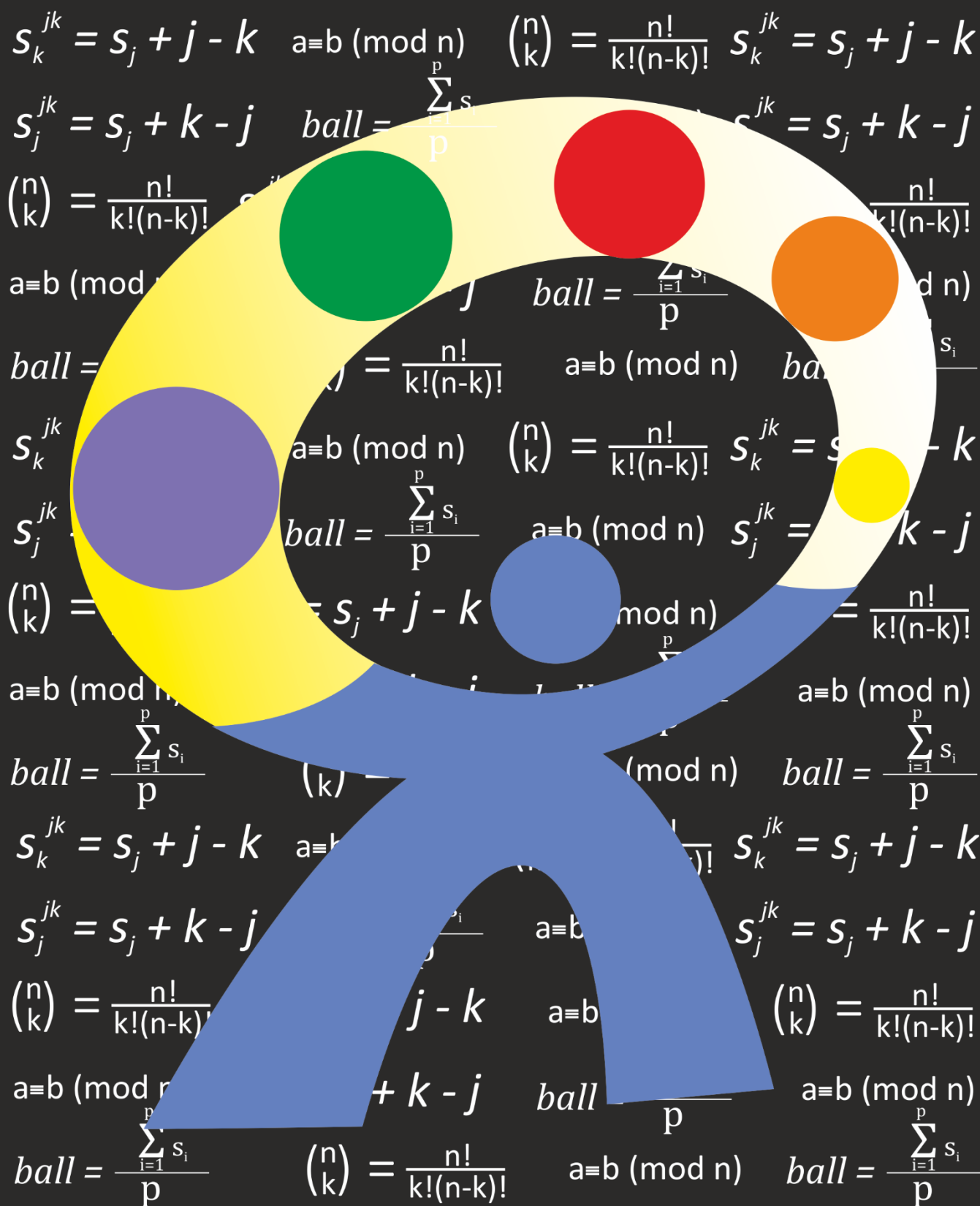


Kacper Błachut klasa VIIIc

Szkoła Podstawowa nr 5 im. Konfederacji Tatrzańskiej,
ul. Orkana 17, 34-400 Nowy Targ

Opiekun: mgr Monika Parzygnat

MATEMATYKA ŻONGLOWANIA



Dane kontaktowe

Szkoła:

Szkoła Podstawowa nr 5 w Nowym Targu im. Konfederacji Tatrzańskiej

ul. Wł. Orkana 17 34-400 Nowy Targ

tel. 182662574 email: sp5@nowytarg.pl

Opiekun:

mgr Monika Parzygnat

tel. 788 601 231 email: monikabochnak94@gmail.com

Autor:

Kacper Błachut

tel. 601 22 32 31 email: kacper.blachut@gmail.com

SZKOŁA PODSTAWOWA NR 5
Im. Konfederacji Tatrzańskiej
34-400 Nowy Targ, ul. Wł. Orkana 17
tel. 18 265 26 50, 18 265 10 60
NIP 735-12-97-200, REGON 490658381

Nowy Targ, 27.01.2020r.

INFORMACJA NAUCZYCIELA

Kacper jest uczniem klasy ósmej. Już po raz czwarty startuje w Małopolskim Konkursie Prac Matematycznych. W roku szkolnym 2016/2017 zajął II miejsce pisząc pracę na temat nieskończoności, w 2017/2018 zajął I miejsce przedstawiając swoje zainteresowania na temat kostek Rubika, natomiast w 2018/2019 powtórzył sukces z poprzedniej klasy opisując Funkcje.

Wszystkie prace pisemne Kacpra są wykonywane bezbłędnie, zadania o podwyższonym stopniu trudności wykonuje bez żadnych problemów. Rozwiązania zadań są zawsze szczegółowe i bardzo precyzyjne. Uczeń preferuje pracę samodzielną, jednak chętnie dzieli się swoją wiedzą i doświadczeniem z innymi uczniami.

Kacper brał udział także w innych konkursach matematycznych:

- w Małopolskim Konkursie Matematycznym przeszedł do etapu wojewódzkiego,
 - w szkolnym konkursie „Światowy Dzień Tabliczki Mnożenia” był bezkonkurencyjny w klasach ósmych,
 - w konkursie matematycznym „Kangur”
- Odnosi także sukcesy w konkursach z fizyki czy języka angielskiego.

Uczeń ciągle poszerza swoją wiedzę i umiejętności matematyczne, rozwija zainteresowania, a także szuka nowych problemów do rozwiązania. Łączy ze sobą różne dziedziny nauki. Potrafi dojść do rozwiązania różnymi metodami, czasem wykraczającymi poza podstawę programową. Przykładem jest ta praca, którą napisał samodzielnie.

W pracy konkursowej wykorzystał duże wiadomości i umiejętności, które posiada i ciągle poszerza. Opierał się na bibliografii dołączonej do pracy.

Monika Parzygnat

Monika Parzygnat
telefon: 788601231
email: monikabochnak94@gmail.com

1. Wstęp.

Zawsze szukałem matematyki w otaczającym nas świecie. Jest jej pełno – przecież matematyka to królowa nauk. Przyroda jest wręcz przepełniona matematyką. Ciągi Fibonacciego na drzewach, w szyszkach, spirale w muszlach ślimaków to tylko początek góry lodowej. Złoty środek (podział) – przez wieki nieświadomie stosowany przez twórców, a potem już zupełnie celowo zarówno przez artystów, jak i przez inżynierów. Idąc dalej – przecież fizyka opisuje cały otaczający nas świat - w skali mikro, jak i w skali makro. A w jaki sposób to robi? Za pomocą matematyki! Kiedy już zrozumiałem, że matematyka jest wszędzie, zacząłem jej szukać tam, gdzie pozornie jej nie ma. Między innymi dlatego dwa lata temu napisałem pracę na Małopolski Konkurs Prac Matematycznych pt. *Matematyka Kostki Rubika* – gdzie nie zajmowałem się układaniem tej łamigłówki, ale próbowałem znaleźć odpowiedź na pytanie na ile różnych sposobów można ją ułożyć. Większość ludzi podchodzi do kostek Rubika od strony algorytmicznej, ja poszedłem inną drogą. Zastosowałem kombinatorykę do zliczania możliwych stanów takiej łamigłówki. Było to bardzo fascynujące zagadnienie.

Oprócz moich *rubików* zawsze fascynowało mnie żonglowanie. Gdzieś wyczytałem, że w Niemczech prowadzono badania dotyczące żonglerów i okazało się, że odkąd prowadzona jest dokumentacja medyczna w tym kraju żaden żongler nie zachorował na Alzheimera. Dodatkowo nie od dziś wiadomo, że żonglowanie wspomaga nawiązywanie nowych połączeń pomiędzy półkulami mózgu. Gdy dowiedziałem się o tak zbawiennym oddziaływaniu żonglowania tym bardziej oddałem się temu hobby.

W tym roku postanowiłem na warsztat wziąć to moje zamiłowanie. Łatwo nie było. Gdzie w żonglowaniu znaleźć matematykę. Oczywiście zacząłem przeglądać Internet. O żonglowaniu jest całkiem sporo stron. A już YouTube po prostu kipi różnego rodzaju filmikami. Ale matematyka ... No cóż z tym było trochę gorzej. Właśnie na YT od dawna przeglądałem kanał *Mathologer* Burkarda Polster'a (bardzo ciekawy). Tam na jednym z filmów znalazłem jego wykład na temat żonglowania. Od nitki do kłębka i znalazłem pracę *The Mathematics of Juggling* [1], właśnie jego autorstwa. Wtedy się zaczęło! Prac jest naprawdę wiele, ale w Polsce zajmuje się tym tylko Maciej Stankiewicz - doktorant na Uniwersytecie Gdańskim, który na ten temat napisał pracę magisterską w 2015 [6].

Okazało się, że żonglowanie pełne jest matematyki. Algebra, kombinatoryka, geometria, grafy, a nawet teoria warkoczy. W pracy tej przedstawię różne podejścia do matematycznego opisu procesu żonglowania. Niektóre zagadnienia opisuję dość dokładnie, inne trochę mniej. Te, które opisuję w skrócie, to nie dlatego, że nie są warte zgłębienia, ale po prostu zabrakło mi czasu albo wiedzy. Przecież jestem dopiero ósmoklasistą i o wielu rzeczach w matematyce mam niewielkie pojęcie (tak jest na przykład z topologią, która jest potrzebna do opisu teorii warkoczy).

W **rozdziale 1** opisuję co skłoniło mnie do napisania niniejszej pracy oraz piszę, w skrócie, jakie zagadnienia poruszam w poszczególnych częściach pracy.

Rozdział 2 – Tu zebrałem różnego rodzaju pojęcia używane w dalszej części pracy, niektóre oznaczenia są trywialne inne bardziej skomplikowane. Praca przeznaczona jest nie tylko dla wybitnych matematyków, którzy będą ją oceniać, ale także – a może przede wszystkim dla moich rówieśników, którzy mogą nie znać wszystkich symboli tu użytych.

Rozdział 3 to opis samego procesu żonglowania jak i jego notacji matematycznej – siteswap. Jest on trochę obszerny, ale aby zrozumieć o czym piszę w dalszej części pracy należy przyswoić sobie pewne aspekty żonglowania. A przecież nie każdy czytający tę pracę to żongler.

Rozdział 4 – to definicje różnych siteswapów oraz najważniejsze twierdzenie o wartości średniej i jego dowód podany w sposób bardzo intuicyjny, bez skomplikowanej matematyki. W wielu pracach (np. [1], [2]) są mniej lub bardziej skomplikowane dowody tego podstawowego twierdzenia w teorii siteswapów, ale postanowiłem pokazać taki bardziej opisowy, który może trafić nie tylko do matematyków.

Rozdział 5 – Określam tutaj w jaki sposób można na podstawie już istniejących poprawnych siteswapów stworzyć nowe. Opisuję także algorytm spłaszczający, który jest bardzo przydatny między innymi do określania czy dany ciąg jest poprawnym siteswapem, czy też nie.

Rozdział 6 – w tej części skupiłem się na określeniu liczby możliwych siteswapów różnego rodzaju. Wykorzystałem tutaj między innymi wiedzę zdobytą przy tworzeniu pracy na konkurs sprzed kilku lat pt. *Nieskończoność* (nieskończoności różnego rodzaju typu) oraz *Matematyka kostki Rubika* (wstęp do kombinatoryki). Mimo, że obliczenia nie zostały zakończone – zamieściłem je w pracy.

W **rozdziale 7** zajmuję się innym sposobem opisu procesu żonglowania. Próbuję zdefiniować tak zwaną funkcję żonglowania.

Rozdział 8 jest poświęcony jeszcze innemu podejściu do zapisywania żonglowania zwanemu notacją stosu. W tym podejściu notujemy względną wysokość piłek (wysokość danej piłki jest określana względem innych piłek).

Natomiast w **rozdziale 9** dałem się pochłonąć grafom i tabelom stanów żonglowania. Jest to bardzo fascynujący temat. Mimo, że w pracy rozdział ten zajął dużą ilość miejsca, to zaledwie *musnąłem* to zagadnienie.

Rozdział 10 to krótki opis kolejnego podejścia do problemu żonglowania. Korzystam z teorii warkoczy. Nie wchodzę w szczegóły tej teorii, pokazuję tylko, że tak także możemy opisywać żonglowanie.

W **rozdziale 11** na zakończenie podsumowuję tezy zawarte w pracy oraz piszę czego w niej nie uwzględniłem.

2. Używane pojęcia.

W pracy będę używał pewnych oznaczeń i definicji, które podaję poniżej

Zbiory liczb

$\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych

$\mathbb{N}_0$ – zbiór liczb naturalnych z 0 (zerem)

$\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych

$\mathbb{N}^n$ - n-wymiarowa przestrzeń liczb naturalnych, czyli $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}$ (n-razy)

Sumy i iloczyny

$\sum_{i=1}^k a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ – suma k-elementów

$\prod_{i=1}^k a_i = a_1 \cdot a_2 \dots a_k$ iloczyn k – elementów

$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n$ gdzie A_i to zbiory (suma zbiorów)

Relacje podzielności

$b \mid a$ oznacza, że a jest podzielne przez b (bez reszty)

$b \nmid a$ oznacza, że a nie jest podzielne przez b

Kwantyfikatory logiczne

$\forall x \in X$ – dla każdego x należącego do zbioru X ... (inne oznaczenie $\wedge$)

$\exists x \in X$ – istnieje x należące do zbioru X , takie że ... (inne oznaczenie $\vee$)

$\exists! x \in X$ – istnieje dokładnie jeden x należący do zbioru X , taki że ... (inne oznaczenie $\vee !$)

Współczynnik dwumianowy – Symbol Newtona (po)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Kongruencja (przystawanie)

$n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ liczby a i b nazywamy **kongruentnymi (przystającymi) modulo n**

$$a \equiv b \pmod{n}$$

jeżeli różnica $a - b$ jest podzielna przez n : $a - b = kn$ (gdzie k jest całkowite)

Na przykład $24 \equiv 3 \pmod{7}$ gdyż $24 - 3 = 21 = 3 \cdot 7$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby $a \equiv b \pmod{n}$ jest, aby reszty z dzielenia a i b przez n były równe.

Permutacje cykliczne

Permutacja skończonego zbioru jest odwzorowaniem różnowartościowym tego zbioru na siebie. Permutacją zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ jest na przykład zbiór $\{3, 2, 4, 1\}$.

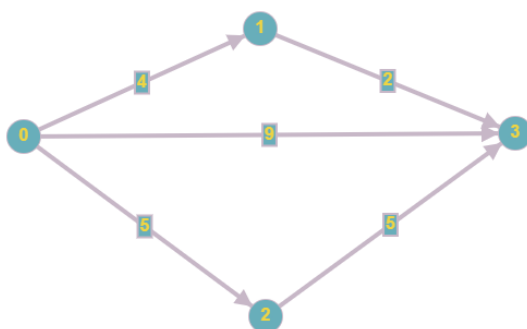
Natomiast permutacją cykliczną zbioru $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k-1}, a_k\}$ jest zbiór $\{a_2, a_3, \dots, a_{k-1}, a_k, a_1\}$ lub $\{a_k, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k-1}\}$

Oznaczenia ciągów liczb

$(s_i)_{i=1}^p$ – to ciąg liczb $s_1, s_2, \dots, s_p$

Graf

Graf to zbiór wierzchołków (oznaczanych zazwyczaj kropkami) oraz krawędzi łączących wierzchołki (na rysunkach to zazwyczaj odcinki pomiędzy kropkami). Niekiedy odcinki mają kierunek i wtedy takie grafy nazywamy skierowanymi. Grafy ważone to takie, w których krawędzie posiadają wagę (liczbę). Często też wierzchołkom przypisuje się etykietę – wtedy powstają grafy etykietowane.



Rysunek 1 - Przykładowy graf (etykietowany, skierowany, ważony)

Droga w grafie G nazywamy taki ciąg jego wierzchołków $v_1, v_2, \dots, v_k$, że każde dwa kolejne wierzchołki w tym ciągu są połączone krawędzią (czyli można przejść z jednego końca drogi na drugi chodząc tylko po krawędziach).

Cykl w grafie G to droga w tym grafie, która kończy się w tym samym wierzchołku, w którym się zaczęła.

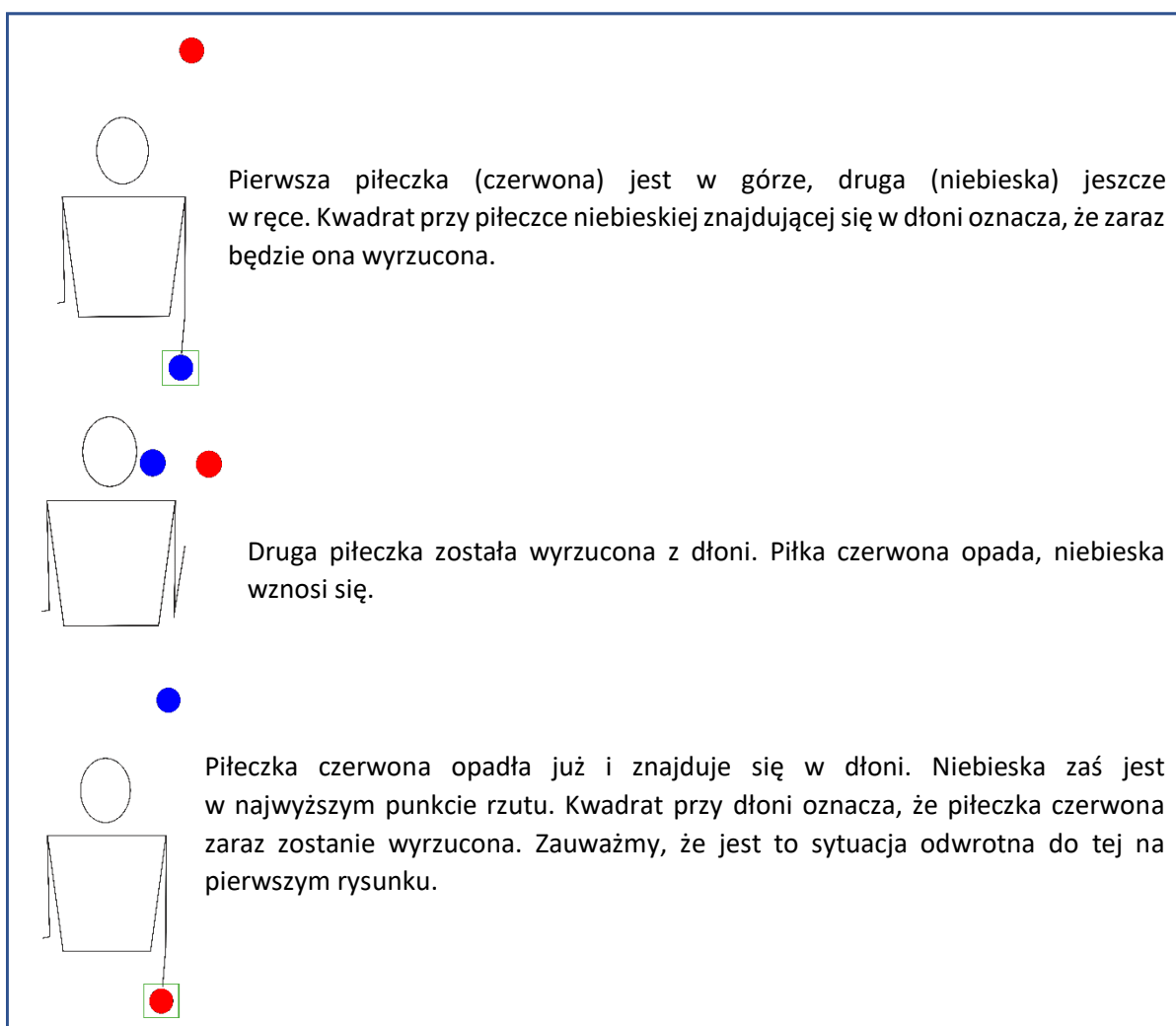
3. Matematyczny opis żonglowania.

Aby móc o żonglowaniu rozmawiać w sposób precyzyjny (a matematyka to przecież precyzja) należy przełożyć ruchy rąk żonglera i tory lotu piłeczek na język matematyki. Nie jest do końca jasne, kto stworzył jako pierwszy notację żonglowania. Wydaje się, że trzy niezależne grupy około 1985 roku stworzyły tzw. *siteswapy* do matematycznego opisu żonglowania ([1] s.5). Byli to: Bengt Magnusson i Bruce „Boppo” Tiemann w Los Angeles, Paul Klimak w Santa Cruz i Adam Chalcraft, Mike Day i Colin Wright w Cambridge. Ich opisy trochę różniły się od siebie, ale z biegiem czasu notacja ujednoliciła się i przyjęła formę tzw. *siteswapów*. Aby zrozumieć dalszą część pracy należy dokładnie zapoznać się z tą notacją, dlatego na kilku następnych stronach przedstawię w sposób dość szczegółowy opis żonglowania. Dla kogoś, kto żongluje nie jest to zbyt trudne, ale dla osoby postronnej, która z żonglowaniem miała do czynienia tylko w cyrku, może nieść pewne trudności.

