„Lew i Człowiek”

Julia Galos

VIII Prywatne Akademickie Liceum Ogólnokształcące

Karmelicka 45, 31-128 Kraków

tel. 12 632 93 13

e-mail: sekretariat@pack.edu.pl

Lew i Człowiek

Richard Rado, żyjący w XX wieku niemiecki matematyk, w roku 1925 przedstawił następujący problem: „Lew i człowiek zamknięci w środku areny o kształcie koła mają taką samą maksymalną prędkość; czy lew zawsze złapie człowieka?”. Przez wiele lat od postawienia tego pytania matematycy byli przekonani, że jedyną poprawną odpowiedzią jest „tak, lew zawsze złapie człowieka”. Uzasadniali to analizując sposób w jaki lew może podążać za człowiekiem, gdy ten przyjmuje różne strategie. Dopiero w roku 1952 rosyjski matematyk, prof. Abram Samoilovitch Besicovitch, odkrył, że istnieje strategia, która pozwoliłaby człowiekowi nieskończenie długo uciekać przed zwierzęciem.

Celem niniejszej pracy jest dogłębne zbadanie problemu Lwa i Człowieka. Przeanalizowane zostaną trzy różne strategie ucieczki przed zwierzęciem, które może przyjąć człowiek, i określona zostanie ich efektywność. Ponadto rozważę, jak zmiana kształtu areny, na której zamknięci są lew i człowiek, wpływa na skuteczność owych trzech strategii. Na koniec zastanowię się, co by się stało, gdyby na arenie oprócz człowieka były obecne dwa lwy zamiast jednego - zgodnie z literaturą, gdy w n-wymiarowej przestrzeni znajduje się n zwierząt, człowiek nie jest w stanie przeżyć.

Założenia

By móc przeanalizować strategie, które mogłyby zostać wybrane przez człowieka próbującego uciec przed lwem, należy przyjąć kilka założeń. Po pierwsze, prędkości lwa i człowieka są równe:

$$v_{\text{lew}} = v_{\text{człowiek}}$$

Ponadto arena, na której zamknięci są lew i mężczyzna, ma kształt koła o promieniu 1:

$$r = 1$$

Co więcej, początkowa pozycja mężczyzny (M_0) może być przez niego dowolnie wybrana w obrębie areny, podczas gdy lew znajduje się dokładnie na środku areny ($L_0 = (0, 0)$). Można to zobaczyć na Fig. 1, która podobnie jak wszystkie pozostałe grafiki zawarte w tej pracy, została narysowana przeze mnie za pomocą programu komputerowego GeoGebra.

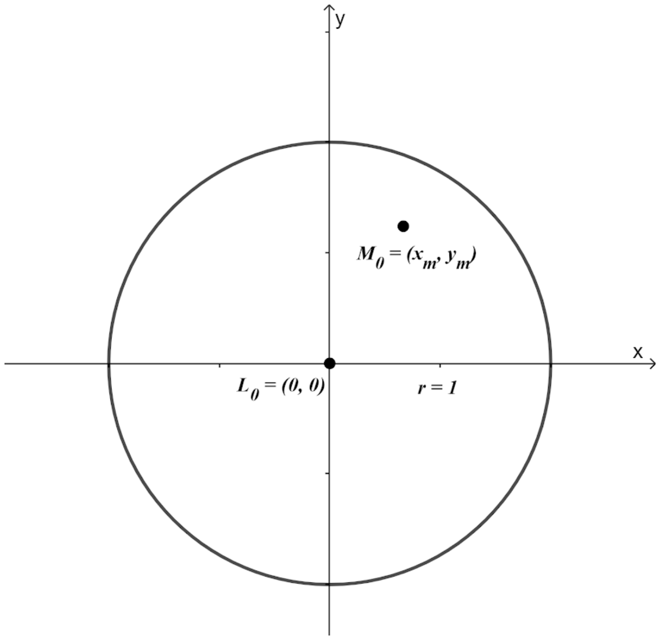

Fig. 1: Problem Lwa i Człowieka - założenia.

Pierwsza strategia

Będąc uwięzionym z dzikim zwierzęciem, człowiek robi wszystko, by być od niego jak najdalej. Instynktownie próbuje przetrwać tak długo, jak to możliwe i trzyma się ogrodzenia areny - każdy z punktów położonych przy ogrodzeniu jest bowiem punktem najdalej położonym od lwa rozpoczynającego pościg ze środka areny. Pierwszą strategią człowieka może być więc ciągłe poruszanie się po okręgu. Ponieważ może on dowolnie wybrać swoją pozycję początkową, możemy założyć, że zdecydowałby się zacząć w przy ogrodzeniu areny.

