



# SZTUCZKI Z KARTAMI

**Katarzyna Matoga, Oliwia Piątek, Wiktoria Wójcik**

**uczennice klasy 8 c**

**Szkoły Podstawowej nr 64 im. Tadeusza Kościuszki**

**w Krakowie ul. Sadowki 1**

**Opiekun naukowy: p. mgr Teresa Sklepek e-mail opiekuna: tsmat@wp.pl**

Szkoła Podstawowa nr 64 im. Tadeusza Kościuszki w Krakowie ul. Sadowki 1 31-465 Kraków  
Telefon: 12 411 15 28, e-mail: sp64krakow@pro.onet.pl,

**Kraków 2020**

## Wstęp

Lubimy sztuczki. Podziwiamy popisy magików. Z naszego magicznego kapelusza wyciągnęliśmy karty.

Typowa talia kart składa się 52 prostokątnych kart o wymiarach  $57 \times 89$  milimetrów w 4 kolorach: pik, kier, karo i trefl. Kart każdego koloru jest po 13. Od asa do 10, walet, królowa i król. Piki i trefle są czarne, a kier i karo czerwone. Nie są to idealne prostokąty, bo rogi są lekko zaokrąglone.

W zeszłym roku nasza klasa brała udział w układaniu fraktala na Błoniach - była to próba pobicia rekordu, zresztą udana. Na pamiątkę każdy otrzymał książkę „Matematyka jest wszędzie”, której autorką jest Maja Krämer. W tej książce znalazłyśmy ciekawostki o kartach. Postanowiłyśmy poszukać więc informacji na ten temat. Znalazłyśmy je w książkach Szczepana Jeleńskiego pt. "Lilavati" i "Śladami Pitagorasa" oraz „Laboratorium w szufladzie. Matematyka” Łukasza Badowskiego i Zdzisława Adamaszka. W ten sposób narodził się pomysł na naszą pracę.

Zapraszamy na odrobinę magii z kartami.

### Sztuczka pierwsza - zadanie z łódką

Łódką, w której mogą się zmieścić tylko 2 osoby przewozimy na drugi brzeg rzeki królów i królowe. Mężowie są bardzo zazdrośni o żony i nie chcą pozwolić, aby przebywały one w towarzystwie innego mężczyzny sam na sam. Jak wygląda przeprawa na drugi brzeg:

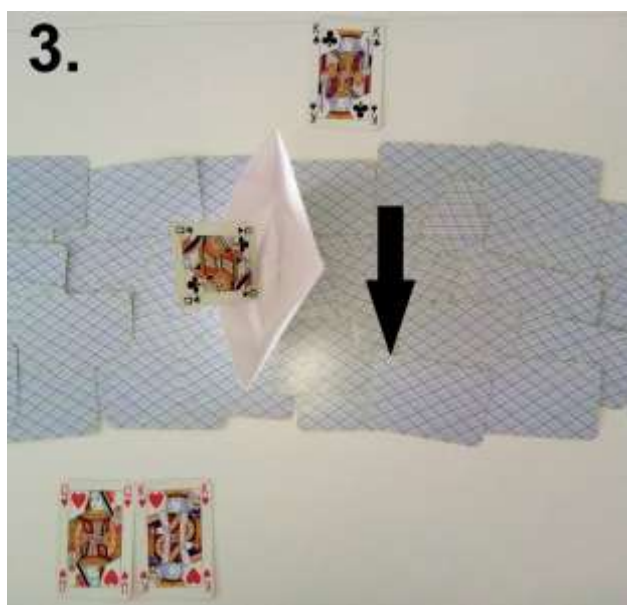
- a) 2 par małżeńskich,
- b) 3 par małżeńskich,
- c) 4 par małżeńskich.