A więc do dzieła.

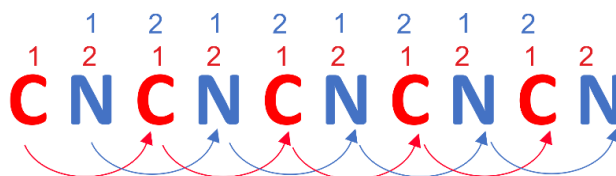
Zacznijmy najpierw od najprostszego żonglowania: jedna ręka, dwie piłeczki. Na początku mamy obie piłki w ręce (tę chwilę pomijamy). Następnie podrzucamy jedną piłeczkę, gdy ta zaczyna opadać podrzucamy drugą. Gdy druga leci w górę, pierwszą piłeczkę łapiemy do ręki. Gdy druga osiągnie najwyższy punkt i zaczyna opadać, wyrzucamy z ręki piłeczkę pierwszą. I tak dalej.

Zobaczmy to na rysunkach



Rysunek 2 - Żonglowanie dwiema piłeczkami

Jak to przełożyć na język matematyki? Oznaczmy rzut piłeczką czerwoną jako **C**, natomiast niebieską jako **N**. Zatem żonglowanie jedną ręką możemy opisać jako ciąg rzutów: **C N C N C N C N**. Zauważmy, że w ciągu mamy jakby dwie chwile: C i N. Jeżeli zaczniemy liczyć od C do następnego C to mamy C(1) i następnie N(2), potem zaczynamy od nowa C(1). Podobnie z piłką niebieską: N(1) następnie C(2) ...



Rysunek 3 – Schemat rzutu dwoma piłkami

Matematycy-żonglerzy przełożyli to na język liczb w ten sposób, że patrząc na powyższy schemat oznaczyli każdy rzut jako długość strzałki (tak zwana wysokość rzutu – o tym później). W tym przypadku wyglądałoby to tak: 222222 w skrócie 2 (jest to najkrótszy okres powyższego ciągu).

Tak to wygląda w przypadku jednej ręki i dwóch piłek. Żonglerzy rzadko używają tylko jednej ręki do żonglowania. Przyjrzyjmy się zatem jak opisać żonglowanie dwoma rękami i trzema piłkami. Spróbujemy opisać to słowami. Zaczynamy od tego, że w jednej ręce (A) trzymamy dwie piłeczki (niebieską i czerwoną), a w drugiej (B) jedną (zieloną). Zaczynamy rzucać od ręki (A), w której trzymamy dwie piłki. Wyrzucamy piłkę niebieską, gdy ta osiąga maksymalną wysokość, wyrzucamy z ręki B piłkę zieloną. Piłka niebieska – wyrzucona z ręki A opada do ręki B (z której przed chwilą wyrzuciliśmy piłkę zieloną). Gdy zielona jest w najwyższym punkcie z ręki A wyrzucamy piłeczkę czerwoną. Piłka zielona (ta z ręki B) ląduje nam w ręce A (przed chwilą wyrzuciliśmy piłeczkę czerwoną). Gdy czerwona osiąga maksymalną wysokość z ręki B wyrzucamy białą niebieską. Kula czerwona opada nam do ręki B. Gdy niebieska osiąga maksimum wyrzucamy zieloną z ręki A. Piłka niebieska opada nam do ręki A. Taki literacki opis jest dość trudny do zrozumienia. Spróbujmy przedstawić to w formie tabeli:

chwila	Ręka A		Ręka B
-1	C N		Z
0	C	N	Z
1	C	Z N	
2		C Z	N
3	Z	C N	
4		Z N	C
5	N	Z C	
6		N C	Z
7	C	Z N	

Rysunek 4- Tabela dla trzech piłek

Każdy moment żonglowania podzieliłem na sekwencje (chwile). W kolumnie pierwszej mamy numery tych chwil. Druga kolumna to piłki znajdujące się w ręce A, ostatnia w ręce B, a kolumna między nimi to piłeczki znajdujące się w danej chwili w powietrzu. Dwa pierwsze wiersze (chwile -1 i 0) to przygotowanie do rzutów. Prawdziwe żonglowanie zaczyna się od momentu, gdy dwie kule są w powietrzu (chwila 1). Zauważmy, że w tabeli chwila 7 jest taka sama jak 1. Znaczący to, że pełny cykl takiego żonglowania to 6 chwil.

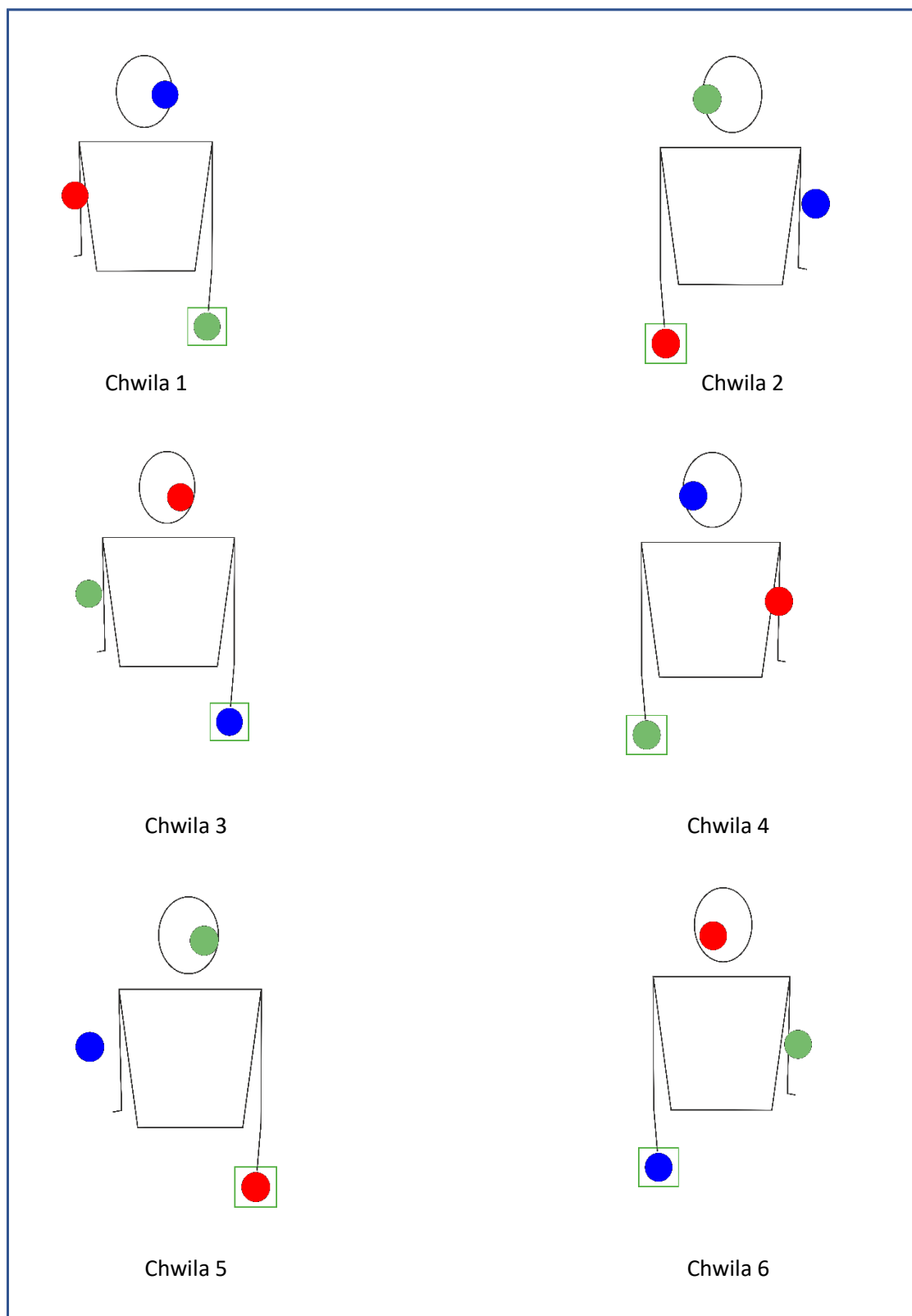
chwila	Ręka A		Ręka B
1	C	Z N	
2		C Z	N
3	Z	C N	
4		Z N	C
5	N	Z C	
6		N C	Z
7	C	Z N	

Rysunek 5- Tabela z naniesionym diagramem drabinowym

Na rysunku 5 zaznaczyłem poszczególne ruchy piłek pomiędzy rękami A i B. Jest to tak zwany diagram drabinowy. W kolejnych rozdziałach, gdy opis *siteswap* będzie niewystarczający, spróbuję pomagać sobie takimi właśnie diagramami. Zwróćmy uwagę, że ilość chwil między wyrzuceniem itp. czerwonej piłki, a jej złapaniem równa się 3 (na rysunku 4 – od 1 do 4 chwili). Tak więc

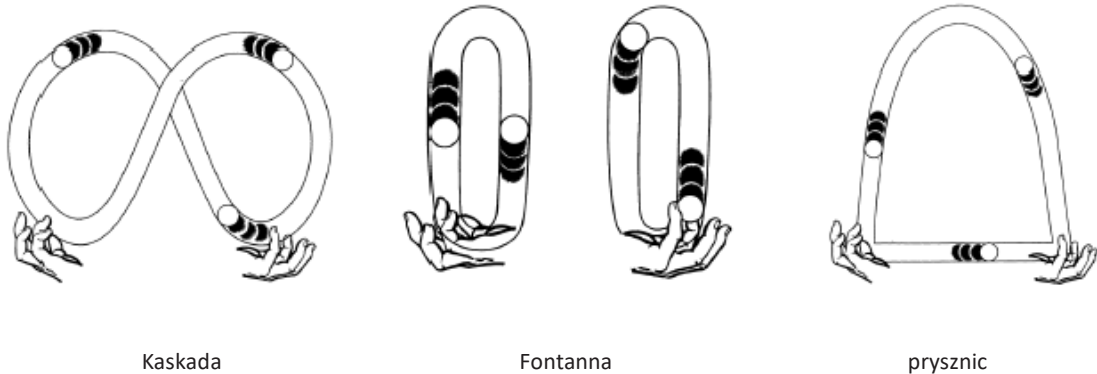
siteswap dla tego typu żonglowania można opisać jako 333333.... = 3.

A teraz gdyby ktoś miał jeszcze wątpliwości w jaki sposób żonglujemy trzema piłkami opiszę to na rysunkach.



Rysunek 6 - Ilustracje dla żonglowania trzema piłkami

Żonglerzy – jeszcze przed etapem „matematycznym” próbowali opisywać proces żonglowania na swój sposób. I tak na siteswap 3 (opisany wcześniej) to **kaskada** – piłki wędrują pomiędzy rękami. Jeżeli piłki opadają do tej samej ręki, z której zostały wyrzucone to takie żonglowanie nazywamy **fontanną**. Natomiast jeśli piłki wędrują „w kółko” jest to **prysznic**.



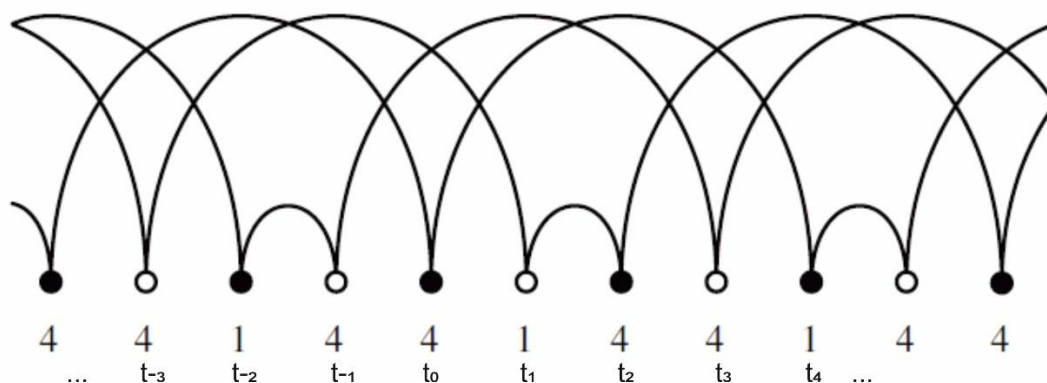
Rysunek 7 - Nazwy popularnych żonglowań

Co do zasady inne typy żonglowań nazywane były od powyższych itp. półprysznic, odwrócona kaskada, odwrócona fontanna (wulkan) itp.

4. Definicje i podstawowe twierdzenia.

Wprowadzimy teraz pewne definicje, aby móc określić sposób opisu procesu żonglowania. Każdy z nas widział żonglera- to człowiek, który podrzuca różnymi przedmiotami, są to piłeczki, maczugi, obręcze, kostki masła, a nawet ... uruchomione piły tańczuchowe. Tych przedmiotów może być wiele (rekord to 14 piłeczek). Dla niniejszej pracy nie jest ważne jakimi przedmiotami żonglujemy. Przyjmijmy, że są to piłeczki (nimi najłatwiej żonglować). Jeżeli dokładnie przyjrzymy się żonglerowi to możemy zauważyć, że minimalna wysokość na jaką wyrzuca piłeczki rośnie wraz z ich liczbą (oczywiście można żonglować trzema piłeczkami „wyżej” niż czterema, ale nam chodzi o wysokość minimalną). Przyjmijmy teraz pewne założenia, które pomogą nam zrozumieć matematyczny język opisu żonglowania:

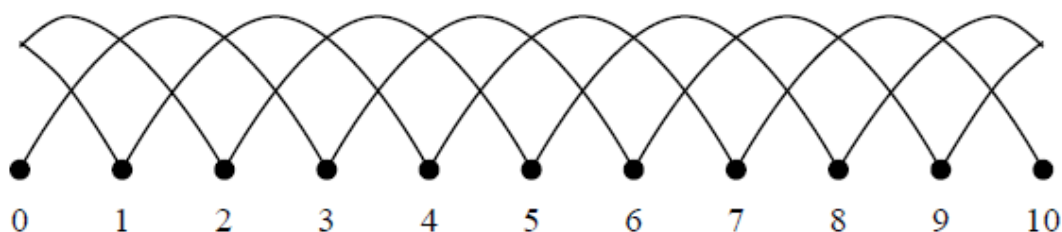
- czas, w którym żonglujemy jest ciągiem chwil ..., t_{-3} , t_{-2} , t_{-1} , t_0 , t_1 , t_2 , t_3 , ... (jest dyskretny oraz nie ma ani początku, ani końca),
- żonglowanie odbywa się przy pomocy dwóch rąk (jeden żongler),
- każda ręka trzyma/rzuca w danej chwili t_i jedną piłeczkę (bez multiplexów),
- ręce poruszają się na zmianę – znaczy to, że jedna łapie i rzuca piłeczki w chwilach parzystych (t_{2n}), a druga w chwilach nieparzystych (t_{2n+1}),
- wysokość, na którą wyrzucamy piłkę, określamy jako liczbę chwil, które spędza w powietrzu.



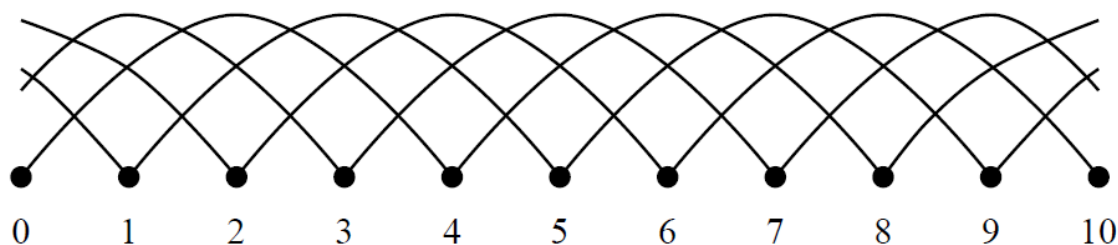
Rysunek 8 - Schemat żonglowania 441

Na diagramie (schemacie) żonglowania rysujemy tor lotu kul w kierunku pionowym względem czasu. Nieparzyste i parzyste momenty żonglowania oznaczone są odpowiednio pełnymi i pustymi kropkami, które z kolei odpowiadają rzutom lewej i prawej ręki. Zauważmy, że w rzucie parzystym (4) piłka jest rzucona do tej samej ręki (z pełnej kropki do pełnej, z pustej do pustej). Natomiast w rzucie nieparzystym (1) piłka rzucona jest do ręki przeciwnej (z pełnej kropki do pustej lub na odwrót). Diagramy żonglowania nie rysujemy w jakiejś konkretnej skali. Rzut o wysokości 4 nie jest „cztery razy wyższy” od rzutu na wysokość 1.

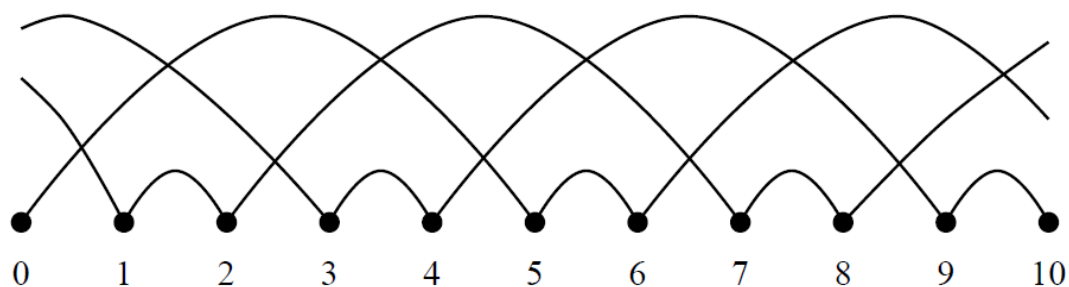
Dalej na kolejnych rysunkach pokazuję schematy żonglowania dla najbardziej popularnych żonglowań: kaskady, fontanny i prysznica.



Rysunek 9 - Kaskada 3-elementowa - (3)

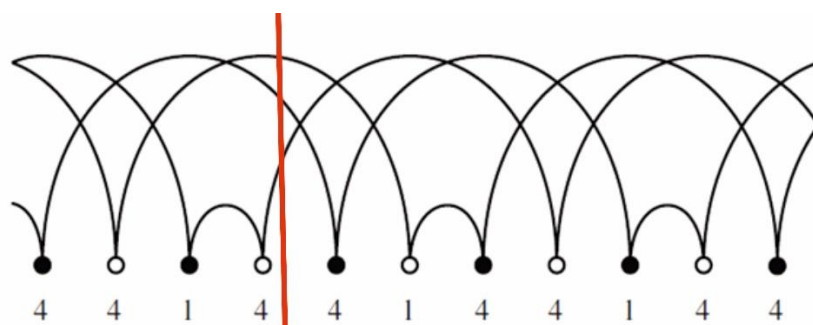


Rysunek 10 - Fontanna 4-elementowa – (4)



Rysunek 11 - Prysznic 3-elementowy – (51)

Czy z takiego diagramu możemy „odgadnąć” jaką ilością piłek żonglujemy? Tak – wystarczy policzyć, ile jest pełnych, niepowtarzających się łuków (orbit). Jest też prostszy sposób (wynikający bezpośrednio z ilości łuków) – wystarczy narysować pionową linię na diagramie w miejscu, gdzie nie przecinają się żadne łuki, i policzyć ilość punktów wspólnych.



Rysunek 12 Obliczanie ilości piłek na podstawie diagramu

Popatrzmy jeszcze raz na rysunek 8. Mamy na nim przedstawiony tor żonglowanych piłeczek w stosunku do czasu. Czas jest podzielony tutaj na chwile. Chwila, to moment, w którym łapiemy/rzucamy którąś z piłeczek. Zauważmy, że piłka wyrzucona z ręki w chwili zaznaczonej jako 4 (np. w chwili t_1) ląduje nam znowu w ręce po „czterech chwilach”. Zaś tą wyrzuconą w momencie 1 (np. t_1) chwytny po „1 chwili”. W ten sposób możemy jednoznacznie określić w jaki sposób żonglujemy. Tak więc powyższy diagram można zapisać jako ciąg liczb: ...441441441... lub znajdując najkrótszą powtarzającą się sekwencję – 441. Przy takim zapisywaniu może czasami dochodzić do nieporozumień, gdy nie będziemy ograniczać liczb do mniejszych niż dziesięć. Wtedy nie wiemy, czy 441 to 44 i 1, czy 4 i 41, czy wreszcie 4 i 4 i 1. Przyjęto zasadę, że jeżeli nie mówimy o maksymalnej liczbie, to w domyśle jest to dziewięć. Zauważmy, że diagram nie ma ani początku, ani końca. Nie interesuje nas moment startu żonglowania ani jego końca. Zakładamy, że żongler żongluje wiecznie ten sam wzór.