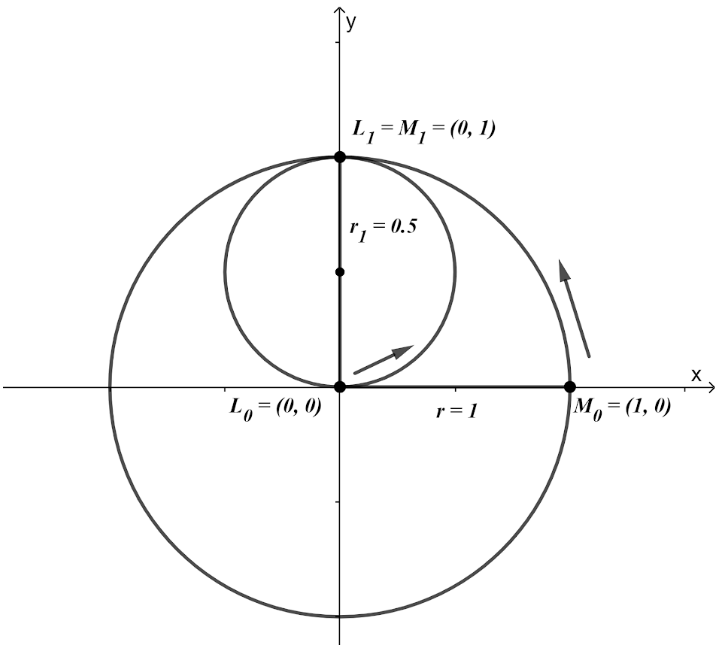

Fig. 2: Pierwsza strategia człowieka.

Fig. 2 pokazuje początkową pozycję człowieka i lwa, a także ich ruch (przy założeniu idealnego scenariusza, w którym lew wybiera drogę, która w doprowadzi go do człowieka w najszybszym możliwym czasie). Mężczyzna porusza się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, a lew, bez ustanku kierując się w stronę człowieka, powoli zbliża się do ogrodzenia areny. Zwierzę porusza się po obwodzie mniejszego koła, którego promień jest o połowę mniejszy niż promień areny ($r_1 = 0.5$). Poniższe obliczenia pokazują, że jest to droga, którą powinien obrać lew by dotrzeć do człowieka najszybciej jak to możliwe.

$$|M_0M_1| = 0.25 \times 2 \times \pi \times 1 = 0.5\pi$$

$$|L_0L_1| = 0.5 \times 2 \times \pi \times 0.5 = 0.5\pi$$

Sposób, w jaki porusza się lew przedstawiony na Fig. 2 jest oparty na doskonałym scenariuszu. Fig. 2 pokazuje, że gdy zwierzę podąża za swoim instynktem i idzie w kierunku człowieka, porusza się po narysowanym łuku koła o promieniu 0.5. Człowiek szybko zostaje złapany przez lwa - strategia ta jest więc nieskuteczna dla uciekającego mężczyzny.

Druga strategia

Druga strategia, którą mógłby przyjąć mężczyzna, jest bardzo podobna do pierwszej - wciąż chce być jak najdalej od lwa, więc porusza się wzdłuż ogrodzenia areny. Jednak w odróżnieniu od poprzedniej strategii człowiek nie trzyma się obranego na początku kierunku (przeciwnego do wskazówek zegara), lecz co jakiś czas go zmienia z myślą, że w ten sposób zmyli lwa i będzie mieć większe szanse na przetrwanie. Niestety, ta strategia również nie spełni jego oczekiwań - lew cały czas śledzi bowiem ruchy człowieka i razem z nim zmienia kierunek swojego pościgu.