### Rozwiązanie

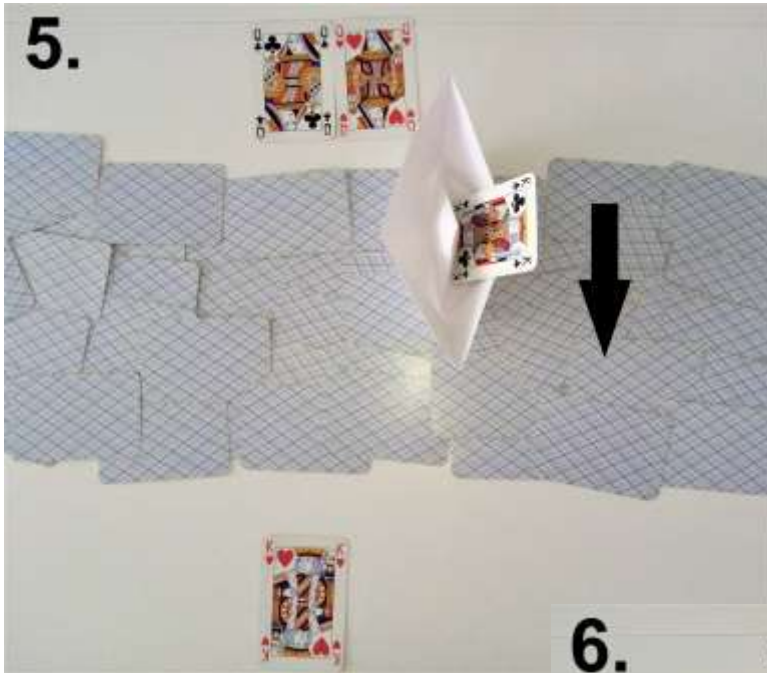
- a) 2 pary małżeńskie



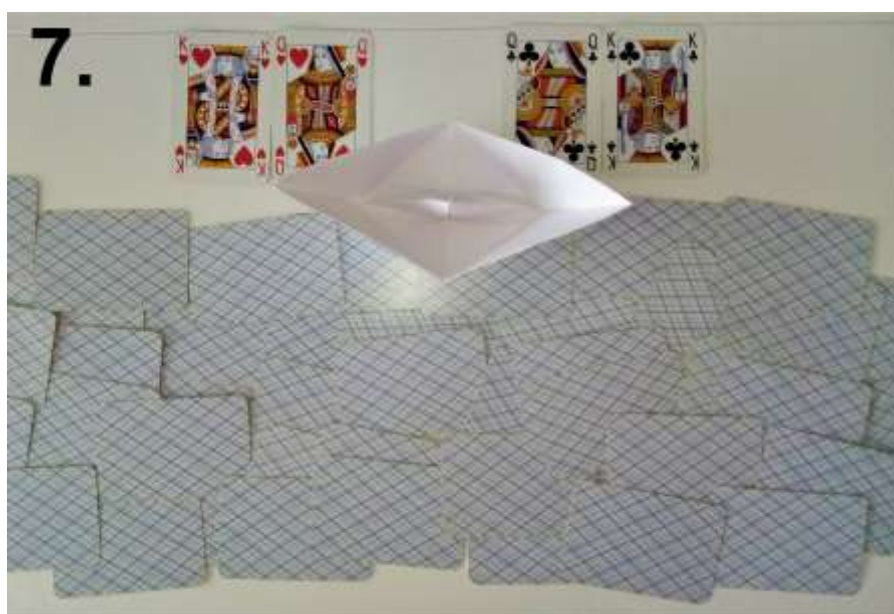
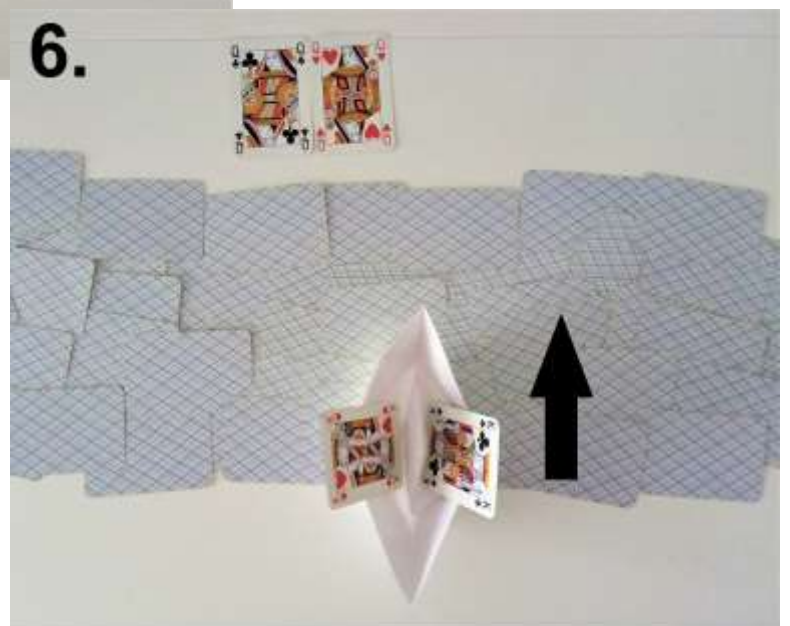
- najpierw na drugi brzeg płyty królowa z królem



- następnie wraca królowa po drugą królową (na drugi brzeg płyty dwie królowe)



- teraz król wsiada do łódki i  
płynie po drugiego króla  
(dwóch królów płynie na drugi  
brzeg)



### b) 3 pary

- DKier + KKier płyną razem
- wraca DKier
- DKier + DKaro płyną razem
- wraca DKaro
- DKaro + DPik płyną razem
- wraca DPik
- DPik + KPik płyną razem
- wraca KPik
- KPik + KKaro płyną razem

### c) 4 pary

- DKier + KKier płyną razem
- wraca DKier
- DKier + DKaro płyną razem
- wraca DKaro
- DKaro + DPik płyną razem
- wraca DPik
- DPik + KPik płyną razem
- wraca KPik
- KPik + KKaro płyną razem
- wraca KPik
- KPik + KTrefl płyną razem
- wraca KTrefl
- DTrefl + KTrefl płyną razem

### Sztuczka druga – silnia

Układamy karty.

Jeśli mamy jedną kartę możemy ją o prostu położyć – możliwość jest jedna. 1!



Jeżeli mamy 2 karty, można je położyć jedną obok drugiej na dwa sposoby.  $2 \cdot 1 = 2!$

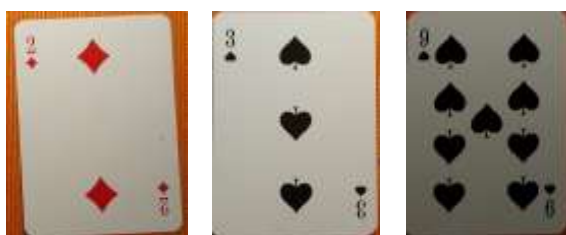
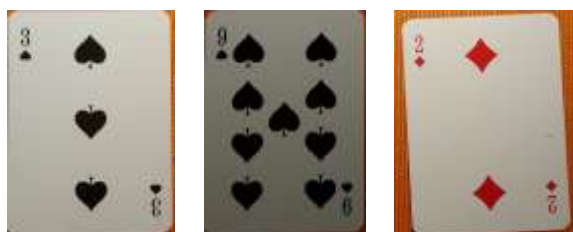
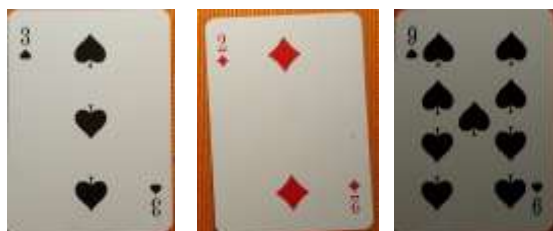
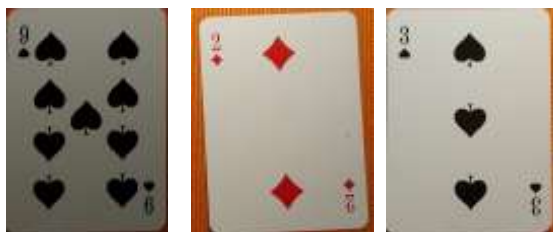
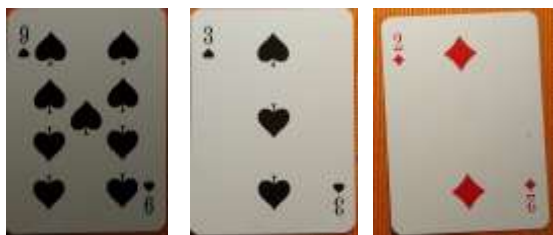