Matematycy-żonglerzy wprowadzili jeszcze jedno nazewnictwo – *wysokość rzutu*. Jest to nic innego jak „ilość chwil” jakie piłeczka spędza wyrzucona z ręki. Chociaż analogia od razu się narzuca (im wyżej wyrzucimy piłkę, tym dłużej będzie ona w powietrzu), to nie jest to aż tak oczywiste. Można tak żonglować, że rzuty na „wysokość” 3 będą fizycznie wyższe od tych na „wysokość” 4. Wtedy po prostu „chwile” w żonglowaniu na 3 będą trochę dłuższe. Takie ciągi liczb opisujących żonglowanie matematycy nazwali z ang. **siteswap**. Przyjrzyjmy się raz jeszcze siteswapowi 441441441. Możemy nazwać *okresem* - długość skończonej sekwencji liczb całkowitych. Siteswap nazywamy minimalnym, jeżeli jego okres jest najmniejszy z pośród okresów siteswapów określających ten sam wzór żonglowania. Na przykład siteswap 441 jest minimalny, ale już 441441 nim nie jest. Z tych definicji wynika, że okres każdego siteswapu jest wielokrotnością okresu jego siteswapu minimalnego. Ponadto wszystkie sekwencje żonglowania tego samego wzoru danego okresu są cyklicznymi permutacjami każdego z nich. Powyższy przykład ma trzy minimalne siteswapy: 441, 414, 144.

Podsumujmy.

W notacji siteswap czas jest podzielony na fragmenty ściśle od siebie oddzielone – nazywamy je chwilami lub taktami (*ang. beat*). Przyjmujemy, że piłki od razu po złapaniu są wyrzucane, czyli złapanie i wyrzucenie dzieje się w tym samym momencie, na granicy taktów. Schemat jest tworzony przez przypisywanie każdemu wyrzutowi nieujemnej liczby s – ta liczba to ilość taktów, po których piłka zostanie złapana ponownie. Nazywamy tę liczbę **wysokością rzutu**. Mimo, że można żonglować tylko skończoną ilość czasu, w siteswapie uznajemy, że żongler żonglował zawsze i będzie to kontynuował. Daje nam to ciąg $(..., s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, ...)$. Mimo, że ten ciąg będzie nieskończony, myślimy o żonglowaniu jako powtarzającym się, np. $(... 4, 4, 1, 4, 4, 1, 4, 4, 1 ...)$. Uznaje się, że można napisać każdą z tych wysokości w ciągu omijając wszystkie przecinki i nawiasy. Na przykład $(... 4, 4, 1, 4, 4, 1, 4, 4, 1 ...)$ = 441. Ten ciąg daje nam wszystkie informacje potrzebne do żonglowania tego schematu. W prawdziwym żonglowaniu uznajemy także, że każde cykliczne permutacje ciągu to nadal ten sam ciąg, np. 441 to to samo co 144 i 414. Po tym trochę przydługim wstępie (który niestety był potrzebny, aby dokładnie opisać schematy żonglowania) możemy przystąpić do pewnych definicji.

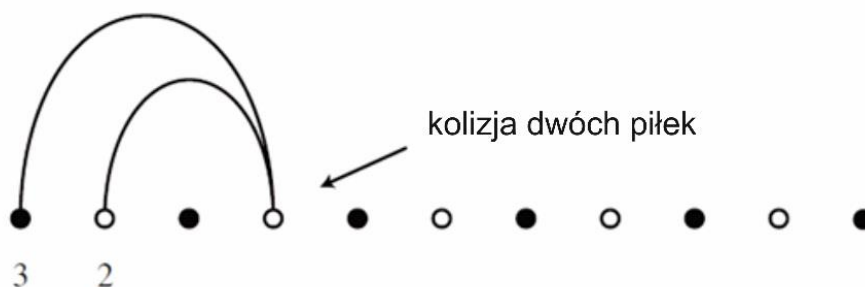
Definicja 4.1 (prosty wzór żonglowania)

Mówimy, że prostym wzorem żonglowania jest żonglowanie, które spełnia łącznie następujące właściwości:

- 1) Rzuty piłek następują w dyskretnych równomiernie rozmieszczonych momentach w czasie (chwilach, taktach). Piłka złapana zostaje wyrzucona w tej samej chwili.
- 2) Wzory są okresowe i żonglowanie odbywa się w kółko powtarzając ten sam wzór.
- 3) Co najwyżej jedna piłka jest rzucana/łapana w jednej chwili oraz jeśli dana piłka została złapana, to ta sama piłka zostanie wyrzucona w tej chwili.

Prostymi wzorami żonglowania są na przykład kaskada, prysznic, fontanna. Wzory, które spełniają warunki (1) i (2), a nie spełniają warunku (3) nazywamy multiplexami.

Nasuwa się pytanie czy każdy ciąg liczb naturalnych może być prostym wzorem żonglowania – czyli opisywać żonglowanie spełniające powyższe warunki ((1) – (3))? Zobaczmy np. ciąg 32 – czy może być opisem żonglowania. Narysujmy diagram



Rysunek 13 - 32 - kolizja dwóch piłek

Jak widać z rysunku 13 ciąg liczb 32 nie spełnia warunku (3) w tej samej chwili w jednej ręce lądują dwie piłeczki. Można udowodnić, że ogólnie ciąg $n(n-1) \dots$ nie spełnia warunku (3).

W dalszej pracy, jeżeli nie zaznaczę, że jest inaczej będę pisał o siteswapach opisujących proste wzory żonglowania, czyli takich, które spełniają warunki (1) – (3) definicji 4.1.

Jak matematycznie zdefiniować siteswap?

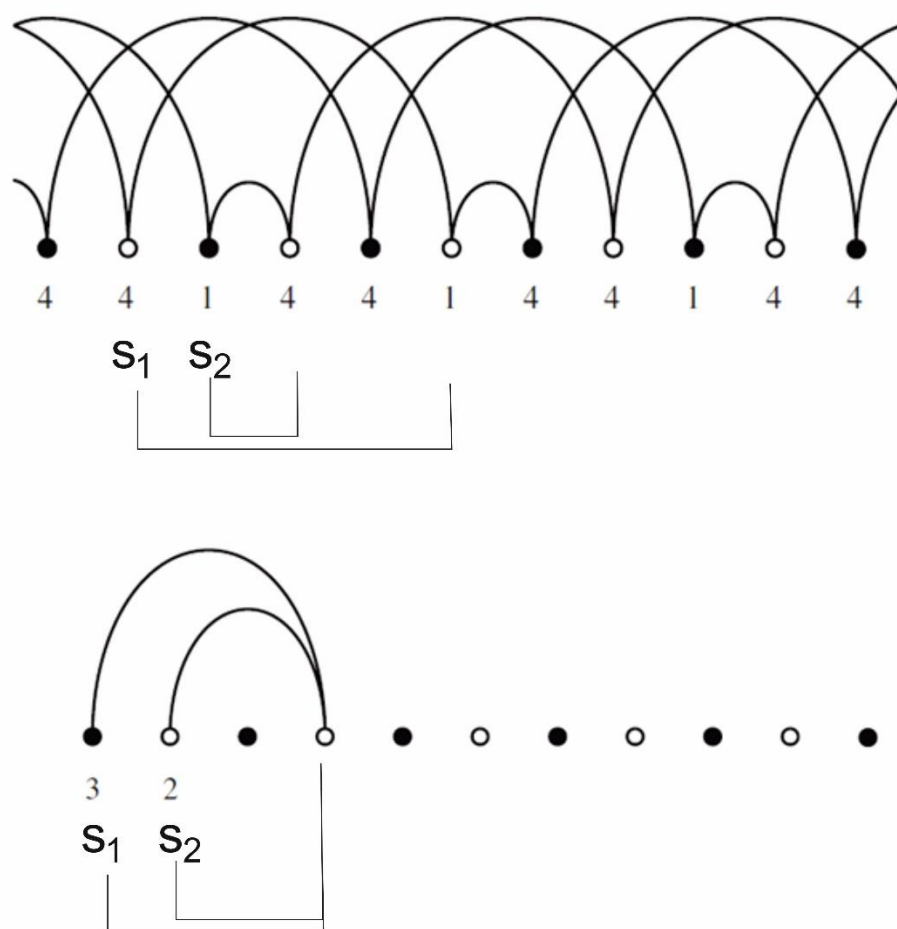
Zauważmy, że każdy siteswap to ciąg p liczb naturalnych. W opisywanych wyżej diagramach wzory żonglowania były tylko wtedy prawidłowe, gdy w tej samej chwili dwie piłki nie lądowały w tej samej ręce. Jeżeli jako p oznaczmy minimalny okres wzoru żonglowania to możemy określić definicję siteswapu:

Definicja 4.2 (siteswap)

Siteswapem nazywamy skończony ciąg liczb naturalnych $(s_i)_{i=1}^p \in \mathbb{N}^p$ który spełnia poniższy warunek

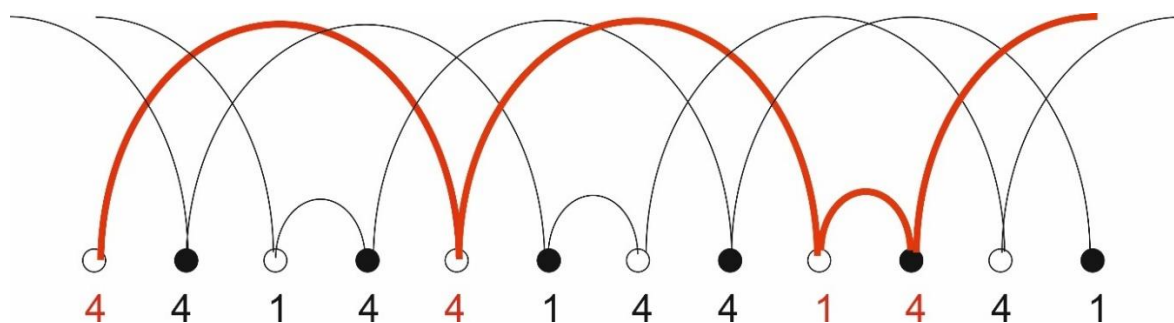
$$\forall j, k \in \{1 \dots p\} (j \neq k \Rightarrow (s_j + j) \pmod{p} \neq (s_k + k) \pmod{p})$$

Zbiór wszystkich siteswapów będziemy oznaczać jako $\mathbb{S}$.



Rysunek 14 - Diagramy opisujące definicje siteswap
 Górny diagram spełnia warunki (żadne dwie piłki nie lądują w tej samej chwili w ręce)
 Dolny diagram nie spełnia warunków (kolizja piłek)

Matematycy zdefiniowali także tzw. **orbitę** w danym diagramie żonglowania



Rysunek 15 - Definicja orbity w diagramie

Otóż orbitą w diagramie nazywamy „tor” jednej piłki w czasie żonglowania. Do orbity należą takty zaznaczone na rysunku 15 kolorem czerwonym. Orbita to tor jednej piłki, a więc ilość orbit to ilość piłek. Do tego samego wniosku dojdziemy porównując rysunek 12 i rysunek 15.

Wniosek 4.1 siteswap i permutacje zbioru liczb całkowitych $\mathbb{Z}$

Jeżeli dokładnie przyjrzymy się notacji siteswap, to możemy zauważyć, że ma ona dużo wspólnego z kombinatoryką. Otóż siteswap $s = (s_1, s_2, s_3, \dots, s_p)$ przekształca zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ w zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$. W jaki sposób? Otóż jeżeli weźmiemy dowolne $i \in \mathbb{Z}$ to poprzez dodanie s_i (a właściwie $s_{i \bmod p}$) do i otrzymujemy nową liczbę całkowitą. Zgodnie z definicją 4.1 (dokładnie jej 3 punktem) oraz definicją siteswapu 4.2 *nowe liczby całkowite* nie będą się powtarzać, a więc siteswap „permutuje” nam zbiór liczb całkowitych.

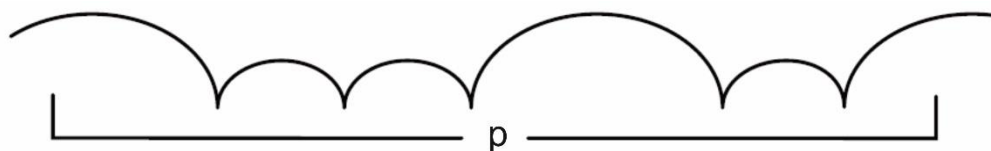
Pierwszym twierdzeniem, które spotyka się w pracach o siteswapach ([1] s. 14-17, [2] s. 7) jest to, że suma rzutów w siteswapie (minimalnym) podzielona przez okres jest równa ilości piłek użytych do żonglowania.

Twierdzenie 4.1 (o średniej)

Niech $s = (s_1, s_2, s_3, \dots, s_p)$ będzie prostym siteswapem o okresie p a $ball(s)$ określa ilość piłek użytych do żonglowania siteswapu s , wtedy

$$ball(s) = \frac{\sum_{i=1}^p s_i}{p}.$$

Zarówno w pracy [1] jak i [2] są obszerne i bardzo skomplikowane dowody tego twierdzenia. Natomiast w tej pracy spróbuję to wytłumaczyć opisowo - bardziej przystępnie. Zauważmy, że wysokość to ilość taktów spędzonych przez piłkę w powietrzu. Okres siteswapu (p) to ilość taktów danego siteswapu. Tak więc suma wysokości jednej orbity O zawartej w tym okresie siteswapu będzie równa p .



Rysunek 16 - Przykładowa orbita

Czyli $\sum_{i \in O} s_i = p$. Jeżeli w danym siteswapie jest d orbit, to $\sum_{i=1}^p s_i = d * p$ czyli $d = \frac{\sum_{i=1}^p s_i}{p}$, ale jak już wiemy ilość orbit to ilość piłek, czyli $balls(s) = \frac{\sum_{i=1}^p s_i}{p}$ co należało dowieść.

Zbiór wszystkich siteswapów $\mathbb{S}$ można zawęzić np. do takich które mają określoną długość, albo określoną ilość piłek (czyli średnią), bądź do takich, których wysokość jest ograniczona. Poniżej podaję definicje takich siteswapów.

Definicja 4.3 (siteswap o określonej długości)

Dla każdego **ustalonego** $p \in \mathbb{N}$ siteswap $s_1, s_2, \dots, s_p$ nazywamy siteswapem o określonej długości. Zbiór takich siteswapów oznaczamy $\mathbb{S}_p$.

Definicja 4.4 (siteswap o określonej średniej)

Siteswap, którego średnia wszystkich wysokości równa się b , będziemy nazywać siteswapem o określonej średniej b .

$$b = \frac{\sum_{i=1}^p s_i}{p}$$

Zbiór siteswapów, którego średnia arytmetyczna sumy jego wyrazów jest równa pewnej liczbie naturalnej b oznaczamy jako ${}_b\mathbb{S}$.

Definicja 4.5 (siteswap ograniczony)

Siteswap $s_1, s_2, \dots, s_p$ będziemy nazywać siteswapem ograniczonym jeżeli istnieje takie m , że dla każdego $i = 1 \dots p$ $s_i \leq m$.

$$\exists m \in \mathbb{N} : \forall i \in \{1 \dots p\} s_i \leq m$$

Zbiór takich siteswapów oznaczamy jako $\mathbb{S}^m$.

Możemy także określać siteswapy, które będą spełniać dwa lub nawet trzy powyższe warunki. Zbiory takich siteswapów będziemy oznaczać odpowiednio jako $\mathbb{S}_p^m$ – siteswap o określonej długości i i ograniczony, ${}_b\mathbb{S}_p$ – o określonej długości i i średniej, ${}_b\mathbb{S}^m$ – ograniczony i o określonej średniej oraz ${}_b\mathbb{S}_p^m$ – siteswap ograniczony o określonej długości i i średniej. Wszystkie te zbiory oczywiście zawierają się w zbiorze wszystkich siteswapów $\mathbb{S}$. Ponadto występują odpowiednie relacje zawierania się pomiędzy tymi podzbiorami (wynika to jasno z definicji):

Wniosek 4.2 Zawieranie się podzbiorów siteswapów

$$\begin{array}{lll} {}_b\mathbb{S}_p^m \subset \mathbb{S}_p^m & {}_b\mathbb{S}_p^m \subset {}_b\mathbb{S}^m & {}_b\mathbb{S}_p^m \subset {}_b\mathbb{S}_p \\ {}_b\mathbb{S}_p \subset {}_b\mathbb{S} & {}_b\mathbb{S}^m \subset {}_b\mathbb{S} & \mathbb{S}_p^m \subset \mathbb{S}^m \\ \mathbb{S}_p^m \subset \mathbb{S}_p & {}_b\mathbb{S}^m \subset \mathbb{S}^m & {}_b\mathbb{S}_p \subset \mathbb{S}_p \end{array}$$

Oprócz relacji zawierania można także określić zbiór wszystkich siteswapów $\mathbb{S}$ jako sumę podzbiorów – jak niżej:

Wniosek 4.3 Zbiór siteswapów jako suma podzbiorów siteswapów ograniczonych

$$\mathbb{S} = \bigcup_{b \in \mathbb{N}} {}_b\mathbb{S} \qquad \mathbb{S} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \mathbb{S}_p$$

5. Tworzenie nowych siteswapów na podstawie już istniejących.

Czy na podstawie już istniejących siteswapów możemy w jakiś sposób stworzyć nowe poprawne siteswapy? Oczywiście, że tak. Jest na to kilka sposobów. Jednym z najprostszych jest tak zwana operacja zamiany. Jeżeli mamy poprawny siteswap to zamieniając „miejsca lądowania” dwóch rzutów również otrzymamy poprawny siteswap.

Definicja 5.1 operacja zamiany

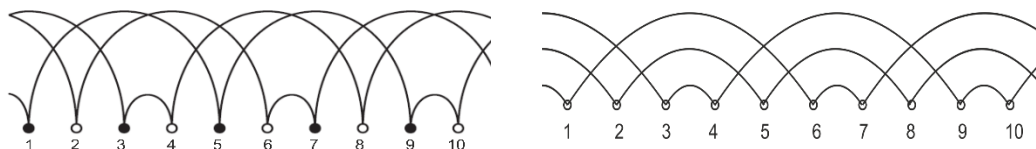
Niech $s = (s_1 s_2 \dots s_p)$ będzie ciągiem liczb naturalnych (z zerem) $s_i \in \mathbb{N}_0$, wtedy operacja zamiany tworzy nowy ciąg $S^{j,k}$ w ten sposób, że zamieniamy miejscami s_j i s_k oraz $j < k \leq p$ według poniższego wzoru

$$s_j^{j,k} = s_k + k - j$$

$$s_k^{j,k} = s_j + j - k$$

$$s_i^{j,k} = s_i \text{ dla } i \neq j, k$$

Poprawny siteswap poddany operacji zamiany tworzy nowy poprawny siteswap (dowód można znaleźć w [2] s. 9 oraz [1] s. 19). Weźmy na przykład siteswap 441 z jego diagramem i zamieńmy miejsca lądowania w taktach 1 i 2:



Rysunek 17 - Zamiana siteswapu 441 na 531

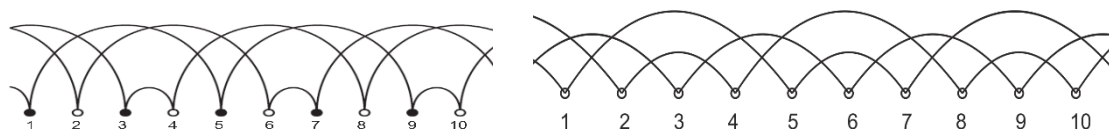
W tym przypadku mamy $j = 1, k = 2$:

$$s_1^{1,2} = s_2 + 2 - 1 = 4 + 2 - 1 = 5 \quad s_2^{1,2} = s_1 + 1 - 2 = 4 + 1 - 2 = 3$$

$$s_i^{1,2} = s_i \text{ dla } i \neq 1, 2, \text{ czyli np. dla } i = 3 \text{ mamy } s_3 = 1$$

czyli powstaje nam nowy siteswap 531.

Spróbujmy rozważyć zamianę w innych taktach 2 i 3:



Rysunek 18 - Zamiana siteswapu 441 na 234

$$s_2^{2,3} = s_3 + 3 - 2 = 1 + 1 = 2$$

$$s_3^{2,3} = s_2 + 2 - 3 = 4 - 1 = 3$$

$s_i^{2,3} = s_i$ dla $i \neq 2,3$ czyli np. dla $i = 1$ mamy $s_1 = 4$ czyli powstaje nam nowy siteswap 423 (czyli 234). Pozostaje nam już tylko jedna opcja dla $j = 1$ i $k = 3$:

$$s_1^{1,3} = s_3 + 3 - 1 = 1 + 2 = 3 \quad s_3^{1,3} = s_1 + 1 - 3 = 4 - 2 = 2$$

$s_i^{1,3} = s_i$ dla $i \neq 1,3$ czyli np. dla $i = 2$ mamy $s_2 = 4$ czyli powstaje nam nowy siteswap 234.

Możemy także utworzyć nowy siteswap na podstawie już istniejącego w ten sposób, że ostatni wyraz w ciągu przenosimy na miejsce pierwsze. Taka operacja nazywana jest przesunięciem cyklicznym.

Definicja 5.2 przesunięcie cykliczne

Przesunięciem cyklicznym O ciągu $s = s_1 s_2 \dots s_{p-1} s_p$ o długości co najmniej dwa i wyrazach naturalnych nazywamy operację tworzącą nowy ciąg $O(s) = s_p s_1 s_2 \dots s_{p-1}$.