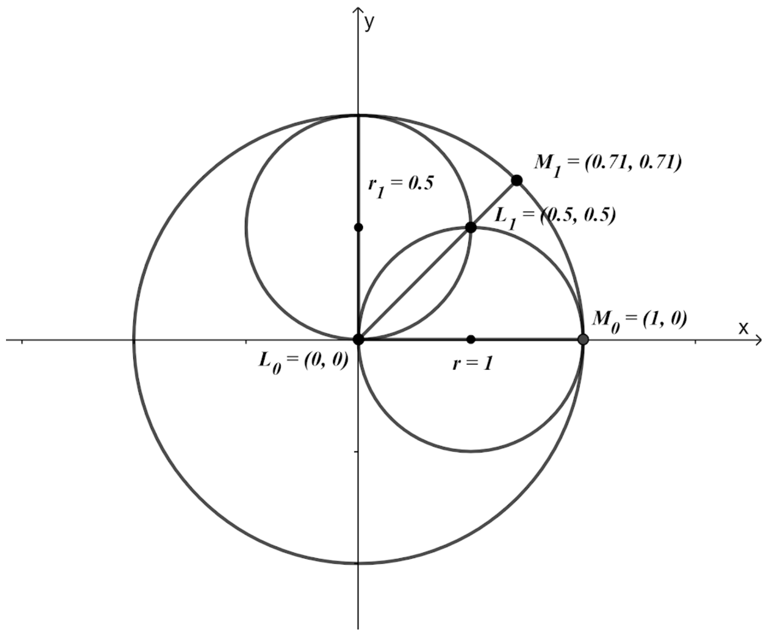

Fig. 3: Druga strategia człowieka.

Powyższy schemat przedstawia początkowe pozycje i modelowy ruch zarówno lwa, jak i człowieka. Po tym, jak człowiek zmieni kierunek w punkcie M_1, lew pobiegnie w stronę mężczyzny wzdłuż łuku nowego koła o promieniu $r_1 = 0.5$, który powstał poprzez symetryczne odbicie poprzedniego koła o tymże promieniu wzdłuż linii L_0M_1. Człowiek może zmieniać kierunek wiele razy, ale lew za każdym razem wykona ten sam manewr i będzie coraz bardziej się do niego zbliżać. Dlatego również ta strategia jest nieskuteczna dla mężczyzny.

Trzecia strategia

Strategia, którą człowiek powinien wybrać, aby przetrwać - tzw. „strategia wygrywająca” - z kilku powodów nie jest instynktowna dla przerażonego mężczyzny próbującego uciec przed niebezpiecznym zwierzęciem. Przede wszystkim, początkowa pozycja człowieka nie może znajdować się na obwodzie koła, lecz pośrodku jego promienia. Dodatkowo, postępując zgodnie z tą strategią, człowiek zbliża się coraz bardziej do zwierzęcia. Pomimo tego, jest to jedyna odkryta dotąd skuteczna strategia, gdyż lew i człowiek nigdy nie spotkają się dokładnie w tym samym punkcie. By to wykazać, przeanalizowany musi zostać dowód przedstawiony przez prof. Besicovitcha w 1952 roku.

A. Besicovitch postawił tezę, że można zbudować niekończącą się ścieżkę, po której powinien się poruszać człowiek by móc nieskończenie uciekać przed lwem. Mężczyzna nigdy nie zostanie złapany, jeśli będzie podążał wzdłuż ścieżki składającej się z krótkich odcinków o długości określonej odkrytym przed matematyka wzorem:

$$l_n = \left| M_{n-1} M_n \right| = \tfrac{1}{2} \times n^{-\frac{3}{4}}$$

W powyższym równaniu n jest liczbą odcinków tworzących ścieżkę ($n \geq 1$), a l oznacza długość n-tego odcinka. Bardzo ważne jest, aby każdy odcinek $M_{n-1}M_n$ był prostopadły do odcinka $L_0 M_{n-1}$. Początek ścieżki pokazany jest na Fig. 4, a długości dwóch pierwszych jej odcinków ilustrujących ruch człowieka obliczone zostały poniżej. Linie przerywane reprezentują najkrótszą drogę, którą lew musiałby przebyć, aby dotrzeć do mężczyzny na każdym kolejnym kroku. Schemat zawiera również wycinki dwóch okręgów o promieniach mających długość kolejnych kroków człowieka ($r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = \frac{\sqrt[4]{2}}{4}$). Pokazują one zasięg lwa podczas każdego z kroków człowieka. Dzięki nim widoczne jest, że nawet gdyby zwierzę zbliżało się do człowieka w linii prostej od L_0 do M_1, następnie od L_1 do M_2 itd., nie byłoby w stanie do niego dotrzeć. Oczywiście, w rzeczywistości lew nie poruszałby się po linii prostej, lecz po pewnym łuku ciągle kierując się w stronę człowieka (podobnie jak zostało to pokazane przy pierwszej i drugiej strategii). Oznacza to, że jego szanse na złapanie mężczyzny byłyby jeszcze mniejsze.