pierwsza kier, druga pik

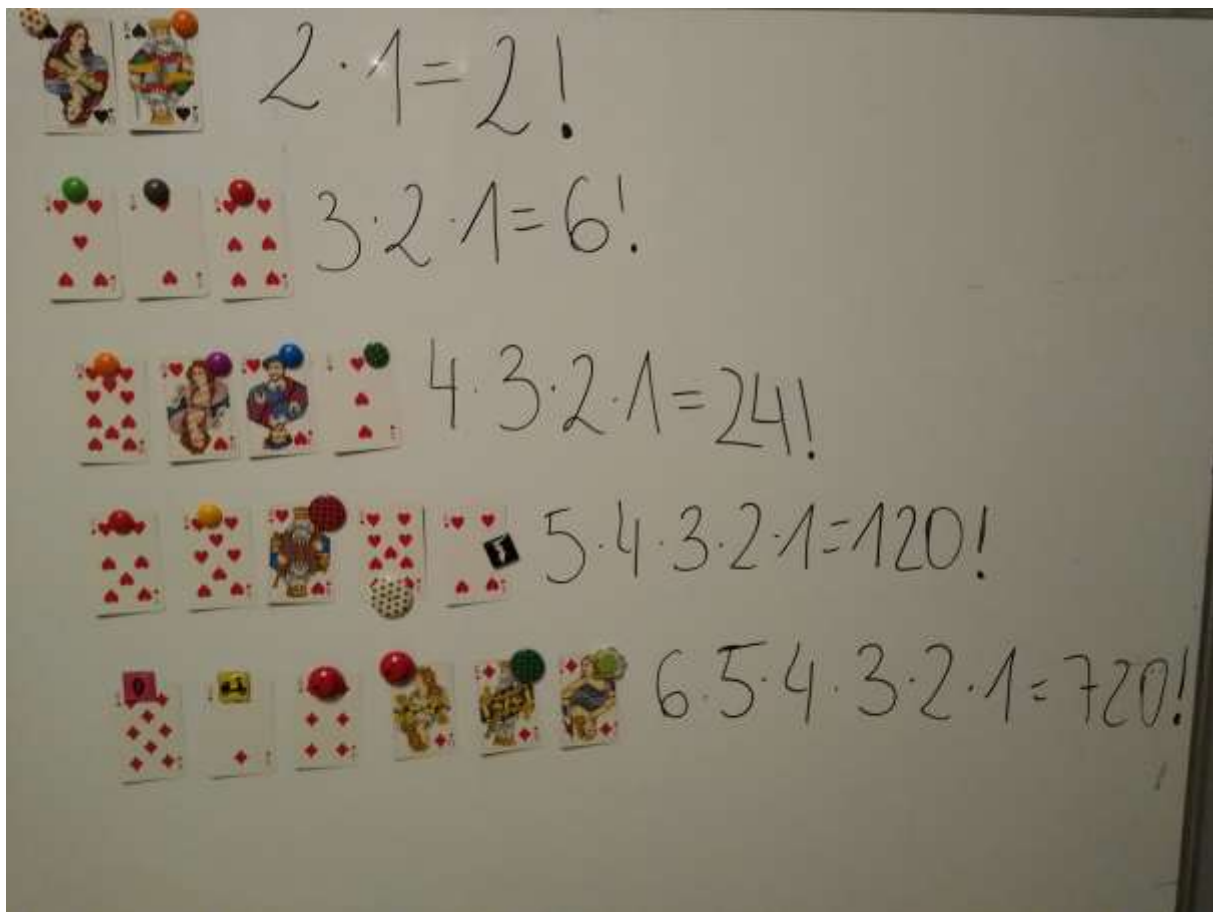


lub pierwsza pik, druga kier

Jeżeli mamy 3 karty sposobów jest 6 czyli  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$



Dla 4 kart jest  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$  Czyli 24 sposoby.



Dla całej talii kart jest  $52! = 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$  ponad  $8 \cdot 10^{67}$  możliwości.

Okazuje się, że zajęliśmy się **permutacją**. To właśnie **słynne  $n!$**

**Permutacja** zbioru  $n$ -elementowego - to dowolny  $n$ -wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów tego zbioru. Liczbę permutacji zbioru  $n$ -elementowego możemy obliczyć ze wzoru  $n!$

$$0! = 1$$

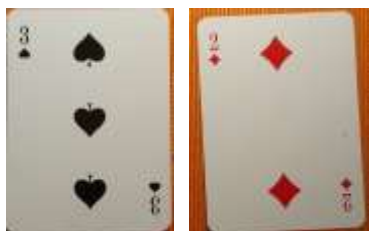
$$1! = 1$$

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \text{ itd.}$$

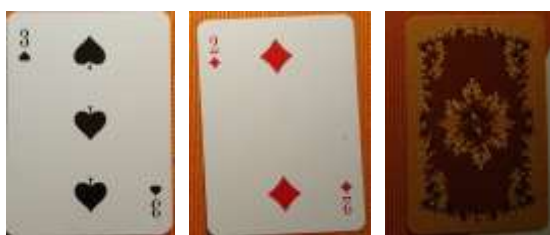
### Sztuczka trzecia – 0,1

Co może oznaczać taki układ kart?



