą ani liczbą złożoną. Można także stwierdzić, że liczby pierwsze są jakby częściami składowymi, z których przy pomocy mnożenia zbudowane są liczby złożone.

Wzór na obliczenie liczb pierwszych wciąż pozostaje zagadką i należy on do tzw. 7 problemów milenijnych. Pewien grecki matematyk, Eratostenes z Cyreny, odkrył pewną metodę poszukiwania takich liczb. Nazywa się ją dzisiaj *Sitem Eratostenesa*. Polega na wpisaniu w tabelę wszystkich liczb od 2 do n i wykreślanu wielokrotności wszystkich liczb mniejszych bądź równych $\sqrt{n}$. Jeżeli zatem utworzymy sobie tabelę z liczbami od 2 do 100, wykreślamy z niej wszystkie liczby, które są wielokrotnościami liczb mniejszych od 10 oraz samą liczbę 10. Poniżej (rys. 13) zostało przedstawione takie *sito* z zaznaczonymi na czerwono wielokrotnościami (są to liczby złożone) oraz usuniętą liczbą jeden, która jak wiemy nie jest liczbą pierwszą. Pozostałe liczby są z pewnością pierwsze.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Rys. 13

Patrząc na tabelę widzimy, że liczba 6 jest liczbą złożoną a liczba 13 jest liczbą pierwszą. Sito Eratostenesa jest jednak bardzo pracochłonną metodą odkrywania liczb pierwszych.

Matematycy zajmujący się teorią liczb zaczęli wyróżniać wiele rodzajów liczb pierwszych. Wśród liczb pierwszych można wskazać liczby bliźniacze i liczby czworacze. Liczby bliźniacze są dwiema kolejnymi liczbami pierwszymi, których różnica wynosi „2”. Parami liczb bliźniaczych są przykładowo 3 i 5, 11 i 13, 17 i 19. Czyli liczby bliźniacze mają postać :

$$p, p + 2$$

gdzie p jest liczbą pierwszą.

Z kolei pary najbliżej sąsiadujących ze sobą par liczb bliźniaczych (różniących się o cztery) nazywamy liczbami czworaczymi. Są nimi przykładowo takie zestawienia liczb pierwszych : 5, 7, 11, 13; 11, 13, 17, 19; 101, 103, 107, 109; 191, 193, 197, 199.

Liczby czworacze mają zatem postać :

$$p, p + 2, p + 6, p + 8$$

gdzie p jest liczbą pierwszą.

Innym ich rodzajem są liczby pierwsze izolowane. Liczba pierwsza p jest izolowana gdy najbliższa jej kolejna liczba pierwsza różni się od liczby p co najmniej o „4”. Liczby izolowane to np. 23, 67 lub 89.

Kolejną kategorią są liczby pierwsze lustrzane. Są to pary liczb, z których jedna powstaje przez odwrotne zapisanie składników drugiej liczby. Oczywiście obie pary liczb muszą być pierwsze. Liczbami pierwszymi lustrzanymi są np.: 13 i 31, 17 i 71 lub 37 i 73.

Jeszcze inną kategorią są liczby pierwsze palindromiczne czyli takie liczby pierwsze, które nie zmieniają się gdy ich cyfry składowe zapiszemy w odwrotnej kolejności, np.: 11, 101, 131, 191.

Kolejne liczby, które mają ścisły związek z historią poszukiwania liczb pierwszych to tzw. liczby Fermata. Oznacza się je wielką literą „F”. Pierwszym, który rozpoczął badania nad tymi liczbami był francuski matematyk, prawnik i lingwista – Pierre de Fermat (rys. 14). Był nie tylko wspaniałym matematykiem ale również radcą w Tuluzie.



Rys. 14

Nazwa liczb Fermata pochodzi właśnie od jego nazwiska. Liczby Fermata to liczby naturalne, które są postaci:

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

Gdzie n to dowolna liczba całkowita nieujemna.

Obliczmy kilka kolejnych liczb Fermata :

$$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3$$

$$F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5$$

$$F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$$

$$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257$$

$$F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65537$$

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4294967297$$

Sam Fermat podejrzewał, że wszystkie liczby mające postać $2^{2^n} + 1$ są pierwsze. Rzeczywiście pięć początkowych liczb Fermata (F_0, F_1, F_2, F_3 i F_4) jest pierwszych. Słynny szwajcarski matematyk, Leonhard Euler udowodnił, że już szósta liczba F_5 pierwsza nie jest. Rozpoczęły się zatem poszukiwania liczb pierwszych Fermata. Francuski matematyk Theophile Pépin odkrył metodę na sprawdzanie pierwszości konkretnej liczby.