Weźmy przykładowy siteswap 441 wtedy przesunięcia cykliczne będą wyglądały następująco:

$$441 \rightarrow 144 \rightarrow 414$$

Poprawny siteswap poddany przesunięciu cyklicznemu tworzy nowy poprawny siteswap (wynika to bezpośrednio z definicji siteswapu).

Wprost z definicji przesunięcia cyklicznego widać, że istnieje operacja odwrotna. Jeżeli $s = s_1 s_2 \dots s_{p-1} s_p$ to $O^{-1}(s) = s_2 \dots s_{p-1} s_p s_1$.

Wniosek 5.1 Operacje zamiany i przesunięcie cykliczne tworzą poprawne siteswapy

Zarówno operacja zamiany, jak i przesunięcie cykliczne z poprawnego siteswapu tworzą nowy siteswap z tą samą średnią – czyli z taką samą liczbą piątek (dowód można znaleźć w [2] s. 9-10 oraz [1] s. 19-20).

Poznaliśmy już dwa sposoby generowania nowych siteswapów bez zmiany liczby piątek użytych do żonglowania (bez zmiany średniej). A czy istnieją metody na generowanie nowych wzorów żonglowania na podstawie już istniejących ze zmianą średniej? Otóż tak. Są one jeszcze prostsze od przedstawionych powyżej. Pierwszy z nich to dodanie do każdego wyrazu ciągu żonglerskiego tej samej liczby całkowitej c (oczywiście o ile po dodaniu c któryś z nowych wyrazów nie jest mniejszy od zera).

Wniosek 5.2 Dodawanie stałej do siteswapu

Niech $s = (s_1 s_2 \dots s_p)$ jest poprawnym siteswapem, $c \in \mathbb{Z}$ takie, że $\forall i \in \{1..p\} s_i + c \geq 0$ wtedy $s' = (s_1 + c \ s_2 + c \dots s_p + c)$ jest również poprawnym siteswapem. Co więcej jeżeli $b = \frac{\sum_{i=1}^p s_i}{p}$ (b jest średnią arytmetyczną ciągu s) to średnią arytmetyczną ciągu s' jest $b + c$. Wynika to w prosty sposób ze sposobu wyliczania średniej.

Drugi sposób to dodanie (bądź odjęcie) do dowolnego wyrazu ciągu żonglerskiego liczby określającej długość tego ciągu. Podobnie jak poprzednim wypadku wykluczamy ciągi, w których pojawiają się liczby ujemne.

Wniosek 5.3 Dodawanie/odejmowanie długości okresu do wybranej wysokości

Niech $s = (s_1 s_2 \dots s_p)$ jest poprawnym siteswapem, wtedy $s' = (s_1 \dots (s_i + p) \dots s_p) \ \forall i \in \{1..p\}$ jest poprawnym siteswapem, a także $s' = (s_1 \dots (s_i - p) \dots s_p) \ \forall i \in \{1..p\}$ o ile $s_i - p$ nie jest mniejsze od zera.

Przedstawię teraz tak zwany algorytm spłaszczający (za [1] s. 20), [2] s. 10).

Na początek przypomnijmy sobie co to jest ciąg stały. Otóż ciąg $s = s_1 s_2 \dots s_p$ nazywamy ciągiem stałym, kiedy $\exists a \in \mathbb{N}_0 \forall i \in \{1..p\} s_i = a$ innymi słowy każdy wyraz ciągu jest taki sam $s = aa..a$

Zobaczmy także jak uproszą się nam wzory z definicji 5.1 (operacja zamiany) jeżeli będziemy zamieniać wyrazy na pierwszej i drugiej pozycji ($j = 1, k=2$)

$$s_j^{j,k} = s_k + k - j \quad \Rightarrow \quad s_1^{1,2} = s_2 + 2 - 1 \quad \Rightarrow \quad s_1^{1,2} = s_2 + 1$$

$$s_k^{j,k} = s_j + j - k \quad \Rightarrow \quad s_2^{1,2} = s_1 + 1 - 2 \quad \Rightarrow \quad s_2^{1,2} = s_1 - 1$$

Algorytm spłaszczający

Weźmy ciąg $s = s_1 s_2 \dots s_n$ gdzie $s_i \in \mathbb{N}_0$ wtedy

1. Jeżeli ciąg s jest ciągiem stałym zakończ działanie. **Ciąg wejściowy był siteswapem.** W przeciwnym wypadku idź do punktu 2.
2. Weźmy największy wyraz ciągu. Niech jego wartość będzie równa m . Wykonuj przesunięcie cykliczne tak długo, aż $s_1 = m$ oraz $s_2 < m$. Jeżeli $s_1 - s_2 > 1$ przejdź do punktu 3, w przeciwnym razie **ciąg wejściowy nie był siteswapem.**
3. Wykonaj operację zamiany dla pierwszych wyrazów ciągu i przejdź do punktu pierwszego

Co robi taki algorytm? Otóż, za pomocą algorytmu spłaszczającego możemy sprawdzić, czy dany ciąg liczb całkowitych nieujemnych jest poprawnym siteswapem.

Zobaczmy to na przykładach. Weźmy poprawny siteswap $s = 441$. Czyli na początek kolejne wyrazy ciągu wynoszą $s_1 = 4, s_2 = 4, s_3 = 1$

Krok 1 s nie jest ciągiem stałym więc przechodzimy do punktu 2 (441).

Krok 2 s już ma na pierwszym miejscu największy wyraz, ale nie spełnia drugiego warunku ($s_2 < m$) więc wykonujemy przesunięcie cykliczne i powstaje nam następujący ciąg (144).

Krok 3 Wykonujemy następne przesunięcie cykliczne i powstaje nam ciąg spełniający warunki punktu drugiego (414).

Krok 4 Dla ciągu $s=414$ wykonujemy operację zamiany dla pierwszych dwóch wyrazów. $s_1^{1,2} = s_2 + 1 = 1 + 1 = 2$ oraz $s_2^{1,2} = s_1 - 1 = 4 - 1 = 3$. Pozostałe wyrazy ciągu pozostają bez zmian, powstaje nam więc nowy ciąg, z którym przechodzimy do punktu pierwszego (234).

Krok 5 Ciąg wejściowy nie jest ciągiem stałym więc przechodzimy do punktu 2 (234).

Krok 6 Ciąg wejściowy nie ma na pierwszym miejscu wyrazu największego, więc wykonujemy przesunięcie cykliczne. Wynikowy ciąg spełnia warunku punktu 2, a więc przechodzimy do punktu 3 z ciągiem (423).

Krok 7 Dla ciągu 423 wykonujemy operację zamiany dla pierwszych dwóch wyrazów ciągu $s_1^{1,2} = s_2 + 1 = 2 + 1 = 3$ oraz $s_2^{1,2} = s_1 - 1 = 4 - 1 = 3$. Pozostałe wyrazy ciągu pozostają bez zmian, więc przechodzimy do punktu pierwszego (333).

Krok 8 Ciąg wejściowy (333) jest ciągiem stałym, a więc kończymy algorytm z w wynikiem **pierwotny ciąg był poprawnym siteswapem.**

$$441 \xrightarrow{\text{podwójne przesunięcie cykliczne}} 414 \xrightarrow{\text{operacja zamiany}} 234 \xrightarrow{\text{przesunięcie cykliczne}} 423 \xrightarrow{\text{operacja zamiany}} 333$$

Zastosujmy teraz algorytm spłaszczający do ciągu, który jak wiemy (rysunek 13) nie jest poprawnym wzorem żonglowania, czyli do ciągu $s = 321$.

Krok 1 s nie jest ciągiem stałym więc przechodzimy do punktu 2 (321)

Krok 2 s ma na pierwszym miejscu największy wyraz oraz spełniony jest drugi warunek ($s_2 < m$).
Więc sprawdzamy różnicę $s_1 - s_2 = 1$. Więc **wejściowy ciąg nie jest poprawnym siteswapem.**

W ten sposób można tworzyć programy komputerowe, które sprawdzają, czy dany ciąg liczb jest poprawnym siteswapem, czy też nie.

6. Liczenie siteswapów.

Jeżeli mamy już określone zbiory siteswapów (definicje 4.2 do 4.5) to narzuca się pytanie o moc tych zbiorów. Inaczej mówiąc jaka jest liczba możliwych siteswapów (tych ogólnych – definicji 4.2 i tych zawężonych – definicje 4.3, 4.4, 4.5). Jeżeli nie będziemy ograniczać siteswapów, to oczywiście ilość wzorów żonglowań będzie nieskończona. Ale jaka to będzie nieskończoność? Musimy zauważyć, że ciągle mówimy o ciągach/zbiorach liczb naturalnych/całkowitych. Więc ilość siteswapów będzie z definicji przeliczalna. Tak więc mamy do czynienia z nieskończonością typu $\aleph_0$.

Weźmy teraz nieskończony (ale przeliczalny) ciąg $b, bb, bbb, bbbb, \dots$ (b jest stałe więc możemy znaleźć takie m , że $b < m$ (np. $m = b+1$). Taki ciąg należy oczywiście do zbioru siteswapów ograniczonych ${}_b\mathbb{S}^m$. A więc moc zbioru ${}_b\mathbb{S}^m$ to $\aleph_0$. Inaczej $|{}_b\mathbb{S}^m| = \aleph_0$.

Przyjrzyjmy się teraz innemu nieskończonemu ciągowi (także przeliczalnemu):

$$\begin{array}{cccc} 11 \dots 1, & 22 \dots 2, & 33 \dots 3, & \dots \\ |_{\text{p-razy}}| & |_{\text{p-razy}}| & |_{\text{p-razy}}| & \end{array}$$

Wprost z definicji należy on do zbioru $\mathbb{S}_p$. A więc także $|\mathbb{S}_p| = \aleph_0$.

Korzystając z relacji zawierania określonych we wniosku 4.1 oraz z tego, że $|\mathbb{S}| = \aleph_0$ możemy określić moc pewnych zbiorów siteswapów:

Wniosek 6.1 Moc wybranych zbiorów siteswapów

$$|\mathbb{S}| = |\mathbb{S}^m| = |{}_b\mathbb{S}| = |{}_b\mathbb{S}^m| = |\mathbb{S}_p| = \aleph_0.$$

Pozostało nam jeszcze oszacować moc zbiorów ${}_b\mathbb{S}_p$, $\mathbb{S}_p^m$ oraz ${}_b\mathbb{S}_p^m$.

W pracy [6] autor podaje oszacowania:

$$|{}_b\mathbb{S}_p^m| \leq |\mathbb{S}_p^m| \leq mp \leq \aleph_0$$

Nie będę tutaj tego udowadniał, gdyż nie o liczenie takich żonglowań mi chodzi. Większość kuglarzy-matematyków bardziej interesuje, ile jest możliwych wszystkich b -piłkowych siteswapów o okresie p (${}_b\mathbb{S}_p$).

Matematycy (np. [1], [2]) podają dokładną liczbę:

$$(b+1)^p - b^p$$

Przeglądając dowody (bardzo skomplikowane), stwierdziłem, że owszem jest on poprawny, ale ... nie o to chodzi żonglerom. Wzór ten uwzględnia siteswapy będące permutacjami cyklicznymi innych wzorów żonglowania (np. 441 i 414, 144). Siteswapy będące permutacjami cyklicznymi to właściwie to samo żonglowanie, tylko zaczęte w innym momencie. Dlatego postanowiłem sam obliczyć interesującą mnie liczbę i wyprowadzić wzór na liczbę siteswapów typu ${}_b\mathbb{S}_p$, który uwzględniałby powtórzenia związane z permutacją cykliczną.

Oznaczmy $\mathbf{s}$ jako siteswap $(s_1, s_2, \dots, s_p)$. Wtedy $\mathbf{s} \bmod p = (s_1 \bmod p, s_2 \bmod p, \dots, s_p \bmod p)$. Na przykład 441 to siteswap o okresie $p=3$ więc

$$441 \bmod 3 = (4 \bmod 3, 4 \bmod 3, 1 \bmod 3) = 111.$$

Zbiór wszystkich siteswapów które liczę oznaczamy jak wyżej ${}_b\mathbb{S}_p$, a zbiór siteswapów powstałych przez operację mod (jak wyżej) oznaczmy jako ${}_b\mathbb{S}_p \bmod p$.

Na początek zauważmy dwie rzeczy:

Definicja 6.1 siteswapy podstawowe i multi-p siteswapy (nazewnictwo własne)

1. Jeżeli s jest poprawnym siteswapem wtedy $s \bmod p$ będzie poprawnym siteswapem. wynika to bezpośrednio z definicji siteswapu (4.2). Można uogólnić powyższy wniosek i zapisać: ${}_b\mathbb{S}_p \bmod p \subset {}_b\mathbb{S}_p$. Wzory żonglowania powstałe poprzez operację mod będę nazywał **siteswapami podstawowymi**.
2. Jeżeli mamy siteswap $s = (s_1, s_2, \dots, s_p)$ (o okresie p), który tworzą tylko „0” lub liczby niezerowe, które są wielokrotnościami okresu (p) to jest on poprawnym wzorem żonglowania. Wynika to także z definicji siteswapa. Jeżeli na dowolnej pozycji mamy „0” znaczy to że mamy pustą rękę (nic nie wnosi do wzoru żonglowania). Natomiast liczba niezerowa (wielokrotność p) – zawsze trafia w to samo miejsce (do siebie). Takie wzory żonglowania będę nazywał **multi-p siteswapami**.

Zauważmy, że każdy poprawny wzór żonglowania możemy podzielić na siteswap podstawowy oraz odpowiadający mu multi-p siteswap. Jak to się robi? Pokażę to na przykładach:

441: $p = 3$ $441 \bmod 3 = 111$ – siteswap podstawowy

$441 - 111 = 330$ – multi-p siteswap

531: $p = 3$ $531 \bmod 3 = 201$

$531 - 201 = 330$

12345: $p = 5$ $12345 \bmod 5 = 12340$

$12345 - 12340 = 00005$

Dlaczego siteswap powstały po „odejmowaniu” w drugiej linii jest poprawny? Otóż, wynika to po pierwsze z definicji kongruencji: $a \equiv b \pmod{p}$ wtedy różnica $a - b$ jest podzielna przez p tzn.: $a - b = kp$ (gdzie k jest całkowite), a więc wynikowy siteswap zawiera tylko „0” (gdy $a = b$) lub wielokrotności p (w innych przypadkach). I po drugie (Definicja 6.1.2) takie wzory żonglowania są poprawne.

Jeżeli siteswap podzielimy (jak wyżej) na dwie składowe (siteswap podstawowy i odpowiadający mu multi-p siteswap) to suma pitek w obu składowych jest równa liczbie pitek w siteswapie wejściowym. Wynika to bezpośrednio z twierdzenia o średniej (twierdzenie 4.1).

Więc możemy podzielić obliczenia na dwie części. Pierwsza to policzenie ilości siteswapów podstawowych. Natomiast druga to policzenie multi-p siteswapów.

Brzmi to niby prosto, ale trzeba zauważyć kilka problemów:

- P1** Siteswapy mają permutacje cykliczne, które w obliczeniach trzeba będzie wykluczyć (np. 441 i 414).
- P2** Nie wszystkie siteswapy o takiej samej długości mają tyle samo permutacji cyklicznych (np. 441 i 333).
- P3** Im większa liczba pitek w części pierwszej tym mniejsza musi być w części drugiej. Czyli trzeba tak rozdzielić ilość pitek pomiędzy te dwa etapy, aby ich suma była równa b .
- P4** W pierwszej części maksymalna ilość pitek to $p - 1$, gdyż przy ilości pitek p nie ma żadnego siteswapu podstawowego (wynika to z operacji kongruencji).

Z tymi kłopotami będziemy walczyć później.

Oznaczmy liczbę siteswapów podstawowych (Definicja 6.1.1) jako $f_1(b, p)$, a ilość multi- p siteswapów (Definicja 6.1.2) jako $f_2(b, p)$. Gdzie b to liczba piłek w siteswapie wejściowym. Po obliczeniu f_1 oraz f_2 ogólny wzór na ilość wszystkich siteswapów będzie wyglądał jak poniżej:

$$\sum_{k=0}^{p-1} f_1(k, p) * f_2(b - k, p)$$

Dlaczego mnożenie? Otóż dla każdego elementu z części pierwszej możemy „dodać” każdy element z części drugiej i na odwrót. I za każdym razem wychodzi nam inny poprawny siteswap.

Więc zacznijmy liczenie.

Łatwiejszą z tych dwóch części jest zdecydowanie część druga (Definicja 6.1.2), więc nią zajmę się wcześniej. W niej nie będę patrzył na permutacje cykliczne. Dlaczego? Otóż po „dodaniu” do dowolnego siteswapu z części pierwszej takie permutacje będą tworzyły inne wzory żonglowania (np. $201 + 330 = 531$, $201 + 303 = 504$, $201 + 033 = 234$).

Korzystając z Wniosku 5.3 oraz twierdzenia o średniej (twierdzenie 4.1) można zauważyć, że dodając p w jakieś miejsce w siteswapie dodaje do siteswapu jedną piłkę, ale nie zmienia jego funkcjonalności. Oznacza to, że zaczynając od siteswapu: $000 \dots 000$, gdzie 0 występuje p razy, możemy skonstruować wszystkie możliwe multi- p siteswapy dla danego b i p .

Wprowadźmy jeszcze jedną notację, która uprości nam liczenie. Multi- p siteswapy (gdzie występują tylko „zera” i wielokrotności p) będę zapisywał w następujący sposób: zera pozostają bez zmian ($0 \rightarrow 0$) natomiast wielokrotności p będą zapisywane jako krotność ($np \rightarrow n$). Weźmy na przykład siteswap 360 , wtedy $p = 3$. Po zastosowaniu nowej notacji otrzymujemy nowy siteswap 120 ($360 = 1p \ 2p \ 0 = 120$). Inne przykłady to:

$$7777777 \rightarrow 1111111$$

$$900 \rightarrow 300$$

$$(np) \ 00 \dots 00 \rightarrow n \ 00 \dots 00$$

W tym nowym systemie suma liczb zawsze jest równa ilości piłek, co bezpośrednio wynika z teorii średnich (twierdzenie 4.1). Teraz nasze pytanie dla tej części przeradza się w coś, co przypomina kombinatorykę. Zastanawiałem się nad tym trochę, ale nie mogłem dalej pójść tym tropem. Nic mi nie przychodziło do głowy. Zacząłem więc patrzeć na przykładowe wartości.

Zauważyłem, że gdy $p = 1$ to $f_2(b, p) = f_2(b, 1) = 1$ (jest to właściwie oczywiste). Później próbowałem patrzeć na $p = 2$. Wypiszmy wszystkie możliwe siteswapy z części numer dwa (po lewej) oraz ich odpowiedniki w notacji opisanej wyżej (po prawej). W kolejnych liniach odpowiednio dla ilości piłek $b = 1, 2, 3, 4$

02,20	01, 10
04,22,40	02,11,20
06,24,42,60	03,12,21,30
08,26,44,62,80	04,13,22,31,40

Zauważmy, że dla $b = 1$ mamy dwie możliwości, dla $b = 2$ mamy trzy itd. Wygląda więc to tak jakby wartość f_2 dla $p = 2$ (czyli ilość siteswapów w każdej linii) była zawsze równa $b + 1$. Można to zrozumieć w ten sposób, że pierwsze miejsce od lewej może przyjmować jakiegokolwiek

wartości od 0 do b włącznie. Natomiast drugie miejsce musi przyjąć zawsze taką wartość, aby suma cyfr zgadzała się z ilością pitek (jak zauważyliśmy wcześniej suma cyfr to ilość pitek).

Przejdźmy więc do $p = 3$. Tutaj wypiszę już tylko siteswapy w nowej notacji

001, 010, 100

002, 011, 020, 101, 110, 200

003, 012, 021, 030, 102, 111, 120, 201, 210, 300

004, 013, 022, 031, 040, 103, 112, 121, 130, 202, 211, 220, 301, 310, 400

Od razu zauważyłem, że wynik f_2 dla $p = 3$ to liczby trójkątne. Ale dlaczego? Można to tłumaczyć w podobny sposób jak robiliśmy to dla $p = 2$. Pierwsza cyfra przyjmuje poszczególne wartości od 0 do b , dwie pozostałe przyjmują takie wartości, aby ich suma się zgadzała z ilością pitek, ale tym razem jest na to więcej niż jedna możliwość. Jest ich właściwie tyle, ile policzyliśmy w poprzednim przykładzie z $p = 2$. To znaczy, że $f_2(b, 3) = \sum_{k=0}^b f_2(b-k, 2)$, gdzie k to cyfra z pierwszego miejsca.

Ale dlaczego akurat liczby trójkątne? Charakteryzują się one tym, że są sumą kolejnych liczb naturalnych zaczynając od 1. Nasza funkcja $f_2(b, 2)$ zawsze oddaje liczby naturalne i gdy zmieniamy wejściowe b wynik zmienia się o 1. Najmniejsza wartość funkcji $f_2(b, 2)$ jest wtedy, gdy $b = 0$, wtedy wynik to 1. Funkcja $f_2(b, 3)$ jest sumą kolejnych $f_2(b, 2)$, więc jest sumą kolejnych liczb naturalnych, więc jest liczbą trójkątną.

Dalej mamy $p = 4$. Podobnie jak poprzednio będziemy zmieniać pierwszą cyfrę i dodawać kolejne kombinacje dla $p = 3$. Czyli:

0001, 0010, 0100, 1000

0002, 0011, 0020, 0101, 0110, 0200, 1001, 1010, 1100, 2000

0003, 0012, 0021, 0030, 0102, 0111, 0120, 0201, 0210, 0300, 1002, 1011, 1020, 1101, 1110, 1200, 2001, 2010, 2100, 3000

Wypisywanie wszystkich robi się coraz trudniejsze, ale widać już zależności.