Możemy potraktować jako liczbę 32, jako liczbę 5 – suma liczb na obu kartach albo jako liczbę 3, bo  $11_2 = 2+1$

Jeżeli przyjmiemy że tył karty to liczba 0, a przód to 1, możemy układać liczby w systemie binarnym.



Taki układ to  $110_2$  czyli  $4+2+0=6$

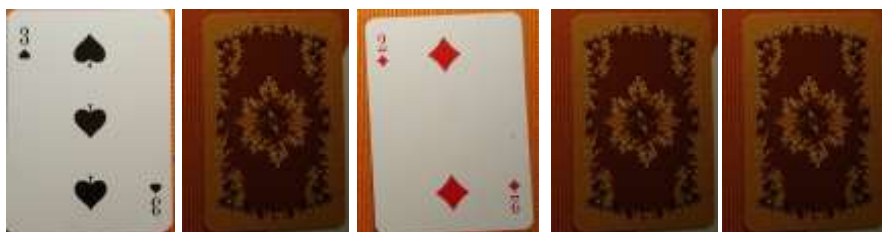


Tu  $101_2$  to liczba  $2+0+1=3$

Ważną rolę odgrywa miejsce na którym znajduje się cyfra. Tak, jak w systemie dziesiętkowym. Cyfra 7 w liczbie 782 jest cyfrą setek, a w liczbie 827 – cyfra jedności.

W systemie binarnym (dwójkowym) podstawą jest liczba 2. Wykorzystujemy potęgi liczby 2. Na końcu zapisu jest najmniejsza potęga liczby 2 :  $2^0 = 1$ ,  $2^1 = 2$ ,  $2^2 = 4$ ,  $2^3 = 8$ , ...

Jeżeli na jakiejś pozycji jest 0, to nie dodajemy potęgi liczby 2, która byłaby na tym miejscu. Jeżeli jest 1, to odpowiednią potęgę liczby 2 dodajemy.



Od ostatniej pozycji:  $0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 = 0+0+4+0+16=20$



### Sztuczka czwarta – symetria

Wybieram kilka kart z talii . Odwracam je tak aby nie wiedzieć ich przodu i tasuję. Proszę jedną osobę, aby wyciągnęła kartę, tak abym nie widziała jaką wybrała. Osoba ta pokazuje swoją kartę innym obecnym.

Powiedzmy, że mamy taką sytuację, po odwróceniu kart. Którą kartę wybrał ochotnik?



Wybrał Asa karo.

Sztuczkę powtarzamy?



Teraz wybrał asa kier.

Dlaczego? Rysunek serca nie jest symetryczny środkowo. I po wykonaniu sztuczki jest „do góry nogami”

Dlaczego w pierwszej próbie został wybrany as karo? Jest to jedyna karta, na której rysunek jest symetryczny środkowo i po wykonaniu sztuczki wszystkie karty wyglądają tak, jakby nic się nie zmieniło.

Jak wykonać tę sztuczkę?

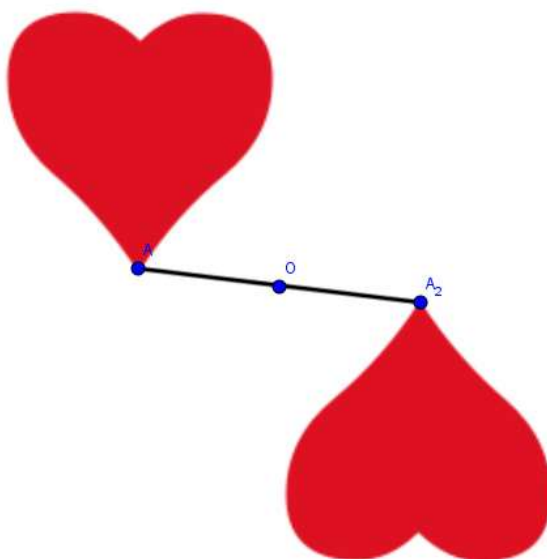
Wtedy, gdy wybierający ogląda kartę i pokazuje ją innym, magik odwraca resztę kart w rękę. Prosi o włożenie wybranej karty. Tasuje wszystkie razem, odkrywa je i dzięki symetrii jest w stanie powiedzieć, którą kartę wybrał uczestnik eksperymentu. W przypadku kart: asa kier, trefl lub pik, łatwo można zauważyć czy karta została wybrana. Jeśli wszystkie karty są ułożone w tej samej pozycji to znaczy, że wybrana karta to as kier.

Jakie karty możemy wykorzystać do tej sztuczki, gdy jesteśmy już wytrawnymi magikami? Wszystkie asy, 3, 5, 7, 9 koloru pik, kier, trefl. Dla fantazji można wziąć jedną kartę, która jest środkowo symetryczna np. 2 kier.

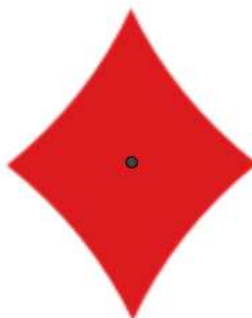
W tej sztuczce wykorzystujemy symetrię środkową. Rysunki na wymienionych kartach nie są symetryczne środkowo.

#### Symetria środkowa

Symetrię środkową względem punktu  $O$  zwanego środkiem symetrii nazywamy przekształcenie płaszczyzny, w którym punkt  $O$  jest stały, a każdemu innemu punktowi  $A$  przyporządkowuje punkt  $A_2$  taki, że punkt  $O$  jest środkiem odcinka  $AA_2$ .



Jeżeli figura posiada środek symetrii, to mówimy, że jest środkowo symetryczna.