Dla liczby Fermata o $n > 1$ obliczamy:

$$m = \frac{F_n - 1}{2}$$

Jeżeli wynik dzielenia:

$$\frac{3^m + 1}{F_n}$$

jest liczbą naturalną to konkretna liczba Fermata F_n jest liczbą pierwszą.

Sprawdźmy jedną z liczb Fermata pod względem pierwszości :

Dla $n = 2$:

$$F_2 = 17$$

$$m = \frac{17-1}{2} = 8$$

$$3^m + 1 = 6562$$

$$6562 : 17 = 386$$

A zatem liczba Fermata $F_2 = 17$ jest liczbą pierwszą.

Jednak do dzisiaj nie wiadomo czy poza pięcioma od dawna znanymi, jakieś następne liczby Fermata są liczbami pierwszymi.

Podobne matematyczne poszukiwania dotyczą tzw. liczb Mersenne'a. Są to liczby postaci:

$$M_n = 2^n - 1$$

gdzie n jest nieujemną liczbą całkowitą.

Ciekawe jest, że aby liczba Mersenne'a była pierwsza to warunkiem koniecznym jest aby wykładnik n potęgi 2^n był liczbą pierwszą. Jest to warunek konieczny ale nie wystarczający. Jeżeli natomiast wykładnik n jest liczbą złożoną to liczba Mersenne'a jest zawsze liczbą złożoną. Policzmy zatem kilka kolejnych takich liczb:

$$M_0 = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$M_1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$M_2 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$M_3 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$$

$$M_4 = 2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$$

$$M_5 = 2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$$

$$M_6 = 2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$$

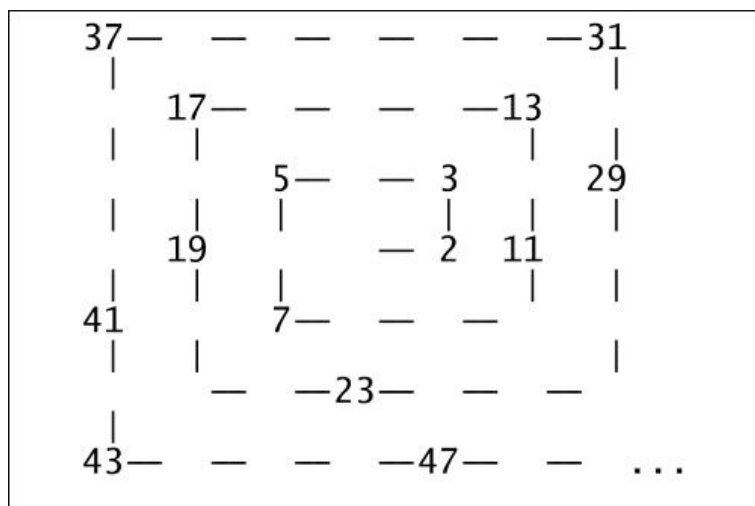
Matematycy wypracowali skuteczne metody badania liczb Mersenne'a czy są one pierwsze czy złożone. Stąd największe odkrywane liczby pierwsze to zwykle właśnie liczby pierwsze Mersenne'a. Największa znana taka liczba ma ponad 24 miliony cyfr, jest to $2^{82589933} - 1$. Aby łatwiej było sobie wyobrazić jak wielka jest to liczba można w przybliżeniu przyjąć, że do jej zapisania potrzebnych jest ok. 15000 kartek papieru formatu A4.

Wciąż nie znamy wzoru na obliczanie liczb pierwszych. Wielu wspaniałych matematyków bezskutecznie zmagало się z tym problemem. Jednym z nich był Polak, Stanisław Ulam (rys.15). Ponoć już jako dziecko wyróżniał się dużym talentem matematycznym. Jako matematyk wykładał na najbardziej prestiżowych uczelniach w USA będąc prekursorem modelowania matematycznego w fizyce.