Ale jak nazywają się liczby, które nam teraz wyszły? Są to liczby piramidalne trójkątne (czworościennie). Definiuje się je jako sumę liczb trójkątnych.

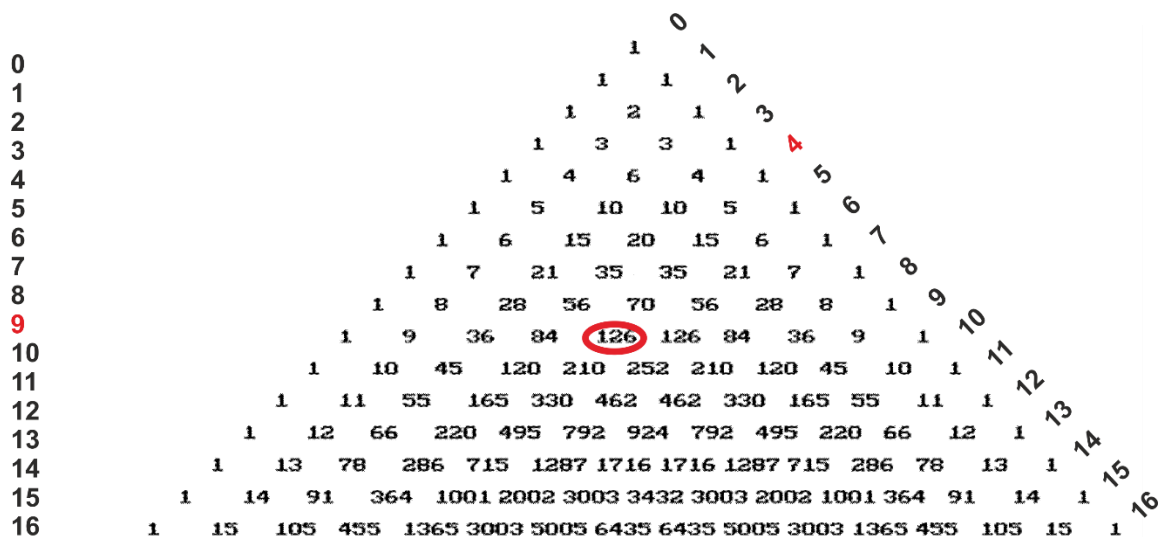
Jeżeli będziemy dalej postępować w taki sposób to wyjdą nam wszystkie wartości niezależnie od p . Można je obliczyć używając wzoru:

$$f_2(b, p) = \sum_{k=0}^b f_2(b-k, p-1)$$

Powstaje jednak pewien problem: jeżeli chcemy przedstawić ten wzór nie używając formy rekurencyjnej. Musimy używać bardzo wielu sum (sigma). Będzie ich wtedy dokładnie $p-2$. Na szczęście możemy pójść dalej tropem liczb trójkątnych. Sumą kolejnych liczb czworościennych są liczby pentatopoczne (od ang. *pentatope numbers*). Sumą kolejnych liczb pentatopocznych są liczby 5-simplex'owe. Dalej są liczby 6-simplex'owe, 7-simplex'owe, 8-simplex'owe, 9-simplex'owe, itd. Może nadal wydawać się, że będzie kłopot z policzeniem tych liczb simplexowych. Stwórzmy tabelę liczb n -simplex'owych, gdzie w poszczególnych kolumnach będziemy zapisywać wartość k -tej n -simplex'owej liczby (dla $k = 0..10$). Wiersze będą określały o jakich liczbach mówimy (czyli określały liczbę n zaczynając od zera).

Lp. (od zera)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Liczba jeden (0-simplex)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Liczby naturalne (1-simplex)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Liczby trójkątne (2-simplex)	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
Liczby czworokątne (3-simplex)	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286
Liczby pentatopczne (4-simplex)	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001
5-simplex	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003
6-simplex	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008
7-simplex	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448
8-simplex	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758
9-simplex	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378
10-simplex	1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756

Jest to trójkąt Pascala! Po uporządkowaniu tych liczb dopiero widzimy jakieś regularności. Mimo tego nadal mamy kłopot. Jak policzyć daną liczbę w trójkącie Pascala? Dodawanie od początku nie wchodzi w grę. Zajęto by to zbyt dużo czasu i trudno byłoby wymyślić na podstawie tego wzór. Ale przecież jest to trójkąt Pascala! Jest on pełen różnego rodzaju zależności! I jedna z nich przychodzi nam z pomocą. Otóż, gdy ponumerujemy wiersze i przekątne (zaczynając od zera) to liczba w wierszu n i przekątnej k jest równa: $\binom{n}{k}$.



Rysunek 19 - Trójkąt Pascala i obliczanie (n,k) -tej pozycji

Weźmy przykład z rysunku 19. Wyraz na $(9,4)$ pozycji to 126. Obliczmy teraz $\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$. Oczywiście zgadza się.

Teraz tylko zostało policzyć, które miejsce w trójkącie Pascala jest nam faktycznie potrzebne. Liczby simplexowe układają się po przekątnych. Więc jeżeli chcemy zobaczyć liczby czworokątne patrzymy na trzecią przekątną (licząc od zera). Liczby p -simplexowe były nam potrzebne, aby policzyć $f_2(b, p+1)$. Więc aby policzyć $f_2(b, p)$ potrzebujemy liczb $p-1$ -simplexowych, które znajdują się w przekątnej $p-1$. Z wierszami jest jednak trudniej. Zauważmy, że jeżeli poruszamy się w trójkącie Pascala zaczynając od jedynki na samej górze i schodzimy zawsze o jedno pole w dół (albo w prawo, albo w lewo), to nie ważne jaką drogą pójdziemy - po n krokach dojdziemy do wiersza n . Ale patrząc na tabelkę z simplexami możemy zauważyć, że aby

dojść do konkretnego pola od pierwszej jedynki można pójść pierwsze zgodnie z poziomem, a będziemy w tej samej kolumnie, w której jest szukane pole, a następnie pionowo w dół, dopóki nie dojdziemy do interesującego nas pola. Przy tym sposobie możemy policzyć, że w bok musimy się przemieścić o tyle miejsc, ile mówi liczba porządkowa, a w dół o numer simplexu. Ustaliliśmy już, że numer simplexu to $p - 1$, natomiast liczba porządkowa to tak naprawdę ilość piłek, a więc b . Więc suma kroków pionowych i poziomych to $b + p - 1$. Wracając do pierwszej metody znajdowania wiersza, nie ważne, którą drogą pójdziemy, ilość kroków będzie równa wierszowi. Więc dochodzimy do ogólnego wzoru dla drugiej części (teraz już bez rekurencji).

Wniosek 6.2 Ilość multi-p siteswapów

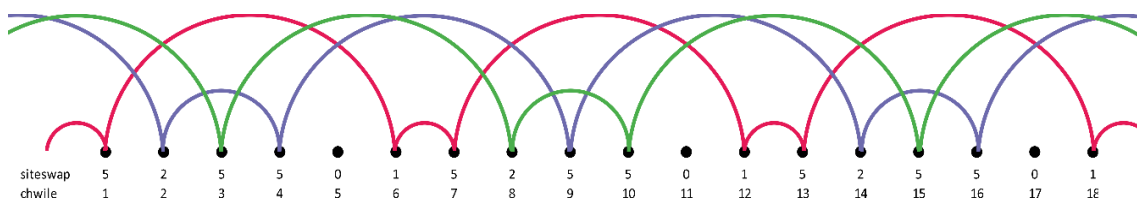
$$f_2(b, p) = \binom{b + p - 1}{p - 1}$$

Gdy doszedłem do tego wzoru bardzo się ucieszyłem. Dlaczego. Otóż taki sam wzór (tylko trochę inne oznaczenia) można znaleźć w pracach na temat żonglowania wybitnych matematyków (np. [2] s. 20)

Przejdźmy teraz do policzenia ilości siteswapów podstawowych (czyli tych określonych w Definicji 6.1.1). Skala trudności w tej części bardzo wzrasta. Nad tym problemem łamałem sobie głowę bardzo długo. Musiałem odrzucać pomysł na rozwiązanie za pomysłem. Niestety do końca nie udało mi się tak pięknie określić ilości siteswapów podstawowych jak wyszło to z multi-p siteswapami. (wzór dla $f_2(b, p)$). Mimo, że nie ukończyłem obliczeń poniżej podam kierunek rozważań, który zaprowadził (według mnie) najdalej.

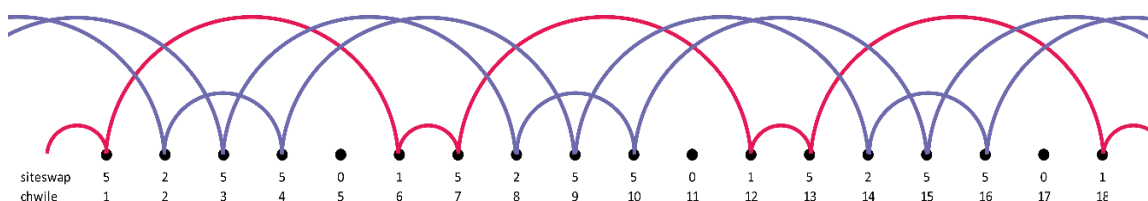
Zacznijmy od wytłumaczenia tego, że każdy siteswap podstawowy złożony jest z tzw. cykli. Są to tak jakby zbiory orbit, które znajdowaliśmy na diagramach (np. rysunek 15). Orbits znajdujące się w tym samym cyklu mają taką własność, że dla każdej orbity chwile w niej zawarte *mod* p są takie same jak we wszystkich innych orbitach w danym cyklu. Ilość piłek w danym cyklu to ilość orbit do niego zaliczanych.

Cykle znajdujemy w ten sposób, że szukamy pierwszej wysokości niezerowej i patrzymy, w której chwili wyląduje piłka wyrzucona w tym momencie. W ten sposób wylądowaliśmy na kolejnej wysokości niezerowej. Dalej kontynuujemy ten proces, aż wrócimy do wysokości początkowej. Wtedy wszystkie wysokości, przez które przeszliśmy należą do jednego cyklu. Aby znaleźć wszystkie cykle w danym siteswapie musimy po znalezieniu jednego wybrać inną wysokość początkową nie należącą do poprzedniego i przeprowadzić ten sam proces, a następnie to powtarzamy dla kolejnych cykli, aż nie zostanie nam żadna wysokość niezerowa. Jest to trochę skomplikowane, więc pokażę to na przykładzie. Na siteswapach, które do tej pory wykorzystywałem do przykładów (czyli takich o okresie 3) nie będzie widać dokładnie wszystkich kroków, więc wezmę siteswap 525501 (o $p=6$). Narysujmy diagram żonglowania dla tego siteswapu z zaznaczonymi orbitami (rysunek nr 20).



Rysunek 20 - Diagram żonglowania z orbitami dla 525501

Zaczynamy od pierwszej cyfry: **5**25501 (chwila 1 - w cyklu czerwonym). Piłka wyrzucona w tym momencie wyląduje w chwili 6: 52550**1**, czyli na jedynce. Piłka wyrzucona z tej jedynki wyląduje z powrotem w chwili 7, czyli na piątce, ale zauważmy, że jeżeli chodzi o notację siteswap to *piątka* w chwili 7, jest tą samą *piątką* w chwili 1 ($7 \equiv 1 \pmod{6}$). I to już koniec cyklu. To znaczy, że składa się on z piątki i jedynki, czyli **525501**. Następnie bierzemy kolejną wysokość, na którą jeszcze nie natrafiliśmy: **5**25501 (chwila 2 – w cyklu niebieskim). Piłka wyrzucona z tej *dwójki* wyląduje w chwili 4 na *piątce*: 525501. Następnie polecą tu: **52**5501 (chwila 9). I tu bardzo ważna rzecz: podobnie jak wyżej *piątka* z chwili 9 jest tą samą *piątką* z chwili 3 ($9 \equiv 3 \pmod{6}$). Ale chwila 3 należy już do innej orbity (zielonej). I na koniec z powrotem tam, gdzie zaczęła, czyli na *dwójkę*: **52**5501. Oznacza to, że drugi cykl składa się z dwóch orbit (na rysunku 20 oznaczonych kolorem niebieskim i zielonym). Cykl ten wygląda tak: **525501**. Zostało jeszcze tylko zero, które nic nie wnosi do żonglowania i nie należy do żadnego cyklu. Wszystkie niezerowe liczby z siteswapu należą już do znalezionych cykli, co oznacza, że znaleźliśmy wszystkie cykle. Siteswap z cyklami napiszemy w ten sposób: **525501**. Narysujmy raz jeszcze diagram, tym razem z zaznaczonymi cyklami (czerwonym i niebieskim – od oznaczeń kolorów liczb podawanych wyżej).



Rysunek 21- Diagram żonglowania z cyklami dla 525501

Jak pisałem wcześniej (przy okazji rysunku nr 15) ilość orbit we wzorze żonglowania to ilość piłek. Cykle w danym siteswapie mogą składać się z jednej bądź kilku orbit. Ilość piłek w danym cyklu zależy od tego, ile orbit on zawiera. Czyli suma piłek we wszystkich cyklach musi być równa ilości kul w całym siteswapie. Zauważmy też, że maksymalna ilość cykli w danym siteswapie wynosi tyle ile jest orbit (wszystkie cykle zawierają po jednej orbicie – tak jest na przykład przy 515151). A ilość orbit to ilość piłek, ilość cykli jest ograniczona od góry przez liczbę piłek.

Możemy teraz próbować określać wzór dla ilości siteswapów podstawowych. Będzie to:

$$\begin{aligned} & \text{Ilość siteswapów podstawowych z jednym cyklem} \\ & + \text{Ilość siteswapów podstawowych z dwoma cyklami} \\ & + \text{Ilość siteswapów podstawowych z trzema cyklami} \\ & + \dots \end{aligned}$$

Oznaczmy ilość siteswapów podstawowych z k cyklami jako $g_k(b, p)$, gdzie b – ilość piłek, a p – okres siteswapa wtedy powyższy (opisowy) wzór przyjmie postać:

$$\sum_{k=1}^b g_k(b, p)$$

Zauważyłem takie oto właściwości cykli.

Wniosek 6.3 Właściwości cykli siteswapów podstawowych

- 1) Ilość liczb niezerowych w jednym cyklu musi być większa od ilości piątek w tym cyklu.
- 2) Ilość siteswapów podstawowych z dwoma cyklami jest równa ilości siteswapów podstawowych o długości p z jednym cyklem o długości k pomnożonej przez ilość siteswapów podstawowych o długości $p - k$ z jednym cyklem.

Podobnie jak w pkt. 2 można zrobić dla trzech i większej ilości cykli. To oznacza, że teraz musimy znaleźć wzór na ilość siteswapów podstawowych z jednym cyklem, gdzie parametrami wejściowymi są ilość piątek (b) i długość siteswapu (p) oraz ilość liczb niezerowych składających się na ten cykl (n). Wynik ten będę oznaczał jako:

$$l_b(n, p)$$

Niestety dalej zaczęły się schody. Próbowałem na różne sposoby, ale wyniki były dalekie od oczekiwań. Pokażę tylko te według mnie najciekawsze „wyniki pośrednie” do jakich doszedłem w trakcie moich poszukiwań.

Na początek spróbowałem „ręcznie” określić $l_b(n, p)$ w zależności od b i n (p na razie zostawiłem jako stałą). Powstała taka oto tabela:

		b					
		1	2	3	4	5	6
n	1	-	-	-	-	-	-
	2	1	-	-	-	-	-
	3	1	2	-	-	-	-
	4	1	8	3	-	-	-
	5	1	22	27	4	-	-
	6	1	52	153	64	5	-
	7	1	114	771	265	125	6

Rysunek 22- Tabela ilości siteswapów podstawowych z jednym cyklem

Zauważyłem, że liczby w kolumnie dla $b = 2$ tworzą ciąg liczb Eulerowskich drugiego stopnia (zgodnie z [11]). Na dodatek druga przekątna (zaznaczona kolorem czerwonym) to liczby sześciennie.

Następnie próbowałem obliczyć $\sum_{k=1}^b g_k(b, p)$ wykorzystując $l_b(n, p)$. Niestety doszedłem do wzorów:

$$f_1(b, p) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{\min(b, p-b)} \frac{1}{k!} \sum_{n=b+k}^p \sum_{\sum b_i=b} \sum_{\sum n_i=n-b} \prod_{i=1}^k l_{b_i}(n_i + b_i, p_i)$$

Niestety tu musiałem się poddać. Próbowałem wspomagać się w obliczeniach *Wolframem* [10] oraz *Online Encyclopedia of Integer Sequences* [11]. Ostatnim rzutem na taśmę zacząłem obliczać $l_b(n, p)$.

$$l_b(n, p) = \binom{p}{n} n \left(b^{n-b-2} + \sum_{c=1}^{b+1} (b-1)^c b^{n-b-c-1} \binom{b+1}{c} \binom{n-b-2}{c-1} \right)$$

Jak widać albo gdzieś popełniłem błąd, albo ... nie, nie ma żadnego albo. Mimo, że nie doszedłem do zadowalającego wyniku postanowiłem, zamieścić moje rozważania w tej pracy, gdyż w dostępnej literaturze znalazłem tylko i wyłącznie kopie obliczeń z pracy Polster ([1]) z wykorzystaniem funkcji Moebiusa. Do tego przy okazji obliczeń doszedłem do ciekawych spostrzeżeń (jak na przykład do liczb pentatopicznych, czy też do liczb Eulerowskich drugiego stopnia -Polster w swojej pracy też wykorzystuje liczby Eulerowskie, ale pierwszego stopnia).

7. Funkcja żonglowania.

Poznaliśmy już notację siteswap, która opisuje proces żonglowania za pomocą ciągów liczb, ale wykorzystywaliśmy też permutacje, czyli opisywaliśmy żonglowania też za pomocą kombinatoryki. Teraz spróbuję przedstawić żonglowanie za pomocą funkcji.

Założenia są podobne jak przy użytej notacji siteswap.

Możemy określić takie przyporządkowanie, że chwili t , w której wyrzucona jest piłka będzie odpowiadać taka chwila t' , kiedy piłka będzie ponownie wyrzucona. Może wystąpić także taka sytuacja, kiedy w danej chwili t nie ma w ogóle rzutu, wtedy $t' = t$. Można to zapisać tak:

Definicja 7.1 Funkcja żonglowania

Funkcja żonglowania to funkcja $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ taka, że f jest permutacją $\mathbb{Z}$ oraz $\forall t \in \mathbb{Z}: f(t) \geq t$. Funkcje żonglowania opisujemy w następujący sposób:

$$f(t) = \begin{cases} t', & \text{gdy piłka rzucona w czasie } t \text{ zostanie złapana w czasie } t' \\ t, & \text{gdy nie ma rzutu w czasie } t \end{cases}$$

Weźmy na przykład kaskadę 3-elementową (siteswap (3) - rysunek 9) tutaj funkcja żonglowania przyjmuje postać

$$f(t) = t + 3$$

W przypadku fontanny 4-elementowej ((4) - rysunek nr 10):

$$f(t) = t + 4$$

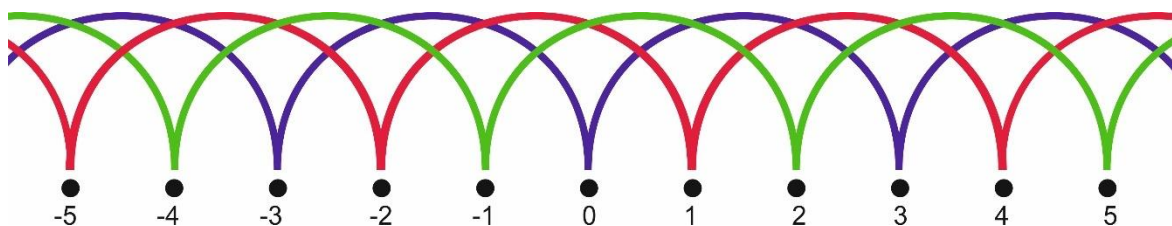
Zaś w przypadku prysznica 3-elementowego ((51) (rysunek nr 11)

$$f(t) = \begin{cases} t + 5 & \text{gdy } t \equiv 0 \pmod{2} \\ t + 1 & \text{gdy } t \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

Tak zdefiniowana funkcja dzieli zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ na podzbiory zwanymi ścieżkami lub orbitami (na rysunkach oznaczone kolorami). Na przykład

kaskada 3-elementowa to;

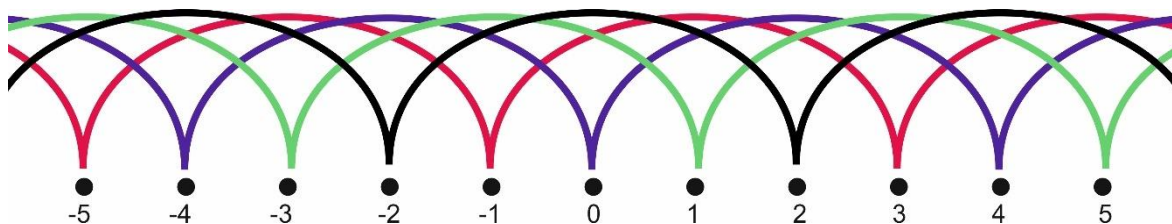
$$\{\{..., -3, 0, 3, 6, \dots\}, \{..., -2, 1, 4, 7, \dots\}, \{..., -1, 2, 5, 8, \dots\}\}$$



Rysunek 23 - Podział zbioru $\mathbb{Z}$ - kaskada

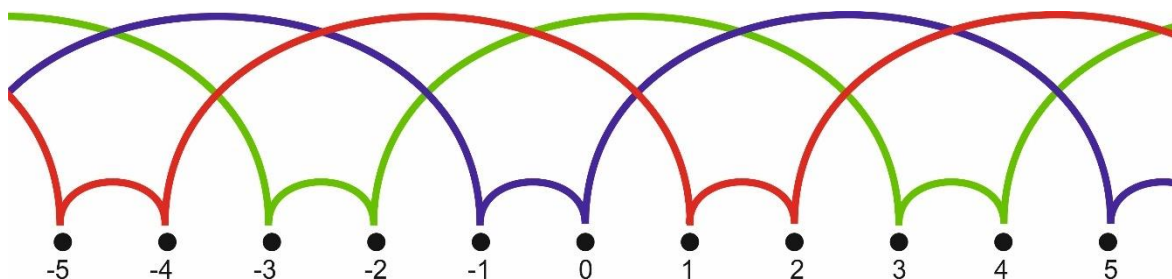
fontanna 4-elementowa:

$$\{\{..., -4, 0, 4, 8, ...\}, \{..., -3, 1, 5, 9, ...\}, \{..., -2, 2, 6, 10, ...\}, \{..., -1, 3, 7, 11, ...\}\}$$

Rysunek 24 - Podział zbioru $\mathbb{Z}$ - fontanna

prysznic 3 elementowy

$$\{\{..., -6, -1, 0, 5, 6, 11, ...\}, \{..., -5, -4, 1, 2, 7, 8, ...\}, \{..., -3, -2, 3, 4, 9, 10, ...\}\}.$$

Rysunek 25 - Podział zbioru $\mathbb{Z}$ - prysznic

Każdy kolor linii na rysunkach powyżej to nic innego jak zdefiniowana wcześniej orbita. Jak wiemy ilość orbit to ilość piłek, którymi żonglujemy. A więc funkcja żonglowania dzieli zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ na b podzbiorów, gdzie b to ilość piłek.