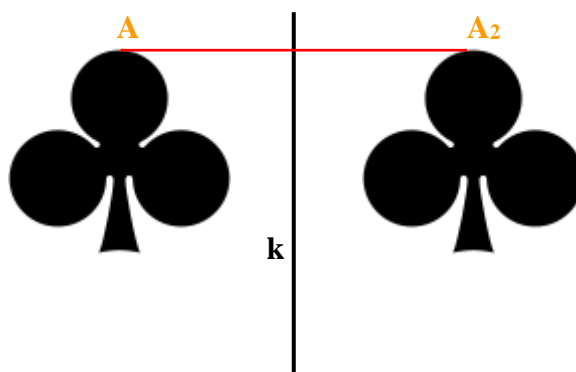
W talii kart, wszystkie karty z królami, królowymi i waletami są symetryczne środkowo oraz karty karo i karty z parzystymi liczbami.

Przy okazji możemy się przyglądnąć rysunkom. Który z nich jest figurą środkowo symetryczną? Tylko karo.

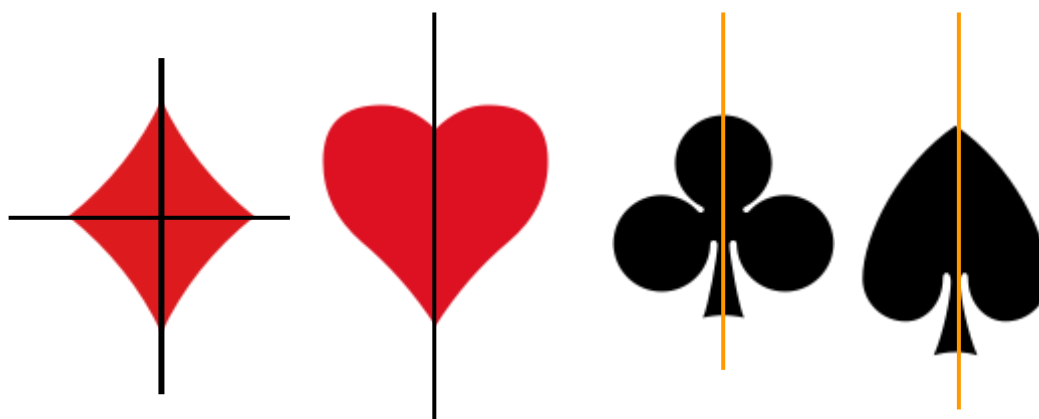


### Symetria osiowa

Symetrią osiową względem prostej  $k$  nazywamy przekształcenie płaszczyzny, w którym każdemu punktowi  $A$  przyporządkowany jest punkt  $A_2$ , leżący na prostej prostopadłej do tej prostej  $k$  przechodzącej przez punkt  $A$  w tej samej odległości od  $k$  co punkt  $A$ , ale po drugiej stronie prostej  $k$ . Prosta  $k$  nazywamy osią symetrii.



Jeżeli figura ma oś symetrii, to mówimy, że jest osiowo symetryczna.



Dwie osie symetrii ma karo, pozostałe figury po jednej.

Zwykle nie zwracamy uwagi na drugą stronę kart. Niektóre są figurami osiowo i środkowo symetrycznymi, niektóre środkowo, a niektóre nie. Oto nasze karty.



### Sztuczka piąta – po kolei!

Do tej sztuczki wzięłam 10 kart. Mogą być wszystkie karo, kier lub, pik lub trefl. Jednakowe lub odpowiednio różne kolory, ale muszą być od asa do 10, nie używamy figur.



Układam je plecami do góry. Proszę kogoś, aby przesunął kilka kart na początek, tak, aby nie zmienić kolejności w jakiej są ułożone. Nie patrzę, więc nie wiem kart ile przesunął. Odkrywam czwartą kartę i informuję, że poproszona osoba przeniosła 4 karty. Jak to możliwe?

Ponieważ układałam karty, to ułożyłam je malejąco po kolei od 10 do asa. Przeszawiłam trzy karty na początek i wtedy wiem, że pierwsza karta to 3.



Teraz proszę kogoś, aby przesunął kilka kart na początek, pamiętając, aby nie zmieniać kolejności przesuwanych kart.

Jeżeli ten ktoś przesunął cztery karty, to na początku jest wtedy „7”. Odkrywam kartę czwartą (3+1) i informuję, że przesunięto 4 karty. Pozostałych kart nikt nie odkrywa. Teraz muszę zapamiętać, że pierwsza karta to 7.



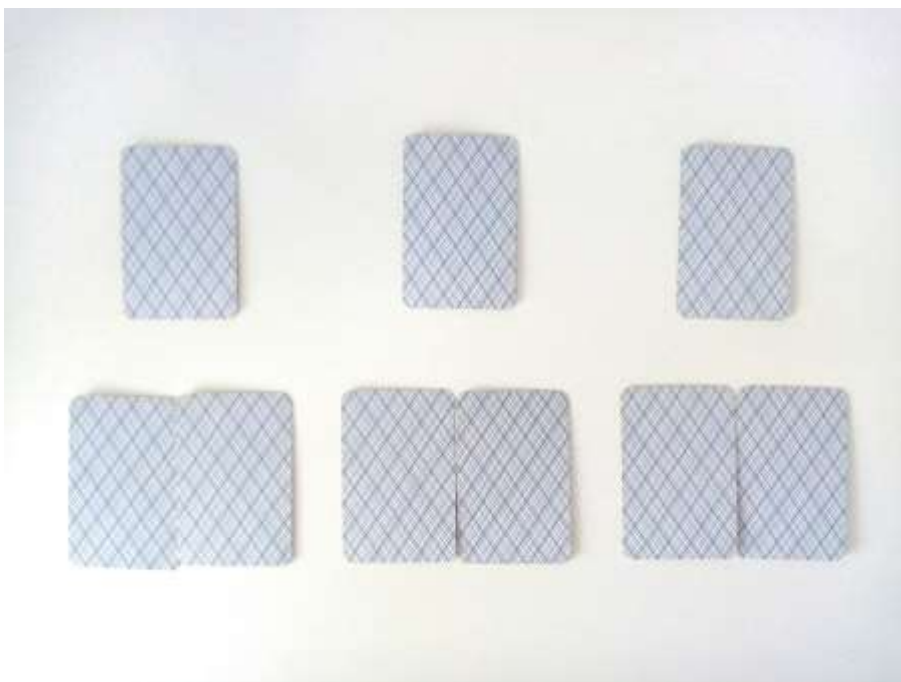
Jeśli ktoś następny przesunie np. dwie karty, to są od lewej 9 8 7 6 5 4 3 2 A 10  
 Odliczam i odkrywam ósmą kartę. Jest 2, czy przesunięto dwie karty. ↑

Teraz muszę zapamiętać, że na początku po lewej stronie jest 9, ktoś przesunie 5 kart.  
 Wtedy układ kart będzie od lewej 4 3 2 A 10 9 8 7 6 5 Odliczam i odkrywam 10 kartę, bo  
 $9+1=10$ .