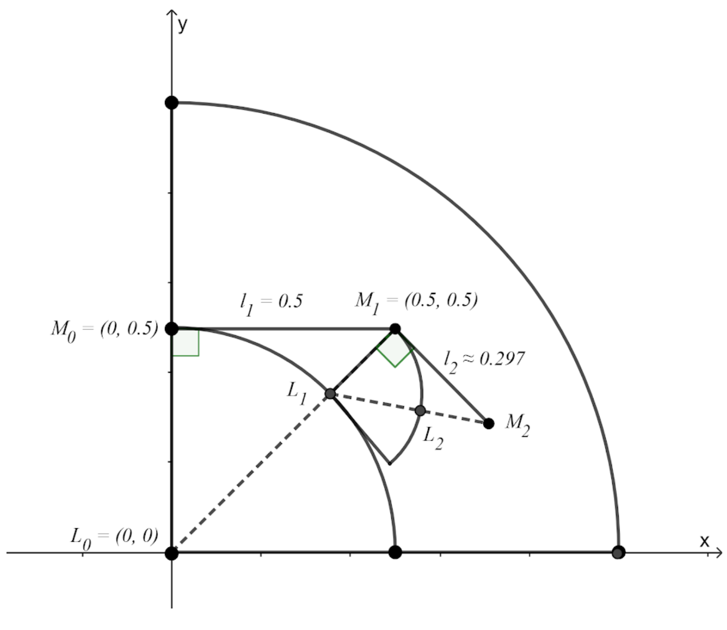

Fig. 4: Trzecia strategia człowieka.

$$l_1 = \tfrac{1}{2} \times 1^{-\frac{3}{4}} = 0.5$$

$$l_2 = \tfrac{1}{2} \times 2^{-\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{4} \approx 0.297$$

Teza prof. A. Besicovitcha może być uznana za poprawną tylko jeśli spełnione są następujące warunki:

1. odcinek L_0M_n jest dłuższy od odcinka $M_{n-1}M_n$
2. ścieżka człowieka i liczba składających się na nią odcinków jest nieskończona
3. nieskończona ścieżka mieści się wewnątrz koła jednostkowego.

Pierwszy warunek jest stosunkowo łatwy do udowodnienia za pomocą twierdzenia Pitagorasa, które mówi nam, że dla każdego trójkąta prostokątnego $a^2 + b^2 = c^2$, gdy c jest długością przeciwprostokątnej, a a i b są długościami przyprostokątnych. Jednym z założeń poczynionych przez Besicovitcha wspomnianym już przeze mnie wyżej w tekście, jest to, że każdy odcinek $M_{n-1}M_n$ musi być prostopadły do odcinka L_0M_{n-1}. Oznacza to, że odcinki L_0M_n, $M_{n-1}M_n$ i L_0M_{n-1} tworzą trójkąt prostokątny, w którym boki $M_{n-1}M_n$ i L_0M_{n-1} są przyprostokątnymi. Stąd wyprowadzić można następującą zależność:

$$\left|L_0M_{n-1}\right|^2 + \left|M_{n-1}M_n\right|^2 = \left|L_0M_n\right|^2$$

Powyższa zależność pokazuje, że odcinek L_0M_n musi być dłuższy od odcinka $M_{n-1}M_n$. By pokazać, że drugi warunek jest spełniony, pomocne jest zapisanie długości ścieżki człowieka za pomocą sumy.

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{1}{2} \times \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{4}}$$

Wiemy, że suma do nieskończoności odcinków o długości $l_n = \frac{1}{2} \times n^{-\frac{3}{4}}$ będzie większa niż suma do nieskończoności odcinków o długości $d_n = \frac{1}{2} \times n^{-1}$ (lub równa, jeśli $n = 1$). Ponieważ wiemy, że suma do nieskończoności odcinków o długości $a_n = n^{-1}$ będzie równa nieskończoności, możemy wywnioskować, co następuje:

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{1}{2} \times \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{4}} \geq \frac{1}{2} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Trzeci warunek można udowodnić, pokazując, że $\left|L_0 M_n\right| \leq 1$. Aby to zrobić, konieczne jest przekształcenie następującego równania w celu uzyskania wyrażenia dla $\left|L_0 M_n\right|$, które później pozwoli nam obliczyć maksymalną długość tego odcinka. Jeśli maksymalna długość odcinka będzie mniejsza od promienia koła jednostkowego (r = 1), to cała ścieżka z pewnością będzie się w nim mieścić.

$$\left|L_0 M_{n-1}\right|^2 + l_n^2 = \left|L_0 M_n\right|^2$$

$$\left|L_0 M_n\right|^2 = l_n^2 + \left|L_0 M_{n-1}\right|^2 = l_n^2 + \left(l_{n-1}^2 + \left|L_0 M_{n-2}\right|^2\right) = l_n^2 + l_{n-1}^2 + \left(l_{n-2}^2 + \left|L_0 M_{n-3}\right|^2\right) = \dots =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} l_k^2 + \left|L_0 M_0\right|^2$$

$$\left|L_0 M_n\right| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} l_k^2 + \left|L_0 M_0\right|^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4} + \sum_{k=1}^{n} l_k^2} \leq \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} \times \sum_{k=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}}$$

Aby odnaleźć maksymalną długości odcinka $\left|L_0 M_n\right|$, należy obliczyć górną granicę sumy znajdującej się pod powyższym pierwiastkiem. Jednym ze sposobów oszacowania wartości tej sumy jest przeanalizowanie funkcji $f(x) = x^{-\frac{3}{2}}$, gdzie $x > 0$. Z uwagi na fakt, że po osiągnięciu $x = 3$ wartości są bardzo małe, poprawnym będzie oszacowanie górnej granicy $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ za pomocą następującego wyrażenia:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leq f(1) + f(2) + f(3) + \int_3^{\infty} f(x)dx$$

$$f(1) = 1$$

$$f(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$f(3) = \frac{1}{\sqrt{27}}$$

$$\int_3^{\infty} f(x)dx = \int_3^{\infty} x^{-\frac{3}{2}} dx = \lim_{a\to\infty} \left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_3^a = \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{2}{\sqrt{a}}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}} = 0 + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{27}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 2.70$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{3}{2}} \leq 2.70$$

Aby zakończyć dowód pokazujący, że ścieżka całego człowieka mieści się w okręgu r = 1, wystarczy podstawić maksymalną wartość powyższej sumy w równaniu uzyskanym wcześniej.

$$\left|L_0 M_n\right| \leq \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \sum_{k=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times 2.70} \approx 0.96$$

Jak widać długość odcinka $\left|L_0 M_n\right|$ zawsze jest mniejsza niż 1, co oznacza, że ścieżka, którą podąża mężczyzna, mieści się wewnątrz areny.

Zmiana kształtu areny

Jednym z głównych założeń problemu Lwa i Człowieka sformułowanego przez Richarda Rado jest to, że arena, na której się znajdują, jest okrągła. Badając problem, postanowiłam sprawdzić, jak zmiana kształtu areny wpłynie na skuteczność dwóch głównych strategii, które mężczyzna może wybrać - poruszanie się wzdłuż ogrodzenia areny lub podążanie ścieżką Besicovitcha.

Arena o kształcie trójkąta równobocznego

Załóżmy, że lew i człowiek znajdują się na arenie, która ma kształt trójkąta równobocznego. Długość jego boku nie jest ważna - liczą się tylko proporcje. Lew znajduje się na przecięciu dwusiecznych wszystkich kątów trójkąta - w ten sposób jest w równej odległości od każdego wierzchołka i znajduje się pośrodku koła, które mogłoby być wpisane w trójkąt. Stosując się do pierwszej strategii, która zakłada poruszanie się wzdłuż ogrodzenia areny, człowiek powinien zacząć od punktu, który jest możliwie najdalej od zwierzęcia. Oznacza to, że powinien wybrać jeden z trzech wierzchołków. Początkowe pozycje lwa i człowieka, jak i przewidywany modelowy ruch obu postaci zostały przedstawione na Fig. 5 poniżej.