Symbolem $h(t)$ oznaczmy $f(t) - t$. Czyli będzie to – zgodnie z definicją 6.1 funkcji f liczba chwil po jakiej piłka wyrzucona w chwili t będzie wyrzucona powtórnie. Zauważmy, że będzie nic innego jak wysokość rzutu w chwili t określona w notacji siteswap.

Z poprzednich rozdziałów pamiętamy, że żonglowanie bardzo często jest okresowe. Jak to zapisać przy pomocy funkcji żonglowania?

Definicja 7.2 Okresowa funkcja żonglowania.

Funkcję żonglowania f nazywamy okresową o okresie p wtedy gdy

$$\exists p \in \mathbb{N}; \forall i, j \in \mathbb{Z}; i \equiv j \pmod{p} \Rightarrow h(i) = h(j)$$

Podobnie jak przy siteswapach możemy określić ilość piłek żonglowanych przez daną funkcję ($ball(f)$) jako średnią.

Twierdzenie 7.1 O wartości średniej dla okresowej funkcji żonglowania

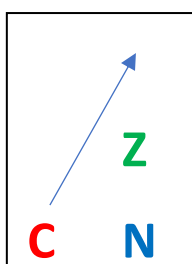
Niech p jest będzie okresem funkcji żonglowania wtedy ilość piłek ($ball$) potrzebnych do żonglowania można określić poniższym wzorem.

$$ball(f) = \frac{\sum_{i=1}^p f(i)}{p}$$

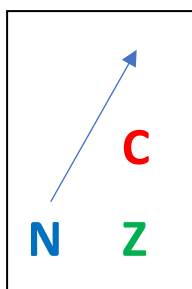
8. Notacja stosu.

Istnieje jeszcze inne podejście do matematycznego opisu procesu żonglowania. Przy notacji siteswap liczyliśmy, ile chwil minie od wyrzucenia piłki do jej powtórnego wyrzucenia. Ale popatrzmy na żonglowanie w ten sposób, że określamy uporządkowaną listę piłek, które są w powietrzu. Lista ta jest posortowana na podstawie kolejności w jakiej te piłki wylądują. Można powiedzieć, że w powietrzu mamy stos piłek. Za każdym razem, kiedy piłkę wyrzucamy jest ona wstawiana w odpowiednie miejsce tego stosu. Jeżeli przed wyrzuceniem piłki mamy $b-1$ kul w powietrzu, to mamy dokładnie b miejsc, w które tę piłkę możemy umieścić. Możemy dodatkowo przyporządkować każdej piłce unikatowy kolor (pokolorować je). Jeżeli w danej chwili żadna piłka nie zostanie rzucona stos pozostanie oczywiście nie zmieniony.

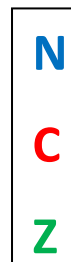
Aby lepiej zrozumieć sekwencję stosu zobaczmy to na przykładzie. Weźmy najprostszy sposób żonglowania trzema piłkami (czyli siteswap 3 – kaskada) przedstawiony w rozdziale czwartym (rysunek 9). Nadajmy im odpowiednio kolory: zielony (Z), niebieski (N) oraz czerwony (C).



Zacniemy od chwili 1 (rys. 9), wtedy w powietrzu mamy już dwie piłeczki N, która spada jako pierwsza oraz Z, która spada jako druga. Natomiast C zostaje wyrzucona i ląduje na samej górze stosu, czyli w pozycji 3. Wtedy stan stosu zapisujemy jako C Z N



W następnej chwili w powietrzu mamy piłki Z (jako pierwsza spadająca) oraz C (jako druga). N została złapana, wyrzucona i ląduje znowu na górze stosu (w pozycji 3). Stan stosu wygląda następująco: N C Z I tak w kółko.



Przyjmijmy, że żonglujemy b piłkami. Jeżeli ponumerujemy miejsca w stosie od dołu do góry

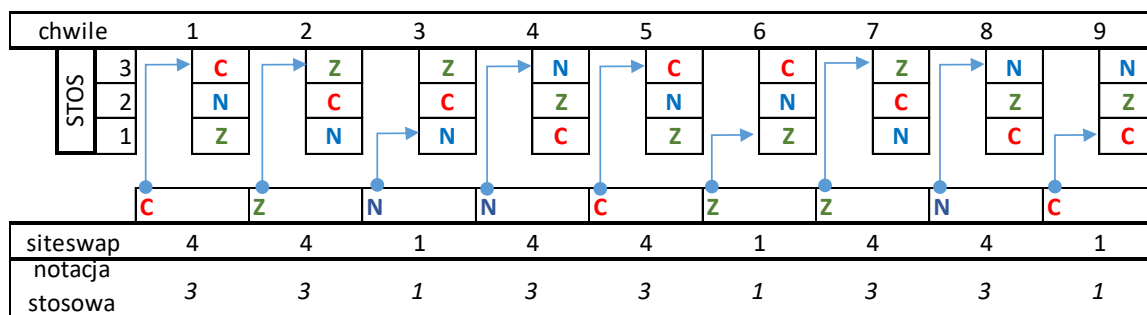
1, 2, ..., b , wtedy zamiast podawać stany stosu wystarczy, że będziemy podawać, na które miejsce w stosie ląduje piłka, która w danej chwili jest wyrzucana. W przykładzie powyższym kule lądują zawsze na szczycie trzelementowego stosu, a więc opis żonglowania w notacji stosu będzie wyglądał 33333 ... = (3). Zwróćmy uwagę, że wzięliśmy schemat żonglowania, który w notacji siteswap ma identyczny zapis. Czy tak będzie zawsze? Przyjrzyjmy się następnemu przykładowi, tym razem weźmiemy na warsztat żonglowanie, które opisuje siteswap 441 (rysunek 8).

Na początek przypiszmy w siteswapie odpowiednim piłkom kolory (jak w przykładzie powyżej użyjemy kolorów: Niebieski Czerwony i Zielony)

Siteswap	4	4	1	4	4	1	4	4	1
Kolory	C	Z	N	N	C	Z	Z	N	C

Następnie spróbujmy opisać ruch piłek w powietrzu. Na początek „napełnijmy” stos. Rzucamy piłę (4) czerwoną, która ląduje na samej górze stosu w miejscu 3. Następna w kolejności kula (4) zielona wskazuje na miejsce 3 w stosie (zielona w tym czasie „opada” na miejsce 2). Kolejna kula (1) niebieska ląduje na najniższym miejscu w stosie (gdyż zgodnie z zapisem siteswapie po jednym taktie ma opaść do ręki – wysokość 1). Stos mamy zapełniony. Następne kule lądują na stosie zgodnie z następującym algorytmem: Jeżeli w siteswapie w danej chwili mamy wysokość 1, to biała wskazuje na najniższe miejsce w stosie, w przeciwnym wypadku (czyli wysokość jest 4) piłki lądują na szczycie stosu.

Zauważmy, że przy przyjętej poprzednio notacji stosu omawiany siteswap (441) ma tutaj zapis 331. Opisuje to wszystko poniższy rysunek.

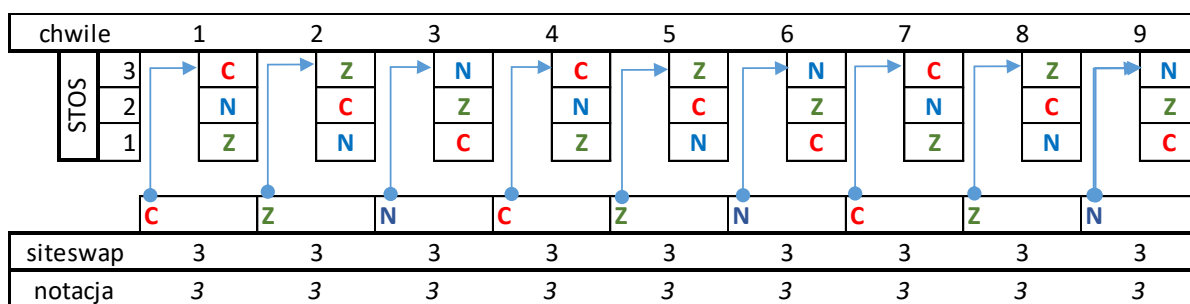


Rysunek 26 - Notacja stosowa - siteswap 441

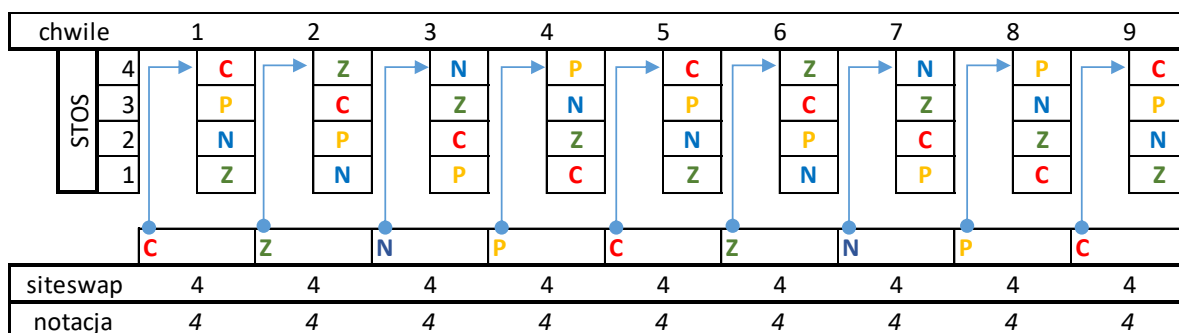
Ogólnie mówiąc możemy powiedzieć, że zamieniając siteswap na notację stosu wstawiamy kolejne piłki w taki sposób, aby po taktach określonych w siteswapie opadły do ręki.

Z samej definicji notacji stosowej możemy wywnioskować, że maksymalną liczbą w jest ilość piłek.

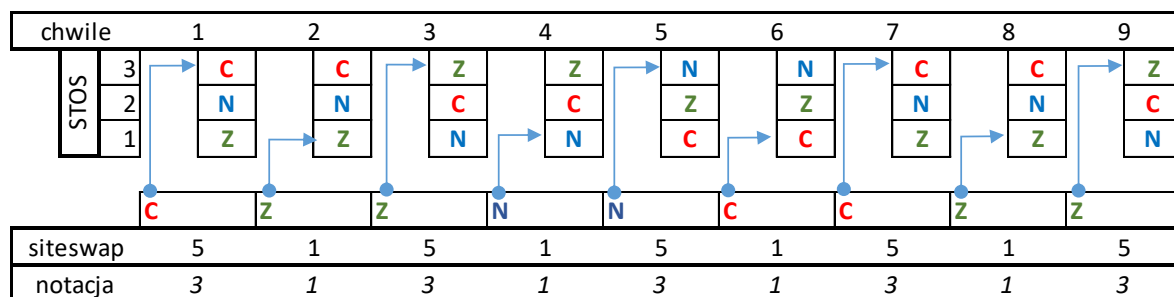
Zobaczmy jeszcze jak wygląda notacja stosowa dla popularnych żonglowań (rysunki 9-11).



Rysunek 27 - Notacja stosowa - kaskada



Rysunek 28 - Notacja stosowa fontanna



Rysunek 29 - Notacja stosowa prysznic

Z powyższych diagramów można wywnioskować pewne zależności.

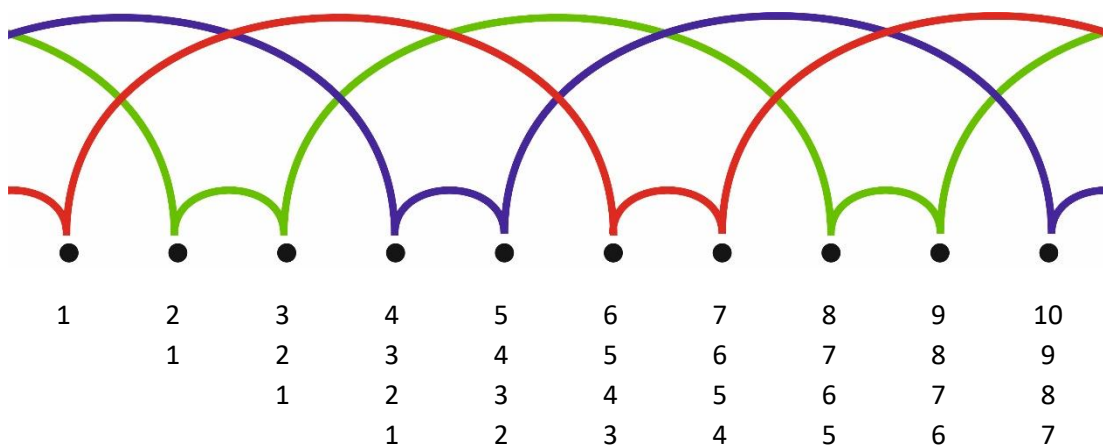
1. Każda kaskada b-piłkowa będzie miała w notacji stosowej zapis: (b).
2. Każda fontanna b-piłkowa będzie miała w notacji stosowej zapis: (b).
3. Każdy prysznic b-piłkowy będzie miał w notacji stosowej zapis: (b1).

Notacja stosowa jest przydatna również przy zapisywaniu żonglowania za pomocą warkoczy (patrz rozdział 10).

9. Stany żonglowania i grafy przejścia.

Przyjrzyjmy się jeszcze jednemu podejściu do opisu żonglowania. Wyobraźmy sobie, że żonglujemy już od jakiegoś czasu i w danej chwili wszystkie piłki są w powietrzu. Teraz na osi czasu będziemy zaznaczać takie chwile, w których piłki opadają do ręki (jako 1 lub X) oraz takie chwile, w których nic się nie dzieje - to znaczy piłki w tych taktach nie opadają do ręki (jako 0 lub -). Przy opisie stanu piłka złapana „pozostaje w ręce”. Podobnie jak w poprzednich notacjach oś czasu dzielimy na chwile. Żonglowanie będzie opisywane poprzez podanie stanu w każdej chwili, a właściwie pomiędzy tymi taktami. Dla przejrzystości zapisu stany podajemy jednak tak jakby one były dokładnie w takcie. Są to jakby „migawki” w trakcie żonglowania, jakby ktoś robił zdjęcia żonglerowi, a później przewidywał, kiedy (w jakich chwilach) spadną wyrzucone piłki. Stany żonglowania będą miały postać (w zależności od przyjętego sposobu zapisu, bądź binarne ciągi zer i jedynek – 0011001 lub 00XX00X lub –XX–X. Długość ciągu opisującego stan będzie zależna od chwili, w którym ten stan określamy. Ciąg musi być na tyle długi, aby opisać chwile, w których wszystkie piłki zostaną złapane. Aby bardziej przybliżyć taką notację (zwaną stanem żonglowania) spróbujmy go opisać na przykładach (jak zwykle) podstawowych metod żonglowania: prysznic, kaskada, i fontanna (rysunki 9-11).

Prysznic (notacja siteswap 51)

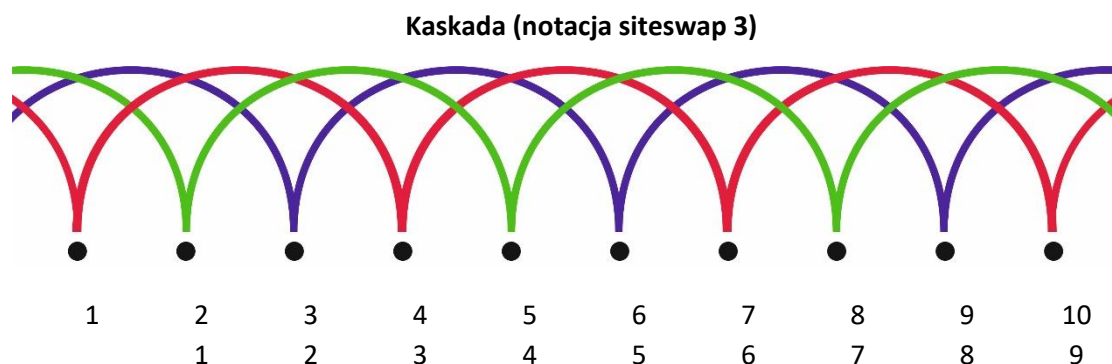


Rysunek 30 - Prysznic - zapis stanu żonglowania

Zacznijmy od wiersza pierwszego na powyższym rysunku, aby opisać stan początkowy. Będziemy zapisywać w tabelce „X” w tych chwilach, w których piłka opada do ręki oraz 0 w przeciwnym wypadku. W tym przypadku w takcie 1 łapiemy piłkę czerwoną (X), drugim opada piłka zielona (X), w trzecim nic się nie dzieje (piłka zielona została złapana w takcie 2), a w chwili 4 opada piłka niebieska (X). Na tym kończymy opis stanu, gdyż wszystkie piłki wylądowały w rękach. Stan żonglowania przedstawiony na rysunku opisujemy jako: XX0X. To jest jakby „migawka” żonglowania. Teraz przechodzimy do następnego taktu, ale w taki sposób, że poprzednia chwila 1 już nie istnieje. Chwila nr 2 staje się pierwszą, chwila nr 3 drugą i tak dalej. Odzworowaniem tego momentu jest linia druga na rysunku 29. I tak: w chwili 1 łapiemy piłkę zieloną (X), w takcie 2 nic się nie dzieje – piłka zielona została już złapana w poprzednim takcie (0), w takcie 3 łapiemy piłkę niebieską, w czwartym nic – piłka niebieska została złapana w poprzednim takcie (0) i na koniec w chwili 5 łapiemy piłkę czerwoną. Koniec – wszystkie piłki zostały złapane. Opis stanu zatem jest taki: X0X0X. Przechodzimy do linii nr 3 na powyższym rysunku. Postępując analogicznie jak powyżej otrzymujemy stan: XX0X. I na koniec linia czwarta – stan: X0X0X. A więc opisując stany prysznica w czterech kolejnych chwilach otrzymaliśmy poniższe ciągi:

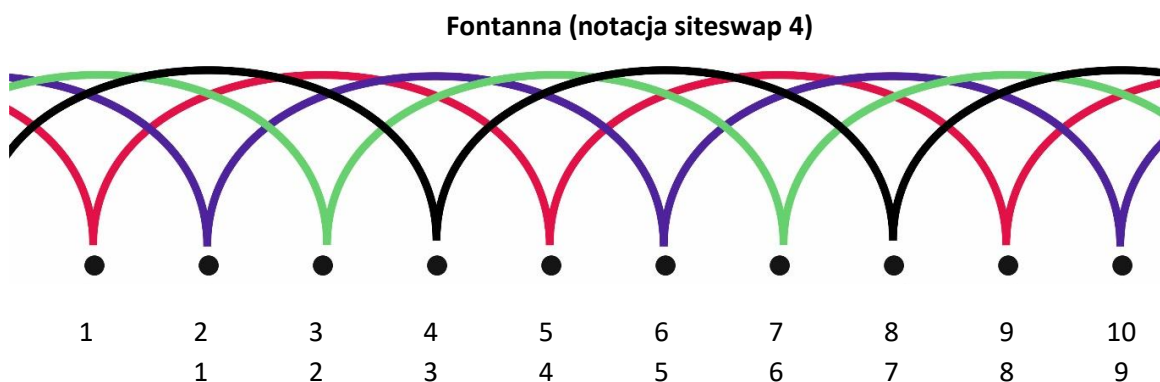
- | | |
|----------|----------|
| 1. XX0X | 3. XX0X |
| 2. X0X0X | 4. X0X0X |

Co można z tego wywnioskować. Widzimy, że w tym przypadku stany zaczęły się powtarzać już po „drugiej migawce”. A więc do opisu żonglowania prysznica wystarczą dwa stany żonglowania (w konkretnej kolejności). A jaki jest siteswap opisujący to żonglowanie? 51! A więc w tym przypadku długość siteswap minimalnego jest taka sama jak ilość stanów. Zgodnie z opisem stan jest tak długi, aż złapiemy wszystkie piłki, a więc ilość X (1) w stanie musi być równa ilości piłek. Co więcej: w tym przykładzie maksymalną wysokością jest 5. Jest to też maksymalna długość stanu (X0X0X).