Asa liczymy jako 1. Trzeba pamiętać, aby nie zmienić kolejności kart. Przed daną kartą jest  
 wyższa, a za nią jest niższa. Z wyjątkiem Asa, który zawsze ma po prawej stronie 10 lub nic.  
 Sztuczka jest zatem bardzo prosta.

### Sztuczka szósta – suma liczb

Ile jest równa suma liczb na trzech kartach, które są u góry? Mam na myśli po jednej liczbie z  
 każdej karty, bo tak naprawdę na każdej karcie są po dwie liczby.



Odpowiedź na pytanie to. Trzy!

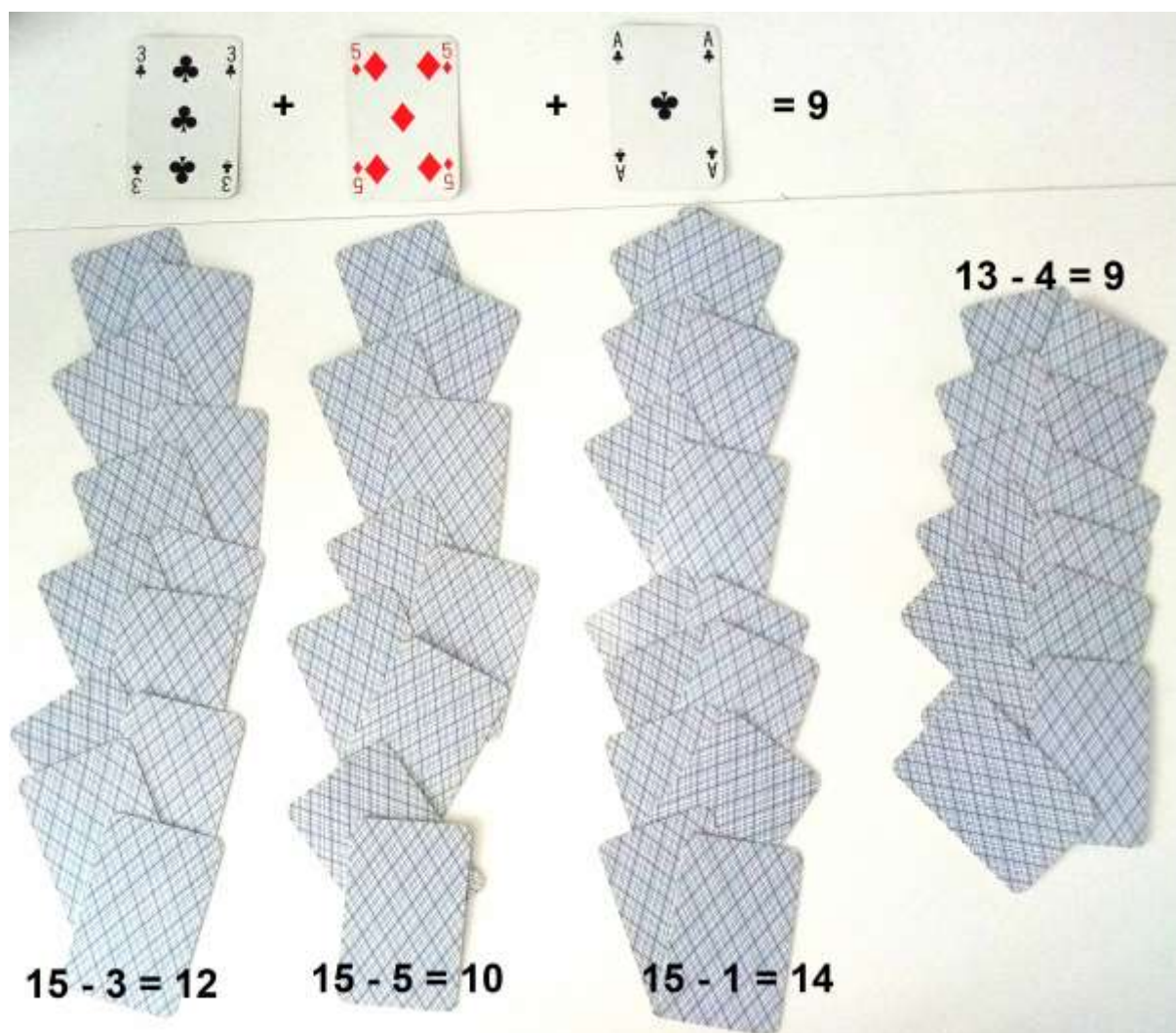
Na czym polega ta sztuczka?

Magik M trzyma całą talię kart (52 karty). Króla liczymy za 13, królową 12, a waleta za 11.

Osoba X zabiera 3 karty, nie pokazując ich Magikowi. Magik M prosi, aby osoba X pokazała te trzy karty innym, tak, aby Magik nie widział.

Następnie Magik prosi, aby osoba X dobrała do każdej z wyciągniętych kart tyle, ile w każdej z tych kart brakuje do 15 i oddała karty Magikowi. Magik przelicza w tym czasie karty, które zostały. Następnie od otrzymanej liczby odejmuje 4. W ten sposób otrzymuje sumę oczek znajdujących się na 3 zabranych przez osobę X kartach.