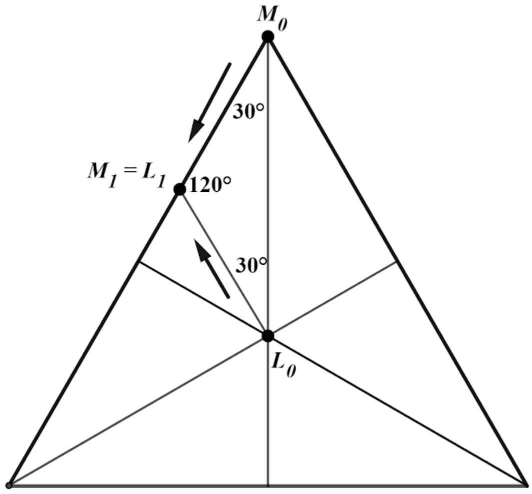

Fig. 5: Lew i człowiek na arenie o kształcie trójkąta równobocznego, pierwsza strategia człowieka.

Jak widać na Fig. 5, pierwsza strategia mężczyzny nie jest skuteczna na arenie o kształcie trójkąta równobocznego. Gdy człowiek porusza się wzdłuż jednego z boków trójkątnego obszaru próbując zbliżyć się do następnego wierzchołka lew cały czas idzie w jego stronę. Na Fig. 5 przedstawiona jest droga umożliwiająca najszybsze złapanie człowieka przez zwierzę. Jest nią jeden z boków przedstawionego na diagramie trójkąta równoramiennego o podstawie M_0L_0 - bok L_0L_1.

Sytuacja, w której mężczyzna zamknięty z lwem na trójkątnej arenie zdecydowałby się podążać ścieżką Besicovitcha, pokazana jest na Fig. 6. Wiemy, iż możliwym jest wpisanie koła w każdy trójkąt - dzięki temu człowiek może przyjąć strategię wygrywającą i uciekać przed lwem nieskończenie długo. Wystarczy, że jego pozycją początkową będzie punkt leżący pośrodku promienia okręgu wpisanego w trójkąt (arenę).

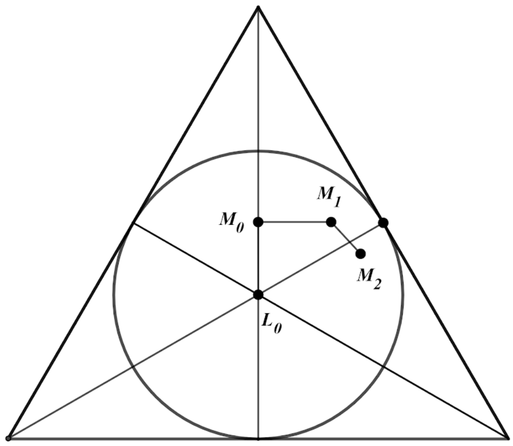

Fig. 6: Lew i człowiek na arenie o kształcie trójkąta równobocznego, wygrywająca strategia człowieka.

Arena o kształcie kwadratu

By móc stwierdzić, iż pierwsza strategia, którą może przyjąć człowiek jest nieskuteczna, a wygrywająca - trzecia - strategia umożliwia człowiekowi uniknięcie pożarcia przez lwa bez względu na kształt areny, należy przeanalizować więcej przykładów. Fig. 7 i 8 pokazują rezultat przyjęcia obu tych strategii na arenie o kształcie kwadratu.

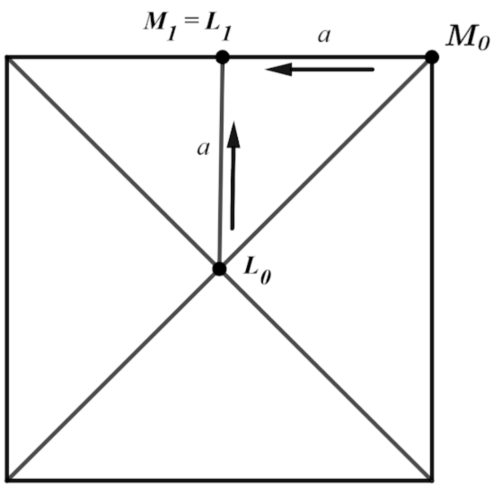

Fig. 7: Lew i człowiek na kwadratowej arenie, pierwsza strategia człowieka.

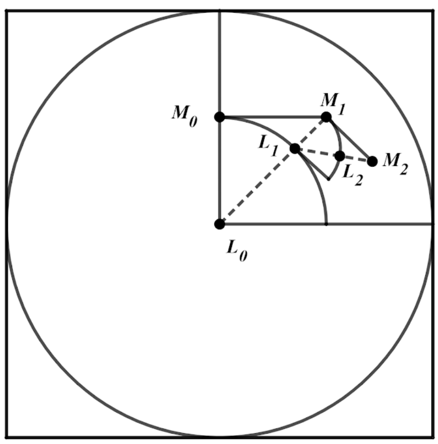

Fig. 8: Lew i człowiek na kwadratowej arenie, wygrywająca strategia człowieka.