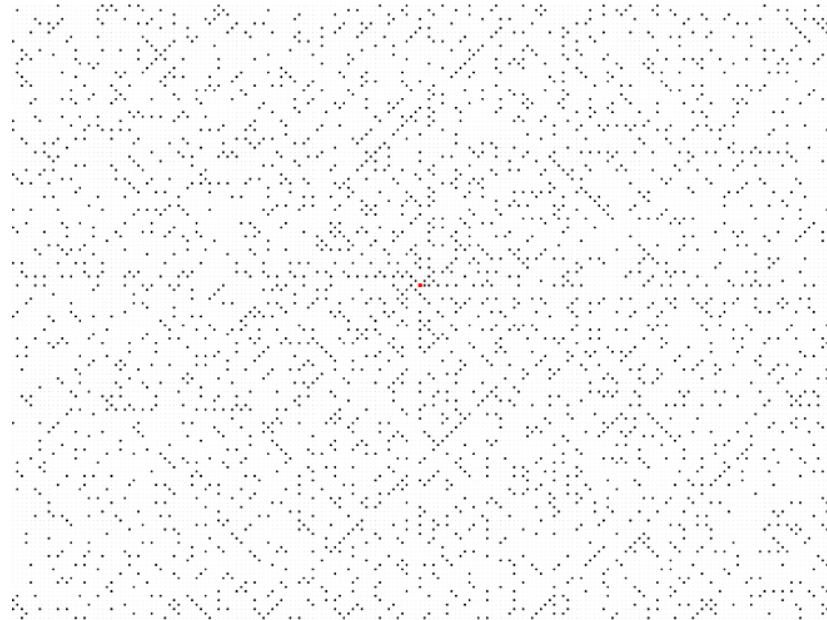
Rys.15

Od jego nazwiska nazwę otrzymała spirala Ulama (rys.16). Powstała w dość nietypowy sposób. Ulam podobno nudził się na wykładzie i nie spodziewając się żadnego nowego odkrycia, narysował spiralę stworzoną z kolejnych liczb naturalnych. Później zostawił w niej tylko liczby pierwsze. W miejscu liczb złożonych została pusta przestrzeń.



Rys. 16

Po narysowaniu dużo większej spirali Ulama można dostrzec na niej wyraźne linie wyznaczone przez liczby pierwsze (rys.17).



Rys. 17

Nie wiadomo co owe linie mogą oznaczać. Widać jednak, że liczby pierwsze nie są rozrzucone na spirali w chaotyczny sposób, panuje tu jakiś przedziwny porządek. Nie wiadomo co ten niezwykle porządek może oznaczać ale można się spodziewać, że ułatwi odkrycie upragnionego wzoru na obliczanie liczb pierwszych. Niestety jeszcze nie wiadomo w jaki sposób miałby to zrobić.

Matematycy formułowali również wiele twierdzeń dotyczących liczb pierwszych. Jednym z nich jest bardzo prosto wyglądające twierdzenie Czebyszewa. Brzmi ono następująco: *Dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$, pomiędzy liczbami n i $2n$ istnieje co najmniej jedna liczba pierwsza.* Istnieje również „mocniejsza” wersja tego twierdzenia, tzw. twierdzenie Erdösa, które brzmi następująco: *Dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 6$, pomiędzy liczbami n i $2n$ istnieją co najmniej dwie liczby pierwsze.*

Ile zatem jest w końcu tych liczb pierwszych ? Od dawna już wiemy, że nieskończenie wiele. Pierwszy dowiół tego wielki Euklides. Pisał on w ten sposób: *Jest więcej liczb pierwszych niż każda dana liczba liczb pierwszych.* Język Euklidesa jest nieco zawity i skomplikowany ale dowód jest bardzo prosty i ciekawy. Jest to tzw. „dowód nie wprost”.

Oznaczmy przez A dowolny, skończony zbiór liczb pierwszych:

$$A = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$$

Obliczamy liczbę m , która jest równa :

$$m = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n + 1$$

Jak już wiemy, każdą liczbę można przecież rozłożyć jednoznacznie na czynniki pierwsze, zatem liczbę m także. Żaden z czynników pierwszych, na które rozłożymy teraz liczbę m nie może być równy żadnej z liczb $p_1, p_2, \dots, p_n$ ze zbioru A , gdyż liczby p_n dzielą naszą liczbę m z resztą „1” i nie mogą być składnikami rozkładu liczby m na czynniki pierwsze. Po rozłożeniu liczby m na czynniki pierwsze otrzymamy zawsze nowe liczby pierwsze, których nie było pierwotnie w zbiorze A . Wynika z tego, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele !

Do czego są przydatne liczby pierwsze w codziennym życiu ? Są one wykorzystywane przede wszystkim w kryptografii w szyfrowaniu wiadomości i do ochrony podpisów cyfrowych.

3.2 Liczby doskonałe

Liczby pierwsze nie są jedynymi liczbami o charakterystycznych właściwościach. Wbrew pozorom o każdej liczbie można dużo powiedzieć. Rozpatrzmy liczbę „6”. Święty Augustyn zauważył, że suma wszystkich jej dzielników, oprócz niej samej, jest równa właśnie 6.

$$1 + 2 + 3 = 6$$

Jest więcej liczb posiadających tę właściwość. Nazywa się je liczbami doskonałymi. Można powiedzieć jeszcze więcej na temat liczb doskonałych. Pewien grecki matematyk, Nikomachos, opisał je tak :

- *wszystkie liczby doskonałe są parzyste;*
- *liczba n -ta ma dokładnie n cyfr;*
- *wszystkie liczby doskonałe kończą się na 6 lub 8;*
- *liczb doskonałych jest nieskończenie wiele;*

Euklides odnalazł sposób na odnajdywanie liczb doskonałych. Wygląda on następująco.

Obliczamy sumę kolejnych potęg liczby „2”:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = p$$

Jeżeli p okaże się być liczbą pierwszą to stosujemy drugą część wzoru :

$$p \times 2^n = d$$

gdzie d będzie liczbą doskonałą.

W starożytności znano tylko dwie liczby doskonałe, 6 i 28. Szybko dorobiono do nich swoistą ideologię. Doskonałość liczby „6” tłumaczono tym, że stwarzanie świata trwało 6 dni a doskonałość „28” powiązano z miesiącem księżycowym, który trwa 28 dni. Sam Nikomachos uważał, że liczb takich musi być niewiele bo doskonałość jest cechą bardzo rzadką.

Obliczmy zatem kilka liczb doskonałych sposobem Euklidesa.

Dla $n=1$:

$$2^0 + 2^1 = 3$$

$$3 \times 2^1 = 3 \times 2 = 6$$

$$\mathbf{d_1 = 6}$$

Dla $n=2$:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 = 1 + 2 + 4 = 7$$

$$7 \times 2^2 = 7 \times 4 = 28$$

$$\mathbf{d_2 = 28}$$

Dla $n=3$:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$$

Ale „15” nie jest liczbą pierwszą, więc nie możemy stosować drugiej części wzoru. Na tym przykładzie nie obliczymy liczby doskonałej.

Dla $n=4$:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$$

$$31 \times 2^4 = 31 \times 16 = 496$$

$$\mathbf{d_3 = 496}$$

Dla pewności sprawdźmy czy obliczone przez nas liczby są doskonałe.

$$1 + 2 + 3 = 6$$

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$$

Sprawdziliśmy zatem, że sposób Euklidesa jest poprawny. Wszystkie obliczone przez nas liczby są doskonałe.

Liczbami doskonałymi zajmował się również wielki matematyk Leonhard Euler. Udowodnił on, że każda liczba doskonała parzysta ma postać:

$$(2^{p-1})(2^p-1)$$

gdzie p jest liczbą pierwszą i 2^p-1 jest liczbą pierwszą. Ale liczba postaci 2^n-1 to przecież liczba Mersenne'a a więc liczba 2^p-1 to liczba pierwsza Mersenne'a ! Mamy zatem ścisły związek pomiędzy liczbami pierwszymi Mersenne'a a liczbami doskonałymi.

Jak dotąd wszystkie znane liczby doskonałe są parzyste ale nie udowodniono również, że nieparzysta liczba doskonała nie istnieje. Poszukiwania liczb doskonałych trwają ale pomimo wykorzystywaniu do tego komputerów znamy takich liczb zaledwie ok. 50.

3.3 Liczby zaprzyjaźnione

Duże podobieństwo łączy liczby zaprzyjaźnione z doskonałymi. Liczby zaprzyjaźnione to pary liczb, w których suma dzielników jednej liczby jest równa drugiej liczbie tej pary. Poszukiwania takich par liczb trwają już od starożytności a pierwszą parę podał już słynny Pitagoras. Jest to para liczb 220 i 284:

Dzielniki liczby 284: $1 + 2 + 4 + 5 + 71 + 142 = \mathbf{220}$

Dzielniki liczby 220: $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = \mathbf{284}$

Nie jest udowodnione czy istnieje nieskończona liczba par i czy liczby w parze mogą mieć różną parzystość.