Poniżej rozwiązanie, jeżeli osoba X wybierze 3, 5 i asa. Wtedy Magikowi zostaje 13 kart odejmuje od nich 4 i podany wynik – 9 sprawia, że wszyscy się dziwią.



A jak będzie w poprzednim przykładzie? Osoba X wzięła  $2+2+2+3 = 9$  kart. Wobec tego Magikowi zostają  $52-9 = 43$  karty. Odejmuje  $43 - 4 = 39$ .

Suma liczb na trzech kartach to 39. Zatem osoba X wzięła 3 króle!

## Sztuczka siódma - kwadrat magiczny

Oto sposób, jak ułożyć kwadrat magiczny. As odpowiada liczbie 1. Układamy karty tak, jak na zdjęciu. Potem układamy tak jak na drugim zdjęciu.



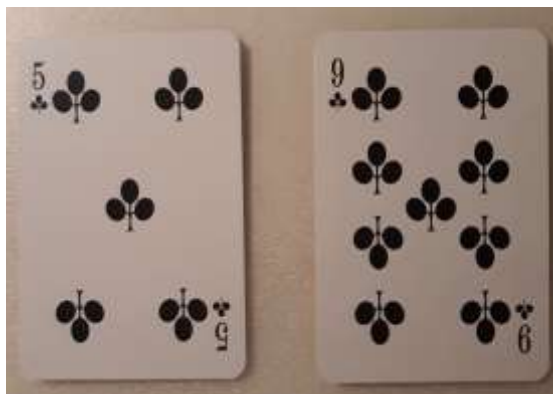
Suma w kolumnach, w rzędach i na przekątnej  
Jest równa 15.



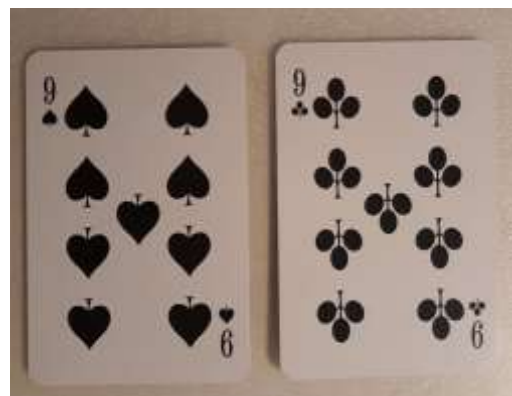
Jeśli wymienimy asa na 10, to suma liczb będzie  
równa 18.

### Sztuczka ósma – wojna

Proponujemy nietypową grę w wojnę. Możemy przyjąć, że karty czarne: pik i trefl to liczby ujemne, a karo i kier, czyli czerwone, to liczby dodatnie.



Prawy zawodnik przegrywa, bo  $-5 > -9$



teraz jest remis  $-9 = -9$  i wojna



Przekładamy po jednej karcie



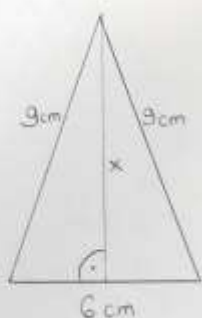
Lewy zawodnik wygrywa, bo  $6 > -8$



## Sztuczka dziewiąta - domek z kart

W podręczniku do matematyki jest zadanie o kartach

16. Typowa karta do gry ma wysokość 9 cm. Aby pojedynczy domek z kart był stabilny, tworzące go karty powinny być rozstawione na około 6 cm. Ile warstw takich domków należy ustawić, by otrzymać konstrukcję o wysokości ponad 1 m?



$$9^2 = x^2 + 3^2$$

$$81 = x^2 + 9 \quad | -9$$

$$72 = x^2$$

$$x = \sqrt{72} = \sqrt{2 \cdot 36} = 6\sqrt{2} \approx 8,4 \text{ cm}$$

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$$

$$100 \text{ cm} : 8,4 \text{ cm} \approx 12$$

$$12 \cdot 8,4 = 100,8 \text{ cm}$$

Odp.: Aby otrzymać konstrukcję o wysokości ponad 1 m należy ustawić 12 warstw takich domków.

W tych obliczeniach korzystamy z zaokrąglenia wymiarów karty 57 mm  $\approx$  6 cm, 89 mm  $\approx$  9 cm.