Powyższe diagramy pokazują, że rezultaty przyjęcia omawianych wcześniej strategii człowieka - pierwszej i wygrywającej (trzeciej) - na arenie o kształcie kwadratu nie różnią się niczym od tych, które zostały otrzymane przy analizowaniu areny o kształcie koła i trójkąta równobocznego. Jeśli człowiek zdecyduje się poruszać wzdłuż ogrodzenia areny, czyli po obwodzie koła, trójkąta, lub kwadratu, zostanie złapany przez lwa. Jeśli natomiast będzie podążać ścieżką wyznaczoną przez Besicovitcha uda mu się uciekać przed zwierzęciem nieskończenie długo. Można wywnioskować, że pierwsza strategia byłaby nieefektywna dla każdej areny na planie wielokąta foremnego - skoro mężczyzna trzyma się ogrodzenia areny, lew złapie go obierając najkrótszą możliwą drogę (np. jedną ze stron trójkąta równoramiennego tak jak w przypadku pokazanym na Fig. 5) lub powoli zbliżając się płotu. Można również zauważyć, że trzecia, czyli wygrywająca strategia mogłaby zostać użyta na każdej zamkniętej przestrzeni, w której plan można wpisać koło. Oznacza to, że wygrywająca strategia zawsze byłaby skutecznym rozwiązaniem dla człowieka uwięzionego razem z dzikim zwierzęciem na arenie mającej kształt wielokąta.

Jeden człowiek - dwa lwy

W 1964 r. H. T. Croft udowodnił, że człowiek mógłby przetrwać w każdej n-wymiarowej przestrzeni z n-1 lwami. Nie udałoby mu się jednak przeżyć gdyby w tejże przestrzeni znajdowało się n lwów. Oznacza to, że nawet podążając ścieżką prof. Besicovitcha człowiek zostałby złapany, gdyby na arenie zamiast jednego były dwa lwy (arenę uważa się za przestrzeń dwuwymiarową, ponieważ człowiek i lwy poruszają się jedynie w poziomie).

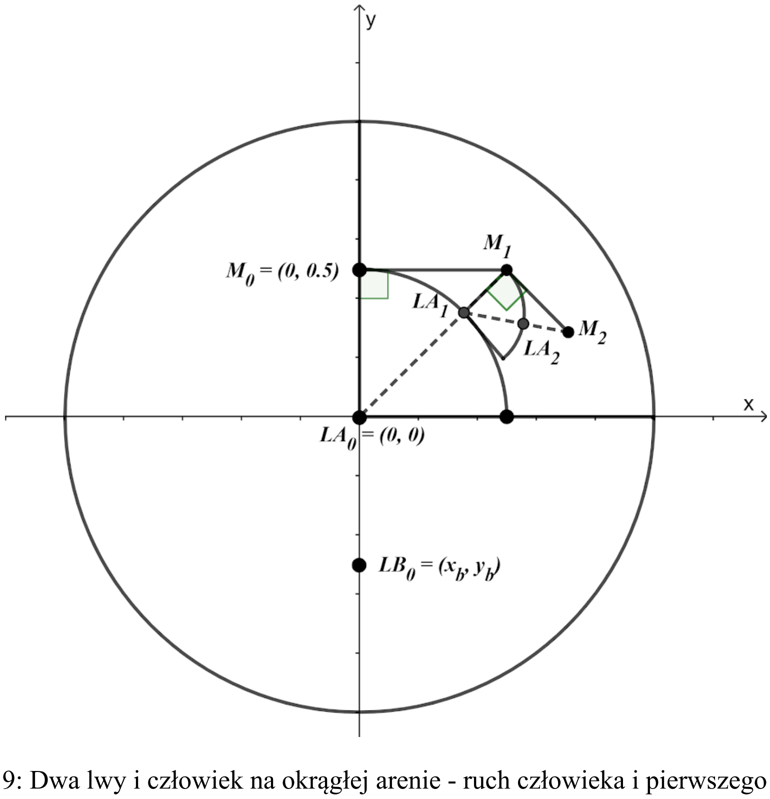

Fig. 9: Dwa lwy i człowiek na okrągłej arenie - ruch człowieka i pierwszego lwa.