W świecie matematyki istnieją jeszcze liczby lustrzane. Są to dwie liczby, które zapisie są swoim lustrzanym odbiciem. Liczbami lustrzanymi są przykładowo liczby 945 i 549, 135 i 531, 7375 i 5737.

4. Od zera do nieskończoności.

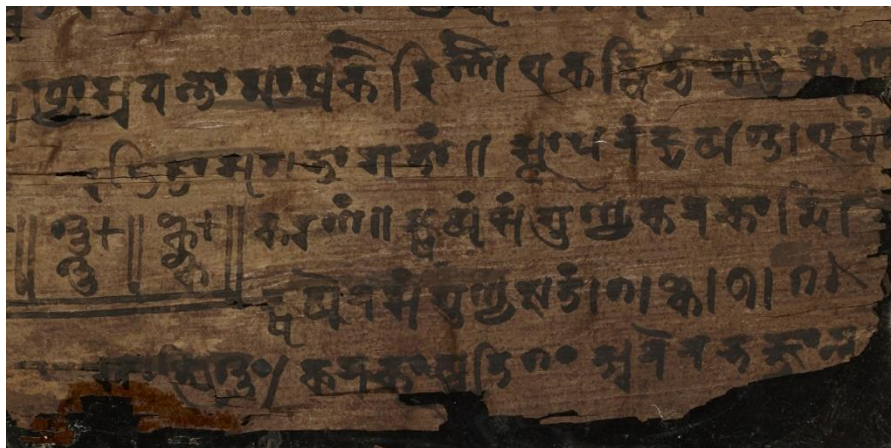
Liczbą, która jest zarazem bardzo ciekawa jak i problematyczna jest ZERO. Jest to dziwna wielkość, ponieważ jej nie ma. Już Etruskowie i Rzymianie nie widzieli powodu zapisywać czegoś czego nie ma. Jak się okazuje to był dopiero początek kłopotów z zerem. *Jak nic może być czymś ?* – to pytanie zadawało sobie wielu starożytnych matematyków.

Zacznijmy jednak od samego początku. Kto pierwszy zaczął zmagać się z problemem zera ? Jeden z najstarszych zapisów zera odkryto w Kambodży. W 1891 roku pewien francuski archeolog Adhémard Leclère badał ruinę świątyni Trapaing Prei w Samborze. Odkrył tam dwie kamienne inskrypcje, którymi po latach zainteresował się pewien francuski historyk, George Coedès. Oznaczył je symbolami K-127 i K-128. Pochodziły one z VII w. n. e. Coedès podjął się próby tłumaczenia K-127. Inskrypcja ta miała odłamany górny fragment, poza tym była w bardzo dobrym stanie i litery były wyraźne. W zapisie znajdowało się najstarsze odkryte zero. Do ustalenia daty powstania K-127 nie było potrzebnych zbyt dużo badań. Była ona zapisana w tekście :

Era Śaka osiągnęła rok 605 piątego dnia ubywania Księżyca [...]

Śaka było nazwą dynastii, której pierwszy król zaczął panować w 78 r. n. e. Znaczy to, że tabliczka powstała w 683 r. n.e.. Tak ważne dla historii, jedno z pierwszych znany zer było zapisane w dacie ! Było zapisane nie jako okrąg tylko jako kropka. Widać tu również pierwsze ślady systemu dziesiętnego.

Cyfra ZERO pojawia się również na słynnym manuskrypcie z Bakhshali odnalezionym na terenie dzisiejszego Pakistanu (rys. 18).



Rys. 18

ZERO jest tam przedstawione jako czarna kropka.

Początkowo sądzono, że manuskrypt powstał między VIII a XII wiekiem. Przeprowadzono jednak radiowęglowe badania radiologiczne, które wykazały, że najstarsze fragmenty z ZEREM powstały w latach 224-383. Są zatem starsze od tablicy K-127 i najprawdopodobniej jest to najstarszy znany obecnie zapis ZERA.

Co działo się z zerem później? Kropka z upływem czasu stanie grubsza a w końcu pojawi się w niej pusty środek i zacznie przypominać dzisiejszy zapis ZERA. Matematycy zaczęli akceptować jej istnienie i liczba zero zaczęła być powszechnie używana. Jej największe zastosowanie znajdujemy w zapisie liczb w systemie pozycyjnym.