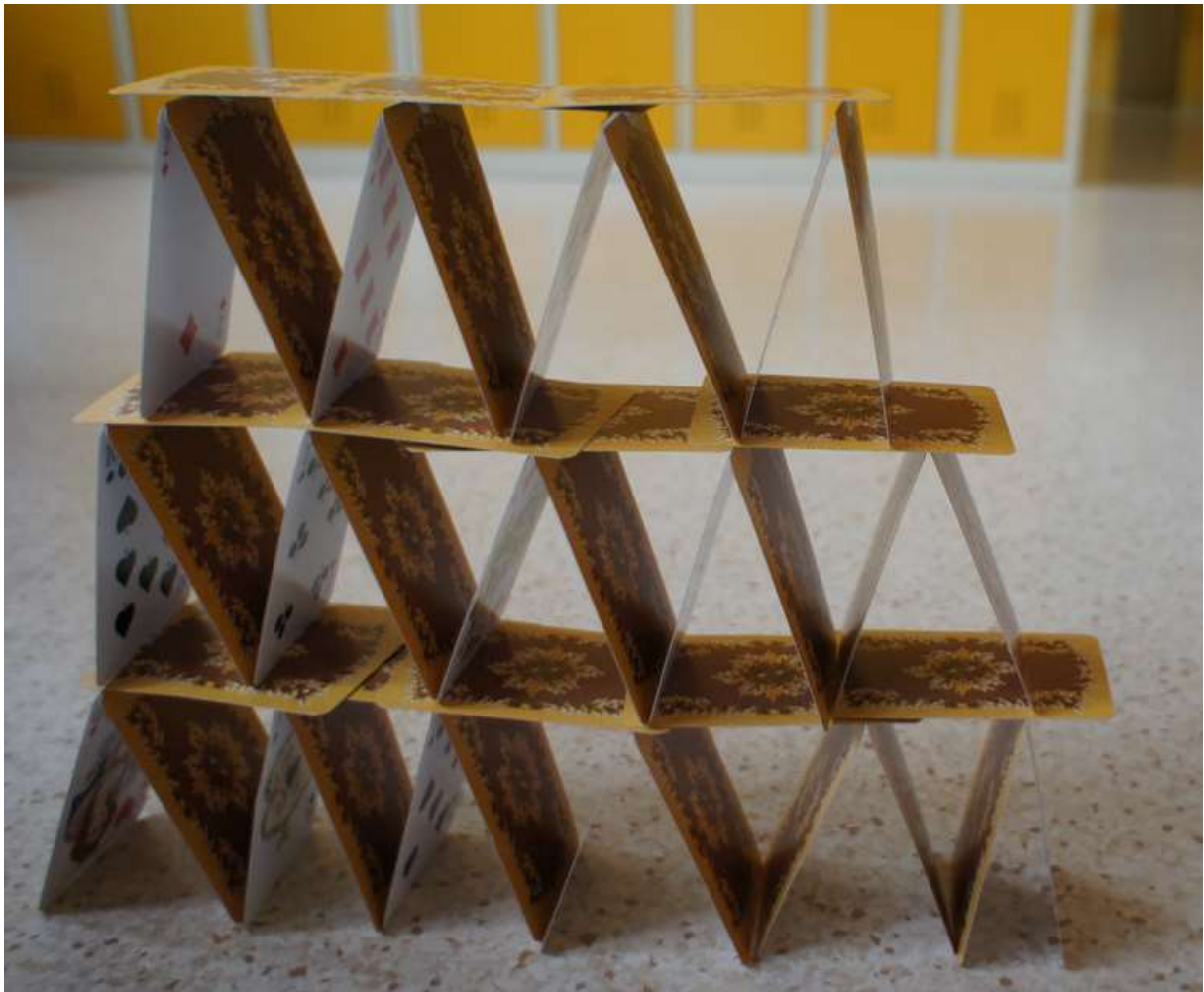


W domu próbowałam ułożyć domek z kart. Zauważyłam, że kąt pomiędzy kartami powinien wynosić ok. 50 stopni, aby konstrukcja była stabilna. Oto moje dzieło. Z siedmiu kart zbudowałam domek o wysokości ok. 17 cm



W szkole próbowaliśmy zbudować większą wieżę. Nie było łatwo.





Udało się nam zbudować 3 kondygnacje i budowla się rozpadła. Zastanawialiśmy się ile kondygnacji byłoby potrzeba, aby zbudować domek wysokości naszej szkoły.

Szkoła ma ok. 12 m wysokości, więc skoro na 1 m potrzeba 12 warstw, to potrzebowałybyśmy  $12 \cdot 12 = 144$  warstwy.

A ile to byłoby kart?

Zauważyliśmy, że na jedną kondygnację wystarczą 2 karty (nie musi być dolnej karty), na dwie kondygnacje - 7 kart, na trzecią - 15 kart, na czwartą - 26 kart ... za każdym razem dodajemy o trzy karty więcej niż poprzednio.

Spróbowałyśmy zbudować inną wieżę.



Kasia znalazła informację o Bryanie Bergu (nazwisko Góra!), który jest zawodowym układaczem budowli z kart.

Berg po raz pierwszy pobił rekord świata w układaniu najwyższego domku wolnostojącego z kart w 1992 r. (miał wówczas 17 lat). Budowla osiągnęła wtedy 4,4 m wysokości. Od tego czasu Berg otrzymywał propozycje pobicia własnego rekordu około 10 razy. Ostatnim rekordem Berga była wysoka na 7,62 m wieża, zbudowana w Muzeum Afroamerykańskim w Fair Park w Dallas w Teksasie. W tym celu wypróbował nową technikę polegającą na układaniu kart w pionie zamiast w poziomie, co zmniejszyło liczbę potrzebnych kart prawie o połowę.

Rekordowo duża budowa Weneckiego Hotelu zajęła mu 44 dni. Wykorzystał 219 000 kart.





Na koniec możemy podziwiać, w jaki sposób układa karty!

## Sztuczka 10 – prawdopodobieństwo.

Jeżeli mamy cztery asy, to prawdopodobieństwo wybrania jednego z nich jest równe  $1/4$



Prawdopodobieństwo wybrania czerwonego asa jest większe, bo wśród 4 asów są dwa czerwone  $2/4 = 1/2$

Prawdopodobieństwo wybrania jednej karty np. asa trefl spośród wszystkich 52 kart jest równe  $1/52$ .

Natomiast jeśli zdecydujemy się na wybór króla spośród wszystkich 52 kart, to prawdopodobieństwo wybrania damy z całej talii jest takie samo.

### Zakończenie

Dzięki matematyce i kartom zostaliśmy prawdziwymi iluzjonistami, magikami, sztukmistrzami 😊 Cieszymy się, że poznałyśmy nowe rzeczy.

Korzystałyśmy z książek:

„Matematyka jest wszędzie”, autorka Maja Krämer

„Lilavati” Szczepana Jeleńskiego

„Śladami Pitagorasa” Szczepana Jeleńskiego

„Laboratorium w szufladzie. Matematyka” Łukasza Badowskiego i Zdzisława Adamaszka

Stron internetowych

Programu Geogebra

oraz czterech talii kart czyli 16 sów, 16 - „2”, 16 - „3”, ..., 16 waletów, 16 dam i 16 królów.

Zdjęcia, oprócz zdjęć rekordzisty, Bryana Berga zrobiliśmy same.