Rysunek 31 - Kaskada – zapis stanu żonglowania

Postępujemy podobnie jak przy prysznicu. Wiersz nr 1: w chwili 1 łapiemy piłkę czerwoną (X), w takcie 2 zielona opada do ręki (X), a w następnym niebieska zostaje złapana (X). Kończymy opis stanu, gdyż złapaliśmy wszystkie piłki. Opis stanu wygląda w następujący sposób: XXX. Przechodzimy do wiersza drugiego: Na początek łapiemy piłkę zieloną (X), następnie niebieską (X), a w takcie 3 łapiemy czerwoną (X). Koniec wszystkie bile zostały złapane. Opis stanu: XXX. A więc taki sam jak powyżej. Opisy następnych migawek będą się powtarzały. Zatem do opisu żonglowania kaskady wystarczy podanie jednego stanu. Zgadza się to z wnioskami opisu prysznica – długość siteswap minimalnego (tutaj 3) jest równa ilości stanów koniecznych do opisanie żonglowania. Tak samo jest z ilością piłek $3 * X =$ trzy piłki. Tutaj maksymalną wysokością jest 3, a długość stanu jest również równa 3.



Rysunek 32 - Fontanna - zapis stanu żonglowania

Wiersz pierwszy: w takcie 1 łapiemy piłkę czerwoną(X), następnie niebieską (X). W chwili 3 zielona opada do ręki (X), a potem czarna (X). Koniec wszystkie piłki wylądowały w rękach. Zapis: XXXX. Linia dwa: na początek łapiemy piłkę niebieską, w chwili 2 zieloną. W takcie 3 czarna zostaje złapana, a w 4 czerwoną. Koniec. Zapis: XXXX. Podobnie jak wyżej: ilość stanów koniecznych jest równa długości siteswap minimalnego. Oraz ilość „X” to liczba piłek. W tym przypadku maksymalną wysokością jest 4 co jest również długością stanu.

Ogólnie można powiedzieć (za [1] s. 44, [2] s. 16, [3] s.22): przy żonglowaniu b piłkami, z maksymalną wysokością h otrzymujemy stan składający się dokładnie z b X-ów oraz $b - h$ zer. Oraz ilość różnych stanów wynosi $\binom{h}{b}$.

Zbiór stanów opisujących żonglowanie nazywamy grupą stanów.

Notacja stanów powstała na wyraźne zapotrzebowanie żonglerów, którzy chcieli bardziej urozmaicić swoje występy. Otóż ten opis ułatwia „płynne przejście” z żonglowania jednego siteswapu do drugiego.

Widzimy, na przykładach powyżej, że zapisywanie grupy stanów opisujących dane żonglowanie jest dosyć żmudne. Dlatego matematycy-żonglerzy stworzyli specjalne tabele zmiany stanów (z ang. *state transition diagrams*). Gdzie opisane są wszystkie metody przejścia z jednego stanu do drugiego. Tabele te są tworzone są dla określonej liczby piłek i maksymalnej wysokości.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	3	xxx	xxox	xoxx	oxxx	xxoox	xoxox	xooxx	oxxox	oxxxx	ooxxx
2	xxx	3	4			5					
3	xxox	2	x	4			5				
4	xoxx	1		x	4				5		
5	oxxx	0			x						
6	xxoox		2	3		x		5			
7	xoxox		1		3		x			5	
8	xooxx			1	2			x			5
9	oxxox		0						x		
10	oxxxx			0						x	
11	ooxxx				0						x

Rysunek 33 - Tabela zmiany stanów dla 3 piłek i maksymalnej wysokości 5

W jaki sposób wykorzystujemy powyższą tabelę? Weźmy na przykład prysznic (rysunek 29) Jest to siteswap 51. Stanem początkowym jest XXOX. Odnajdujemy taki stan w kolumnie A. Jest to pozycja A3. Następnie chcemy poprzez wyrzut na wysokość 5 przejść do następnego stanu. Szukamy więc we wcześniej odnalezionym wierszu (tutaj 3) odpowiedniej wysokości (5) i odnajdujemy go w kolumnie G (komórka G3). Odczytujemy w górnej linii stan XOXOX. Teraz chcemy poprzez wysokość 1. Znajdujemy znowu w kolumnie A wyjściowy stan (tutaj XOXOX). Zaznaczona przekątna w tabeli bardzo nam to ułatwia. Jest to komórka A7. Podobnie jak poprzednio szukamy w wierszu 7 jedynki (określającej wysokość). Znajdujemy ją w komórce C7. I znowu odczytujemy górny wiersz: XXOX. I tak w kółko. Mamy grupę stanów XXOX, XOXOX opisujących żonglowanie prysznic (siteswap 51).

W trakcie przygotowywania niniejszej pracy spotkałem się z wieloma takimi tabelami. Największa z nich ([4]) opisywała przejścia dla 3 piłek i maksymalnej wysokości 5.

00111								5		X
01011						5			X	
10011					5			X		
01101			5				X			
10101		5				X				
11001	5				X					
0111			4	X		3		2		0
1011		4	X		3			1	0	
1101	4	X			2	1	0			
111	3	2	1	0						
	111	1101	1011	0111	11001	10101	01101	10011	01011	00111

Rysunek 34 - Tabela przejść stanów z <https://juggle.fandom.com/wiki>

Jest ona trochę inaczej skonstruowana, ale funkcjonalność jest taka sama. Mnie taka nie zadowalała i w ramach dokładnego zrozumienia istoty zapisu stanów żonglowania przygotowałem kilka innych (oprócz pokazanej wcześniej na rysunku 33).

1	x	ox	oox
x	1	2	3
ox	0	x	
oox		0	x

Rysunek 35 - Tabela przejścia stanów dla $b=1$ i max. $h=3$

2	xx	xox	oxx	xoox	oxox	ooxx	xooox	oxoxx	ooxox	oooox
xx	2	3		4			5			
xox	1	x	3		4			5		
oxx	0		x							
xoox		1	2	x		4			5	
oxox		0			x					
ooxx			0			x				
xooox				1	2	3	x			5
oxoxx				0				x		
ooxox					0				x	
oooox						0				x

Rysunek 36 - Tabela przejścia stanów dla $b=2$ i max. $h=5$

Oraz największa moja duma:

[illegible]

Rysunek 37 - Tabela przejścia stanów dla $b = 3$ i $\max h = 7$

Ale tabele te służą także do tego, do czego była stworzona notacja stanów. Otóż podpowiadają w jaki sposób „przechodzić” pomiędzy różnymi sekwencjami żonglowania. Weźmy na przykład dwa siteswapy: 441 (rysunek 8) i 51 (rysunek 11). Na początek zaznaczmy na tabeli (rysunek 33) pola, przez które przechodziliśmy tworząc stany siteswapu 51 (w opisie powyżej, aby łatwiej było zrozumieć metodę, zaznaczaliśmy pola tytułów kolumn/wierszy /np. A3/ - tak jak w Excelu boczna lewa kolumna /1,2,3../ i górny wiersz /A, B, C,.../). Następnie połączymy je kolejno strzałkami niebieskimi. Podobnie narysujmy to samo dla 441, tym razem strzałkami. Efekt pokazuje rysunek nr 38.

	A	B	C	D	E	F	G
1	3	XXX	XXOX	XOXX	OXXX	XXOOX	XOXOX
2	XXX	3	4			5	
3	XXOX	2	X	4			5
4	XOXX	1		X	4		
5	OXXX	0			X		
6	XXOOX		2	3		X	
7	XOXOX		1		3		X

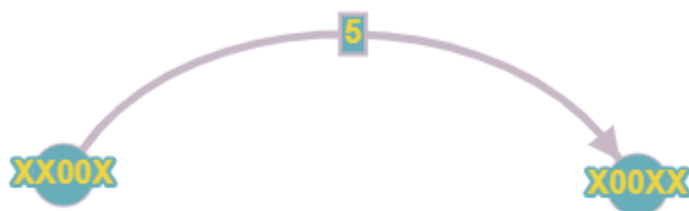
Rysunek 38 - Przejście pomiędzy siteswapami 51 oraz 441

Na tak stworzonej tabeli czy któreś z pomarańczowych pól powtarza się w obu „pętlach”. Jeżeli tak jest, to można z pierwszego wzoru żonglowania przejść do drugiego. Jak odczytywać taki rysunek? W tym przypadku takie powtórzenie powstało w miejscu C3. Oznacza to, że gdybyśmy chcieli przejść z siteswapu 441 na 51 musimy w wierszu 3 zamiast do wysokości 4 w polu D3 przejść do wysokości 5 w polu G3, a następnie kontynuować siteswap 51. Na żonglowanie przekłada się to tak, że zamiast rzucać drugą 4 wyrzucamy piłkę na wysokość 5.

Gdyby okazało się, że jakieś dwa siteswapy nie mają wspólnego pomarańczowego pola to znaczy, że nie ma bezpośredniego sposobu na płynne przejście między nimi. W takim wypadku trzeba znaleźć jakiś siteswap pośredni (jeden lub więcej), który będzie dzielił pola z obydwojema siteswapami, między którymi chcemy przejść.

Jednak takie odczytywanie z tabeli może być raczej trudne. Trzeba co chwilę się zastanawiać, czy mamy patrzeć na kolumny, czy na wiersze. Pola mogą się ze sobą zlewać i można przez przypadek połączyć złe stany. Z takich też powodów matematycy-żonglerzy wymyślili sposób na zamianę takiej tabelki na graf. Aby tego dokonać ze stanów tworzymy wierzchołki. Przypisując dokładnie jeden stan na jeden wierzchołek. Następnie patrząc na tabelkę łączymy ze sobą te stany, na których przecięciu w tabeli znajduje się liczba. Robimy to krawędziami oznaczonymi liczbą na przecięciu (wysokością) i skierowanych od stanu w pierwszej kolumnie do stanu w pierwszym

wierszu. Czyli na przykład stan XX00X (A6) przecina się ze stanem X00XX (H1) w polu z wysokością 5 (H6), więc na grafie połączymy te stany w ten sposób:

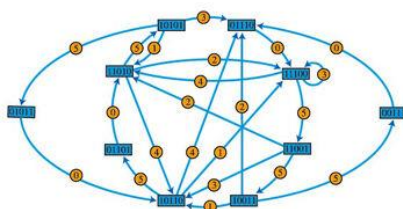


Rysunek 39 - Graf - przejście ze stanu XX00X do stanu X00XX

Gdy zastosujemy powyższy algorytm dla wszystkich stanów z tabeli dla $b = 3$ i $\max. h = 5$ (Rysunek 33) powstanie nam graf jak poniżej.



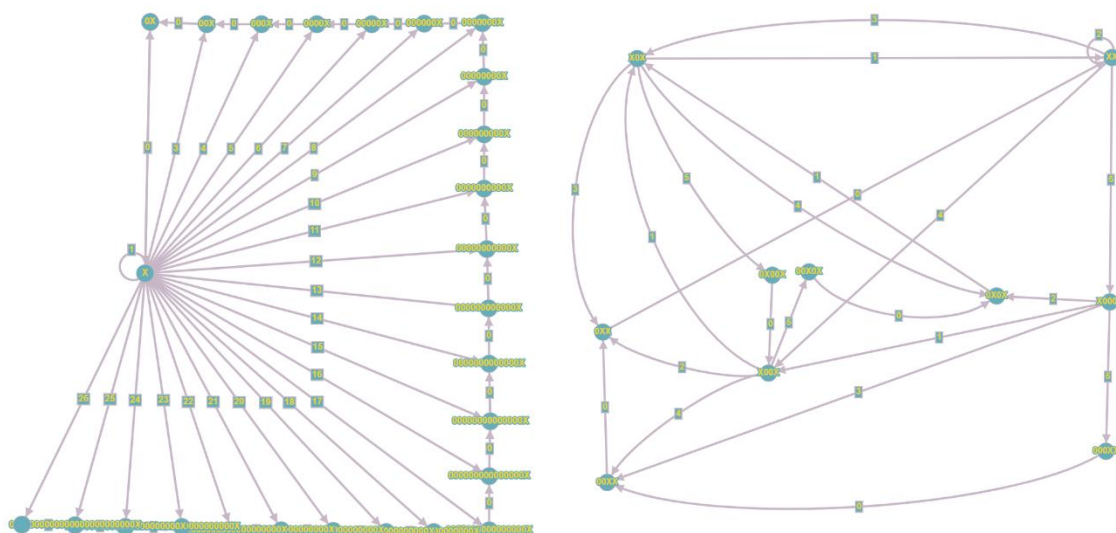
Rysunek 40 - Graf przejścia stanów $b=3$ i $\max h = 5$



Rysunek 41 - Graf przejścia stanów dla $b=3$ i $\max h = 5$ (źródło: Wikipedia [8])

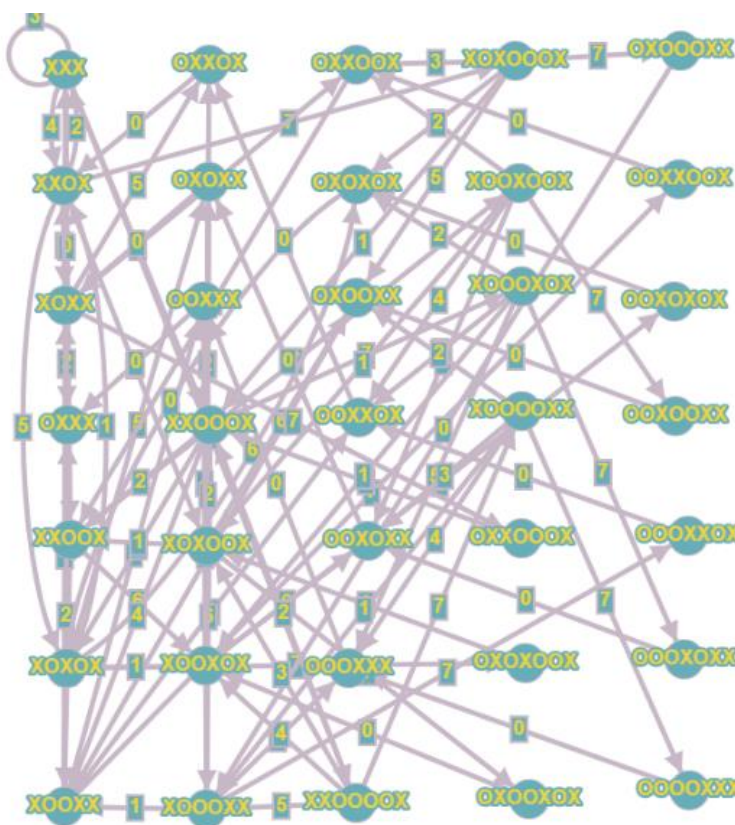
Taki też graf widnieje na stronie Wikipedii [8]. Tak samo jak z tabelką jest on trochę zmieniony, ale funkcjonalność jest ta sama.

Podejście do notacji żonglowania za pomocą grafów zafascynowało mnie więc próbowałem z innymi wartościami b i h_{max} . Przy testowaniu różnych liczb zauważyłem, że jeżeli b jest dużo mniejsze niż połowa wysokości (h) to zwiększanie ilości piłek (b) pociąga za sobą zwiększenie ilości wierzchołków (wynika to z wzoru na ilość wierzchołków/stanów $\binom{h}{b}$). I tak na kolejnych rysunkach pokazuję stworzone przeze mnie grafy przejścia stanów. Grafów stworzyłem dużo, ale tu zamieszczam tylko te, które ze względu na rozmiar zmieszczą się w niniejszej pracy.



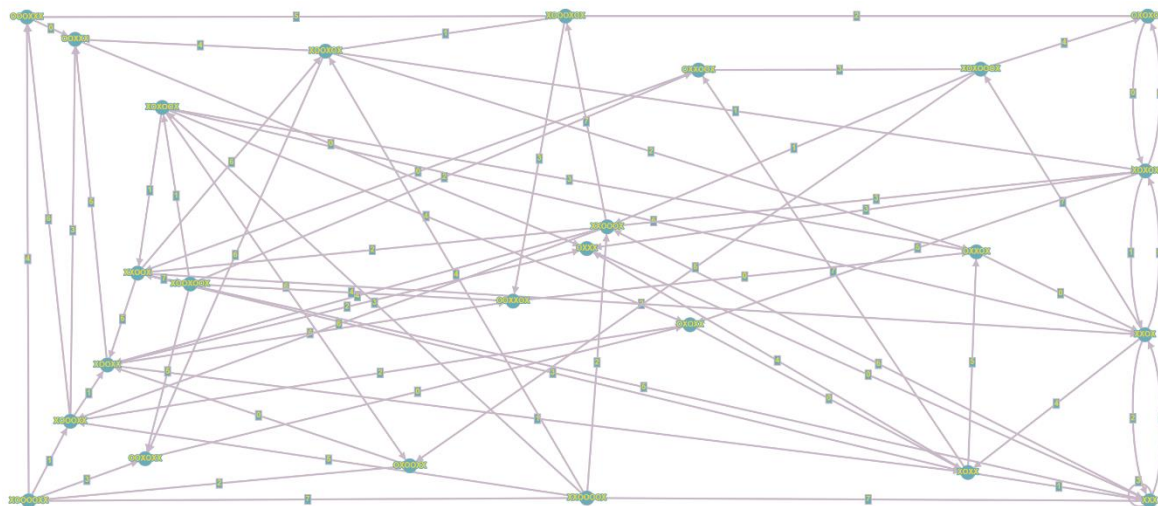
Rysunek 42 - Graf przejścia stanów dla $b=1$ i $\max h = 26$ oraz $b=2$ i $\max h = 5$

Niestety, gdy przeszedłem do robienia grafu, gdzie $b = 3$ i $\max h = 7$ pojawił się kłopot. Połączyłem wszystkie wierzchołki, dzięki czemu powstało coś takiego:



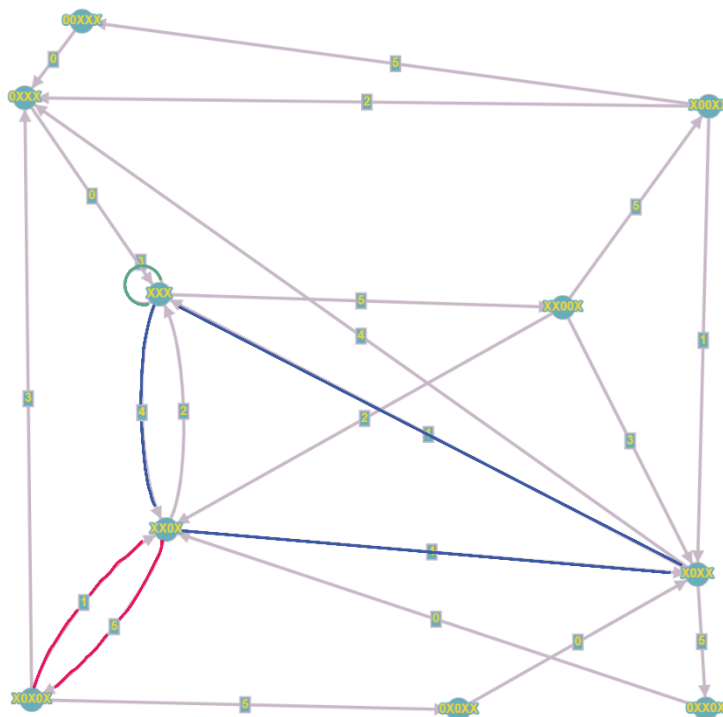
Rysunek 43 - Graf przejścia stanów dla $b=3$ i $\max h = 7$ (wersja nieuporządkowana)

Próbowałem nawet używać specjalnych algorytmów zaprogramowanych do odpłatywania grafów, niestety nie pomogło. Zacząłem więc to odpłatwiać ręcznie, a efekt widać na poniższym rysunku:



Rysunek 44 - Graf przejścia stanów dla $b=3$ i $\max h=7$ (wersja uporządkowana)

Powróćmy do opisu żonglowania za pomocą grafów przejścia stanów. Otóż każdy cykl w grafie reprezentuje poprawny ciąg żonglerski. Siteswap tworzymy poprzez „spisanie” wag krawędzi, poprzez które przechodzimy w trakcie cyklu. Jak zwykle pokażę kilka przykładów. Na rysunku poniżej (rysunek 44) na czerwono zaznaczony jest cykl reprezentujący prysznic (51), na niebiesko cykl 441 oraz na zielono kaskada (3).