Przejdźmy teraz do nieco bardziej abstrakcyjnego pojęcia – nieskończoności. Oznaczamy ją „leżącą” liczbą osiem ∞ . Ale czym tak naprawdę jest nieskończoność? Pierwszym, który zaczął się nad tym zastanawiać był Arystoteles. Wyróżnił dwie nieskończoności, aktualną i potencjalną. Nieskończoność aktualna dotyczyła realnych zjawisk świata i została już dokonana. Przykładem nieskończoności aktualnej może być zbiór liczb naturalnych. Drugą wyróżnioną przez Arystotelesa nieskończonością jest nieskończoność potencjalna. Arystoteles uznał, że zawsze można znaleźć od aktualnej jeszcze większą nieskończoność. Arystoteles dzielił ponadto nieskończoność potencjalną na dwa rodzaje, nieskończoność ze względu na dodawanie i ze względu na podział. Nieskończoność to nie jest dana ustalona wielkość. Nieskończoności mogą być różne, większe i mniejsze. Wyobraźmy sobie, że dwoje biegaczy będzie biegało w nieskończoność po nieskończonej trasie ale *biegacz 1* będzie biegał pięć razy szybciej od *biegacza 2*. Dystanse przebyte przez obu biegaczy będą nieskończone ale nieskończoność *biegacza 1* będzie większa od nieskończoności *biegacza 2*. Kolejnym przykładem nieskończoności większych i mniejszych są liczby, a tak naprawdę to zbiory liczbowe. Jeśli elementy dwóch zbiorów można dobrać w pary to nazywamy je równolicznymi. Doskonałym przykładem zbiorów równolicznych są zbiory liczb naturalnych N i całkowitych C . Sprawdźmy czy zbiory liczb naturalnych i całkowitych są równoliczne. Można to zrobić bez problemu. Połączmy w pary liczby obu zbiorów :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5

Rys. 19

Jak widać zbiory liczb naturalnych i całkowitych są równoliczne. Podobnie możemy sprawdzić czy zbiór parzystych liczb naturalnych, których wydawałoby się, że jest mniej niż wszystkich liczb naturalnych, jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych. Połączymy w pary liczby obu zbiorów i okaże się, że tak. Zbiory, które są równoliczne ze zbiorem liczb naturalnych nazywamy przeliczalnymi a zbiory, które są nierównoliczne ze zbiorem liczb naturalnych, nieprzeliczalnymi. Nie jest tak jednak ze wszystkimi zbiorami. Na przykład zbiór liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny. Mówimy, że zbiór liczb rzeczywistych jest liczniejszy niż zbiór liczb naturalnych. Przełomu w badaniu nieskończoności w matematyce dokonał niemiecki matematyk Georg Cantor (rys. 20), twórca teorii mnogości, który badał różne rodzaje nieskończoności aktualnej i dokonywał na nich rachunków arytmetycznych.



Rys. 19

Pojęcie nieskończoności aktualnej nie było od początku szeroko uznawane. Dawni matematycy nie akceptowali nieskończoności aktualnej, gdyż łączyła się również z niechęcią do obalenia paradoksami. Czym właściwie jest paradoks? Jest to oczywiste i logiczne twierdzenie, które prowadzi do sprzecznych wniosków. Weźmy na przykład paradoks o żółwiu i Achillesie. Jego autorem jest Zenon z Elei, grecki filozof. Zadanie brzmi następująco :

Żółw i dwa razy szybciej biegnący od niego Achilles postanawiają zmierzyć się w wyścigu. Achilles wiedząc, że żółw biegnie od niego dwa razy wolniej startuje dopiero kiedy żółw jest w połowie drogi. A zatem kiedy żółw

jest w $\frac{3}{4}$ dystansu to Achilles będzie w połowie. Gdy żółw pokona dystans $\frac{7}{8}$ całej trasy to biegacz będzie dopiero w $\frac{3}{4}$ trasy i tak dalej aż w nieskończoność. Achilles zatem będzie zbliżał się do żółwia ale nigdy go nie przegoni pomimo tego, że biega dwa razy szybciej.

Na pierwszy rzut oka od razu jesteśmy pewni, że Achilles i żółw dotrą na metę w tym samym momencie. Jeśli jednak podążymy tropem myślenia narzuconym przez Zenona i zaczniemy odcinki które przebiegł żółw i Achilles dzielić na coraz mniejsze części to wydaje się, że Achilles nigdy nie przegoni żółwia. Będzie biegł za nim w nieskończoność. Paradoksów Zenona jest więcej i wszystkie one dotyczą podziałów czasu i przestrzeni w NIESKOŃCZONOŚĆ. Dzisiaj matematycznie można dowieść, że suma nieskończonej liczby odcinków daje odcinek o skończonej długości a więc czas potrzebny do pokonania tego odcinka jest również skończony.

5. Jak można ułatwić sobie liczenie.

Ludzie od dawna konstruowali przyrządy, które pozwalały usprawnić wykonywanie praktycznych obliczeń. Powstało wiele odmian liczydła. Chińczycy używali liczydła zwanego *suanpan*, Japończycy mieli własną odmianę zwaną *soroban* a Grecy i Rzymianie mieli swoje *abakusy*. Chciałabym jednak przybliżyć inny przyrząd, używany jeszcze powszechnie 40-50 lat temu a dzisiaj zupełnie zapomniany – suwak logarytmiczny. Suwak jest przyrządem, który pozwala na przeprowadzanie przybliżonych obliczeń, przede wszystkim mnożenia i dzielenia. Został wynaleziony w 1632 r przez angielskiego matematyka Williama Oughtreda. Dokładność wykonywanych obliczeń zależy od sprawności „operatora” i jego oka i wynosiła 2, 3 miejsca znaczące lub 0,1% otrzymywanego wyniku. Suwak był traktowany jako przyrząd pomocny w obliczeniach inżynierskich i taka dokładność była wówczas w technice całkowicie wystarczająca.

Na początek, czym jest logarytm o podstawie a z liczby b :

$$\log_a b = c \text{ tzn. } a^c = b$$

Zatem:

$$\log_{10} 100 = 2, \text{ bo } 10^2 = 100$$

$$\log_3 27 = 3, \text{ bo } 3^3 = 27$$

Przyjęto zasadę, że logarytmy o podstawie „10” zapisuje się symbolem „lg”. Upraszcza to zapisywanie obliczeń.

Zasada konstrukcji i posługiwania się suwakiem wynika z dwóch podstawowych wzorów matematycznych:

$$\lg(xy) = \lg(x) + \lg(y)$$

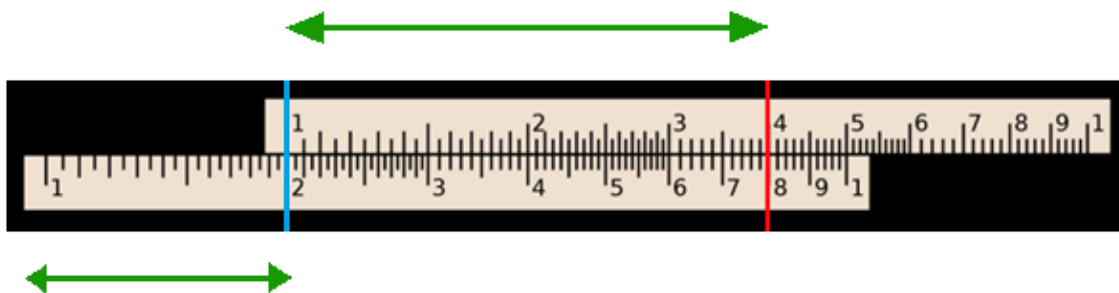
czyli logarytm iloczynu liczb jest równy sumie logarytmów tych liczb

$$\lg \frac{x}{y} = \lg(x) - \lg(y)$$

czyli logarytm ilorazu jest równy różnicy logarytmów dzielnej i dzielnika

Na skalach suwaka opisuje się nie wartość logarytmów z liczb ale jakiej liczby jest to logarytm. Skala logarymiczna w miarę postępu kolejnych liczb szybko się „zagęszcza” i pozwala umieścić na krótkiej linii suwaka logarytmy całkiem dużych liczb.

Założmy, że chcemy pomnożyć 2 liczby. Ponieważ skala na suwaku opisuje jakiej liczby są to logarytmy, jeżeli dodamy do siebie logarytmy mnożnej i mnożnika to otrzymamy wynik jakiego iloczynu liczb jest ten logarytm. Założmy, że mnożymy „2” przez „4” (rys.20). Na dolnej linii ustawiamy mnożną ($\lg 2$), na górnej mnożnik ($\lg 4$) i odczytujemy na dolnej linii ich sumę czyli $\lg 2 + \lg 4 = \lg(2 \times 4) = \lg 8$.