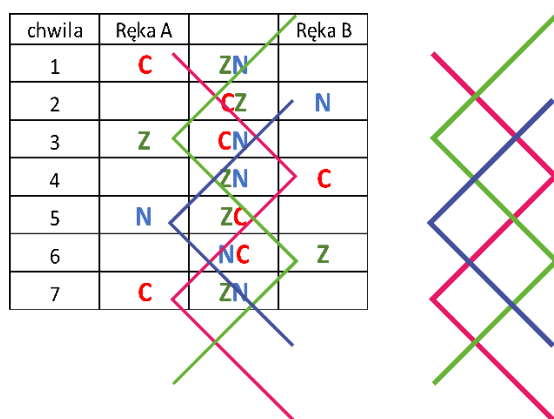
Rysunek 45 - Graf przejścia stanów $b=3$ oraz $\max h=5$ z zaznaczonymi cyklami reprezentującymi siteswapy 3, 51 oraz 441

Teoria grafów jest bardzo rozwiniętą dziedziną matematyki (wykorzystywaną między innymi w nawigacjach samochodowych). Można więc za jej pomocą doskonalić prace nad matematycznym podejściem do żonglowania, ale to już temat na osobną pracę.

10. Teoria warkoczy i żonglowanie.

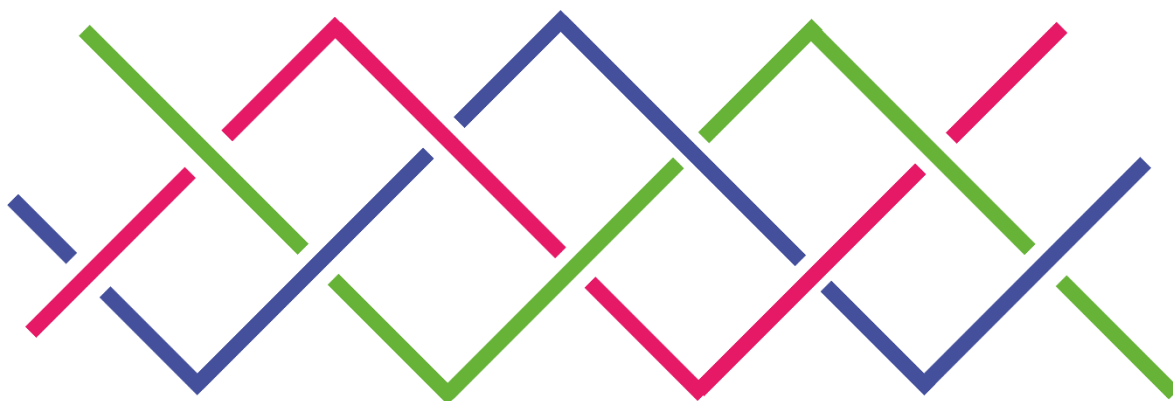
Właściwie miałem już kończyć pracę, gdy znalazłem film na YT, gdzie kuglarz żonglował piłeczkami, do których przywiązane były różnokolorowe sznurki. Wolne końce sznurków dawał do trzymania publiczności. Po skończonej sztuczce okazywało się, że sznurki zaplątały się w piękne wzory. Podobny efekt można zaobserwować, gdy w ciemności żonglujemy świecącymi różnokolorowymi kulami. Ogólnie, chodzi o „zapisanie” drogi jakie przebywają żonglowane piłeczki, kiedy kuglarz porusza się do przodu (do tyłu). Wtedy przypominałem sobie wykład dr Macieja Zakościelnego na temat teorii węzłów. Zacząłem się zastanawiać, czy do żonglowania nie da się podejść także od tej strony. Gdy zacząłem czytać o węzłach okazało się, że to „sznurki, których początek i koniec są połączone”. Ale znalazłem coś innego „Teorię warkoczy”. Nie będę się tu rozpisywał na temat definicji warkocza i różnych twierdzeń z tego zakresu. Pokażę tylko, że żonglowanie można również opisywać w ten sposób (pełny opis znajdziemy w [4]).

Przypomnijmy sobie wpierw schemat drabinowy z rozdziału trzeciego.



Rysunek 46 - Schemat drabinowy (3) wraz z odpowiadającym mu uproszczonym warkoczem

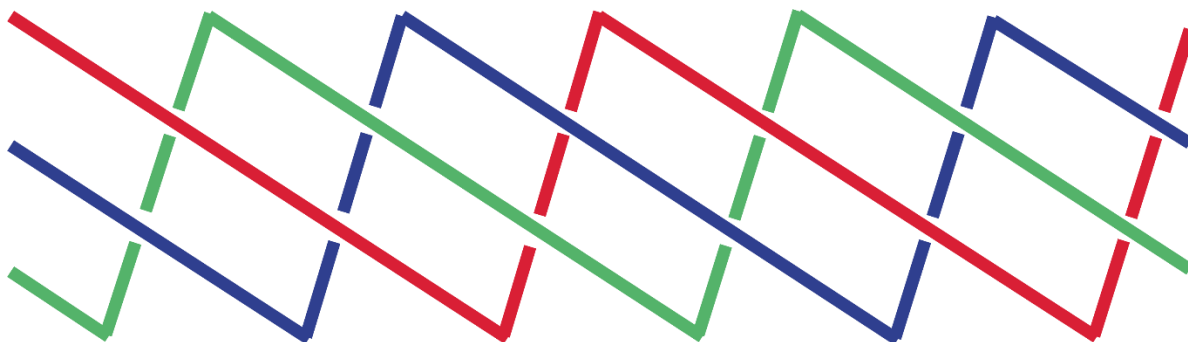
Jeżeli do tego dodamy notację stosową to będziemy wiedzieli jakiego koloru „ślad” jest aktualnie „na górze”, czyli która piłka w stosie jest najwyżej (ogólnie będziemy wiedzieli jaka jest kolejność kolorów). Korzystając z notacji stosowej dla wzoru żonglowania 3 (rysunek 26) oraz schematu drabinowego z rysunku 46 możemy stworzyć warkocz odpowiadający temu siteswapowi.



Rysunek 47- Warkocz dla siteswapu 3 (kaskada)

Poniżej podaję warkocze dla pozostałych najbardziej popularnych siteswapów (kaskada – powyżej, prysznic, fontanna oraz 441 poniżej).

Wykorzystując notację stosową dla siteswapu 51 – prysznic (rysunek 28) można stworzyć warkocz podobnie jak robiliśmy to wcześniej.



Rysunek 48 - Warkocz dla siteswapu 51 (prysznic)

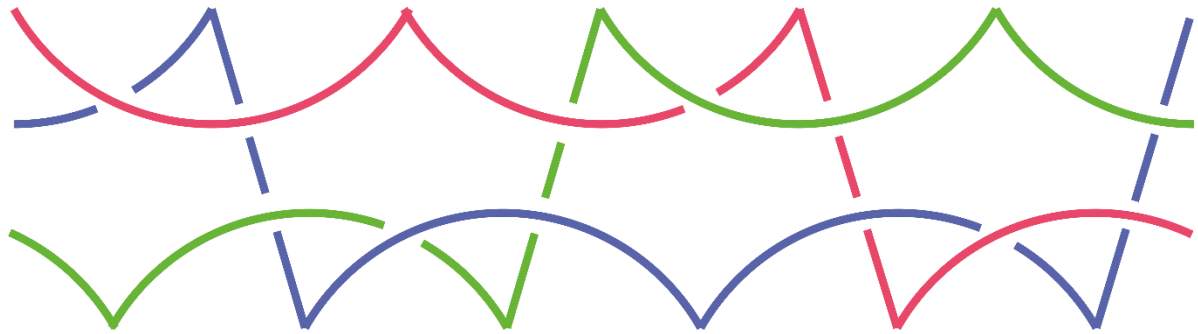
Z siteswapem (4) – fontanna (notacja stosowa na rysunku 27) sytuacja jest trochę inna. Zauważmy, że w tym siteswapie mamy jakby dwa oddzielne żonglowania lewą ręką (2 piłki) i prawą ręką (2 piłki) – dzieje się tak wtedy, gdy w siteswapie wszystkie wysokości są parzyste (wcześniej pisałem, że przy parzystej wysokości kule spadają do tej samej ręki). Więc warkocz w tym przypadku będzie podzielony również na dwie części. Zauważmy jak różne podejścia do opisu żonglowania są spójne. Przy siteswapach mamy dwa różne żonglowania, przy warkoczach również dwie oddzielne części.



Rysunek 49 - Warkocz dla siteswapu 4 (fontanna)

Pozostał nam jeszcze jeden warkocz do wykonania – 441. Jest on również dość skomplikowany. Nim go narysujemy, zauważmy, że w siteswapie nie ma wszystkich parzystych piłek, więc powstanie tylko jeden warkocz. Będzie on bardzo *poplątany*. Dlaczego? Popatrzmy na sam siteswap dwie pierwsze wysokości są parzyste i względnie duże (w stosunku do pozostałej nieparzystej *jedyńki*). Z samego wzoru żonglowania wynika nam, że jedną piłką żonglujemy w jednej ręce (pierwsza *czwórka*), drugą piłką w drugiej ręce (druga *czwórka*), natomiast trzecia

piłka będzie przechodziła z *ręki do ręki*. Następnie piłki zamieniają się miejscami i cykl rozpoczyna się od nowa. Zobaczmy więc jak wygląda warkocz.



Rysunek 50 - Warkocz dla siteswapu 441

I na tym zakończę rozważania nad opisem procesu żonglowania za pomocą teorii warkoczy. Temat jest bardzo obszerny (np. praca [4]), ale dla mnie trochę (może ciut, ciut) za skomplikowany.

11. Zakończenie.

Na tym kończę opisywanie matematycznego podejścia do żonglowania. Czy praca ta wyczerpuje całość zagadnienia? Oczywiście, że nie. Już we wstępie napisałem, że niektóre zagadnienia są tylko *zaznaczone* bez wgłębiania się w teorię (np. funkcja żonglowania, teoria warkoczy). Skupiłem się przede wszystkim na notacji *siteswap*. Ale nawet tu zaledwie *dotknąłem tematu*. Rozwinąłem także zagadnienie grafów i stanów żonglowania. Mimo, że dotarłem do licznych prac (przede wszystkim korzystałem z [1] oraz [2]), to jednak autorzy korzystali z zaawansowanej matematyki, a ja przecież chodzę dopiero do podstawówki. W wielu przypadkach próbowałem dojść do wyników (twierdzeń, faktów) przedstawionych w pracach swoją własną drogą, bez stosowania *wyższej matematyki*. Tak na przykład było z twierdzeniem o średniej. Dużo czasu poświęciłem na obliczanie liczby wszystkich możliwych siteswapów o określonej liczbie piłek i określonym okresie. Spędziłem nad tym ponad trzy miesiące (dobrze, że zacząłem już w sierpniu). Podchodziłem do tematu na wiele różnych sposobów. Zadziałał dopiero szósty. Niestety nie udało mi się wyprowadzić ogólnego wzoru. Ale mimo to zamieściłem swoje przemyślenia na ten temat. Przede wszystkim dlatego, że podczas moich poszukiwań okazało się, że do obliczeń żonglowań można wykorzystać liczby n -simplexowe i trójkąt Pascala (oczywiście dzięki kombinatorycznemu podejściu do żonglowania).

Czego w tej pracy nie ma? Całego mnóstwa rzeczy, ale wymienię tylko te najważniejsze:

- W całej pracy występowała generalnie zasada, że w danym momencie można rzucać/łapać dokładnie jedną piłkę (definicja 4.1.3). Jednak, jeżeli odejdziemy od tej reguły mamy również bardzo ciekawe żonglowania i równie interesujące metody matematycznego opisu tego procesu. Żonglowanie, które nie uwzględnia pkt. 3 definicji 4.1 nazywamy **multiplexem** i **squeeze catch**.
- Nie zostały uwzględnione fizyczne aspekty żonglowania z wykorzystaniem słynnego wzoru Shannona: $\frac{f+d}{e+d} = \frac{b}{h}$ gdzie f – czas, w którym piłka pozostaje w powietrzu, h – ilość rąk, b – ilość piłek, d – czas, w którym piłka pozostaje w dłoni, e – czas przez jaki ręka pozostaje pusta.
- Notacja siteswap, o której mowa w niniejszej pracy (a także pozostałe) nie opisuje w ogóle ruchów rąk żonglera. Zakładamy, że są one nieruchome – nie poruszają się w przestrzeni. Natomiast żonglowania, gdzie kuglarz zmienia położenie rąk na różne dziwne sposoby są bardzo widowiskowe. Aby opisywać także ruchy rąk powstała **Mills notation**. Opisy matematyczne tej notacji są naprawdę bardzo ciekawe. Można stosować także, a może przede wszystkim grafy. Dla dwóch rąk taki graf składa się z sześciu wierzchołków. Najbardziej znany rodzaj żonglowania w tej notacji to Mills' Mess (od nazwiska twórcy). Jest to najdłuższy cykl w grafie żonglowania. Powstała także **body notation**, która oprócz ruchu rąk opisuje ruchy ciała żonglera.
- Zakładaliśmy cały czas, że żonglujemy piłeczkami, które nawet jeżeli obracają się podczas rzutu, to nie ma to wpływu na cały proces. Inaczej jest, gdy żonglujemy maczugami (nie mówiąc już o piłach łańcuchowych). Wtedy ważne jest, ile razy maczuga *obróci się* w trakcie rzutu. Zazwyczaj jest to jeden obrót, ale przecież nic nie stoi na przeszkodzie, aby było ich więcej. Do opisu takiego żonglowania powstała **rotation notation**. Notacja ta nie dość, że opisuje rotację (np. maczugi) to robi to we wszystkich 3 wymiarach (X, Y, Z).
- W pracy tej, mimo że nie ograniczaliśmy liczby rąk (a może żonglowała ośmiornica – nigdzie w całej pracy nie pisałem, że żongler to człowiek) to zawsze był to jeden

żongler. Miała wtedy zastosowanie reguła o jednej piłce łapanej/rzucanej w danej chwili. Przy żonglerce wieloosobowej, nie mamy takich ograniczeń. Reguła 3 z definicji 4.1 ma zastosowanie do jednego żonglera, nic nie stoi na przeszkodzie, aby żongler A rzucał/łapał piłkę dokładnie w tej samej chwili co żongler B.

- W pracy zawsze uwzględniałem, że ręce rzucają po kolei (tzn., jeżeli mamy dwie ręce to na zmianę). Istnieje natomiast tzw. żonglerka synchroniczna, to znaczy taka, że w tej samej chwili ręce łapią/rzucają piłki. Powstała do tego notacja zwana **synchronous notation**. Jest ona bardzo skomplikowana. Wiele osób chce ją zmienić.

Jak widać więcej w pracy opuściłem niż napisałem. Ale w takim razie jest o czym pisać w przyszłości...

12. Spis rysunków

Rysunek 1 - Przykładowy graf (etykietowany, skierowany, ważony)	7
Rysunek 2 - Żonglowanie dwiema piłeczkami	8
Rysunek 3 - Schemat rzutu dwoma piłkami	9
Rysunek 4 - Tabela dla trzech piłek	9
Rysunek 5 - Tabela z naniesionym diagramem drabinowym	9
Rysunek 6 - Ilustracje dla żonglowania trzema piłkami	10
Rysunek 7 - Nazwy popularnych żonglowań	11
Rysunek 8 - Schemat żonglowania 441	12
Rysunek 9 - Kaskada 3-elementowa - (3)	13
Rysunek 10 - Fontanna 4-elementowa - (4)	13
Rysunek 11 - Prysznic 3-elementowy - (51)	13
Rysunek 12 - Obliczanie ilości piłek na podstawie diagramu	13
Rysunek 13 - 32 - kolizja dwóch piłek	15
Rysunek 14 - Diagramy opisujące definicje siteswap	16
Rysunek 15 - Definicja orbity w diagramie	16
Rysunek 16 - Przykładowa orbita	17
Rysunek 17 - Zamiana siteswapu 441 na 531	19
Rysunek 18 - Zamiana siteswapu 441 na 234	19
Rysunek 19 - Trójkąt Pascala i obliczanie (n,k) -tej pozycji	27
Rysunek 20 - Diagram żonglowania z orbitami dla 525501	28
Rysunek 21 - Diagram żonglowania z cyklami dla 525501	29
Rysunek 22 - Tabela ilości siteswapów podstawowych z jednym cyklem	30
Rysunek 23 - Podział zbioru $\mathbb{Z}$ - kaskada	32
Rysunek 24 - Podział zbioru $\mathbb{Z}$ - fontanna	33
Rysunek 25 - Podział zbioru $\mathbb{Z}$ - prysznic	33
Rysunek 26 - Notacja stosowa - siteswap 441	36
Rysunek 27 - Notacja stosowa - kaskada	36
Rysunek 28 - Notacja stosowa fontanna	36
Rysunek 29 - Notacja stosowa prysznic	37
Rysunek 30 - Prysznic - zapis stanu żonglowania	38
Rysunek 31 - Kaskada - zapis stanu żonglowania	39
Rysunek 32 - Fontanna - zapis stanu żonglowania	39
Rysunek 33 - Tabela zmiany stanów dla 3 piłek i maksymalnej wysokości 5	40
Rysunek 34 - Tabela przejść stanów z https://juggle.fandom.com/wiki	41
Rysunek 35 - Tabela przejścia stanów dla $b=1$ i max. $h=3$	41
Rysunek 36 - Tabela przejścia stanów dla $b=2$ i max. $h=5$	41
Rysunek 37 - Tabela przejścia stanów dla $b=3$ i max $h=7$	42
Rysunek 38 - Przejście pomiędzy siteswapami 51 oraz 441	43
Rysunek 39 - Graf - przejście ze stanu XX00X do stanu X00XX	44
Rysunek 40 - Graf przejścia stanów $b=3$ i max $h=5$	44
Rysunek 41 - Graf przejścia stanów dla $b=3$ i max $h=5$ (źródło: Wikipedia [8])	44
Rysunek 42 - Graf przejścia stanów dla $b=1$ i max $h=26$ oraz $b=2$ i max $h=5$	45
Rysunek 43 - Graf przejścia stanów dla $b=3$ i max $h=7$ (wersja nieuporządkowana)	45
Rysunek 44 - Graf przejścia stanów dla $b=3$ i max $h=7$ (wersja uporządkowana)	46
Rysunek 45 - Graf przejścia stanów $b=3$ oraz max $h=5$	46
Rysunek 46 - Schemat drabinowy (3) wraz z odpowiadającym mu uproszczonym warkoczem ...	47
Rysunek 47 - Warkocz dla siteswapu 3 (kaskada)	47
Rysunek 48 - Warkocz dla siteswapu 51 (prysznic)	48
Rysunek 49 - Warkocz dla siteswapu 4 (fontanna)	48
Rysunek 50 - Warkocz dla siteswapu 441	49

13. Bibliografia.

1. Burkard Polster, *The Mathematics of Juggling*, Springer 2002
2. Anthony Mays, *Combinatorial aspects of juggling*, Honours Thesis, 2006
3. Benjamin Beever, *Siteswap Ben's: Guide to Juggling Pattern*
4. Matthew Macauley, *Braids and Juggling Patterns*, Harvey Mudd College, 2003
5. Joe Bruder (i inni), *Juggling – Drops and Descents*, The American Mathematical Monthly, vol. 101, No.6 (Jun-Jul, 1994).
6. Maciej Stankiewicz, *Wybrane zagadnienia z teorii ciągów żonglerskich*, praca magisterska – Uniwersytet Gdański 2015
7. https://juggle.fandom.com/wiki/Juggle_Wiki
8. <https://graphonline.ru/>
9. <https://libraryofjuggling.com>
10. Witryna Wolfram Alpha - <https://www.wolframalpha.com>
11. Encyklopedia ciągów liczb całkowitych w wersji on-line <http://oeis.org>

14. Spis treści

1. Wstęp.	4
2. Używane pojęcia.	6
3. Matematyczny opis żonglowania.	8
4. Definicje i podstawowe twierdzenia.	12
Definicja 4.1 (prosty wzór żonglowania)	15
Definicja 4.2 (siteswap)	15
Wniosek 4.1 siteswap i permutacje zbioru liczb całkowitych $\mathbb{Z}$	17
Twierdzenie 4.1 (o średniej)	17
Definicja 4.3 (siteswap o określonej długości)	17
Definicja 4.4 (siteswap o określonej średniej)	18
Definicja 4.5 (siteswap ograniczony)	18
Wniosek 4.2 Zawieranie się podzbiorów siteswapów	18
Wniosek 4.3 Zbiór siteswapów jako suma podzbiorów siteswapów ograniczonych	18
5. Tworzenie nowych siteswapów na podstawie już istniejących.	19
Definicja 5.1 operacja zamiany	19
Definicja 5.2 przesunięcie cykliczne	20
Wniosek 5.1 Operacje zamiany i przesunięcie cykliczne tworzą poprawne siteswapy	20
Wniosek 5.2 Dodawanie stałej do siteswapu	20
Wniosek 5.3 Dodawanie/odejmowanie długości okresu do wybranej wysokości	20
Algorytm spłaszczający	21
6. Liczenie siteswapów.	23
Wniosek 6.1 Moc wybranych zbiorów siteswapów	23
Definicja 6.1 siteswapy podstawowe i multi-p siteswapy	24
Wniosek 6.2 Ilość multi-p siteswapów	28
Wniosek 6.3 Właściwości cykli siteswapów podstawowych	30
7. Funkcja żonglowania.	32
Definicja 7.1 Funkcja żonglowania	32
Definicja 7.2 Okresowa funkcja żonglowania.	33
Twierdzenie 7.1 O wartości średniej dla okresowej funkcji żonglowania	34
8. Notacja stosu.	35
9. Stany żonglowania i grafy przejścia.	38
10. Teoria warkoczy i żonglowanie.	47
11. Zakończenie.	50
12. Spis rysunków	52
13. Bibliografia.	53