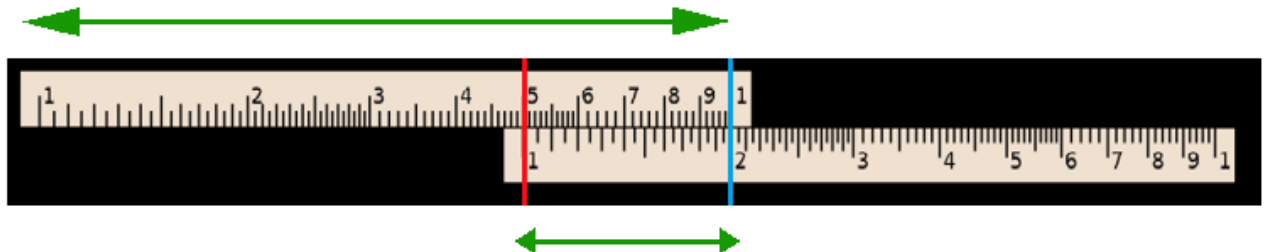


Rys. 20

Z dolnej linijki odczytujemy od razu wynik mnożenia: „8”.

Bardzo podobnie przebiega dzielenie liczb, jedynie zamiast dodawania do siebie logarytmów, będziemy je od siebie odejmować. Ponieważ skala na suwaku opisuje jakiej liczby są to logarytmy, jeżeli odejmiemy od siebie logarytmy dzielnej i dzielnika to otrzymamy wynik jakiego ilorazu liczb jest

ten logarytm. Załóżmy, że chcemy podzielić „10” przez „2” (rys.21). Na górnej linijce odszukujemy dzielną ($\lg 10$) i przy pomocy dolnej linijki odejmujemy od niej dzielnik ($\lg 2$) odczytując na górnej linijce wynik czyli $\lg 10 - \lg 2 = \lg\left(\frac{10}{2}\right) = \lg 5$



Rys. 21

Z górnej linijki odczytujemy od razu wynik dzielenia: „5”.

Suwaki wyposażone są także w dodatkowe skale pierwiastków, kwadratów, logarytmów czy skale funkcji trygonometrycznych, co rozszerza możliwości przyrządu. Występują też okrągłe suwaki w formie zegarka ale zasada działania jest w każdym przypadku taka sama.

Poniżej prezentuję archiwalne zdjęcie Franka Whittle, twórcy silnika odrzutowego, podczas obliczeń na suwaku logarytmicznym (rys.22).



Rys. 22

6. Matematyka jest stara jak świat.

Cała historia liczb a przede wszystkim jej początek udowadnia to, jak bardzo potrzebna jest matematyka. Tysiące lat temu starożytni matematycy nie posiadając papieru, długopisu lub ołówka dokonali wielu znaczących odkryć. Ich przyrządem pracy był tylko patyk, którym mogli napisać coś na piasku a badali liczby pierwsze, doskonałe, rzeczywiste, niewymierne, nieskończoność, układali paradoksy... . Jak widać nawet najbardziej zaawansowana matematyka nie wymaga technologii, bez której nie wyobrażamy sobie dzisiaj życia. Najważniejszy jest tu człowiek i jego umysł. Nie bez powodu matematyka otrzymała zaszczytne miano *królowej nauk*. Śmiało można zatem powiedzieć, że ludzkość bez liczb nie miałaby chyba prawa istnieć.

Bibliografia:

Ian Stewart: „*Liczby natury*”

Enrique Gracián: „*Liczby pierwsze*”

Jaquín Navarro: „*Tajemne życie liczb*”

Amir D. Aczel: „*W poszukiwaniu zera*”

Ian Stewart, David Tall: „*Podstawy matematyki*”

Daniel Tammet: „*Zanurzeni w liczbach*”

Pasja informatyki: „*Przekleństwo liczb pierwszych. Hipoteza Riemanna*”

www.math.edu.pl

www.wikipedia.org

www.serwis-matematyczny.pl

www.ftj.agh.edu.pl

www.crazynauka.pl

www.matematykainnegowymiaru.pl

www.matemaks.pl

www.deltami.edu.pl

www.mathspace.pl

www.matfiz24.pl

www.matematyka.wroc.pl

www.matematyka.pl