Fig. 9 pokazuje początkowe pozycje człowieka i lwów oraz pierwsze dwa ruchy pierwszego lwa (*LA*) i człowieka. Jak widać, mężczyzna porusza się zgodnie z wygrywającą strategią, a pierwszy lew podąża za nim tak samo, jak zostało wyjaśnione wcześniej. Zaczyna bowiem ze środka i cały czas kieruje się w stronę uciekającego człowieka. Fig. 10 poniżej przedstawia ruch mężczyzny i drugiego lwa (*LB*), który zbliża się do niego z innej strony. Jego pozycja początkowa musi być różna od pozycji początkowej pierwszego lwa, ponieważ gdyby oba lwy umieszczone zostały pośrodku areny goniłyby człowieka w ten sam, instynktowny sposób i ich ścieżka byłaby taka sama. Należy pamiętać, że prędkości człowieka i lwów są równe, więc kolejne kroki drugiego lwa nie mogą być dłuższe od kolejnych kroków mężczyzny. Ruch drugiego lwa (*LB*) przedstawiony jest na Fig. 10 (analogicznie do ruchu pierwszego lwa ukazanego na Fig. 9, przerywane linie oznaczają odległość dzielącą w kolejnych krokach drugiego lwa i człowieka, a wycinki koła pokazują, jak daleko może posunąć się lew podczas pojedynczego kroku).

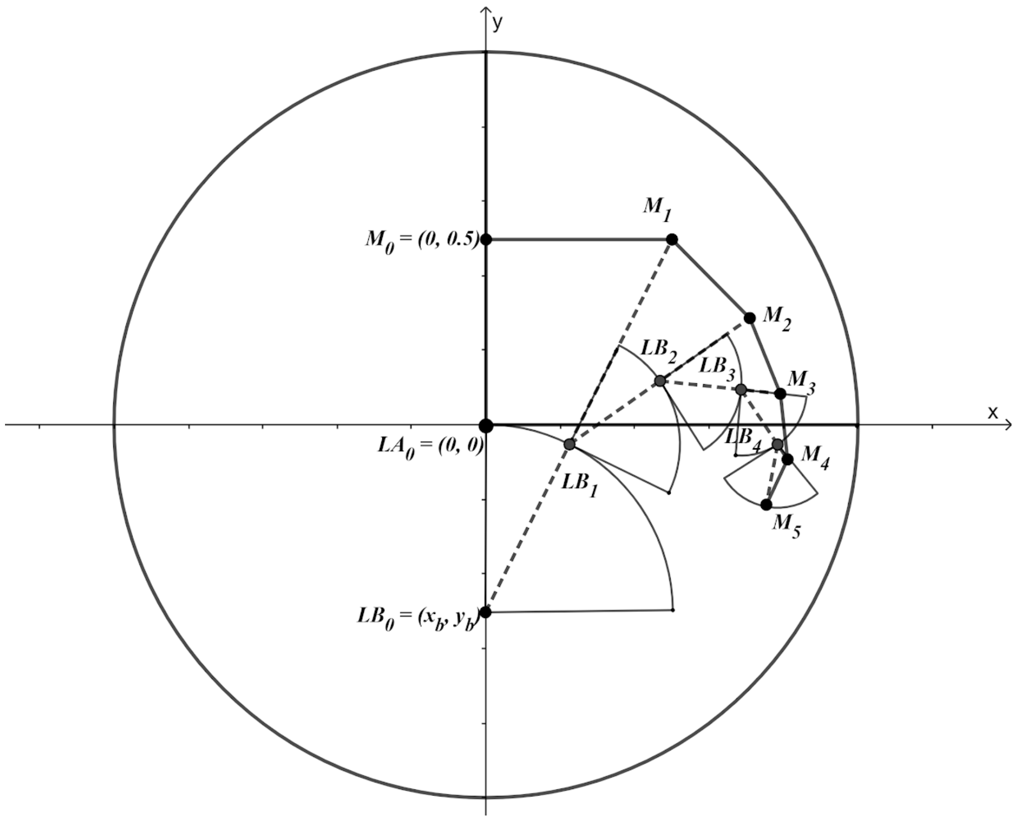

Fig. 10: Dwa lwy i człowiek na okrągłej arenie - ruch człowieka i drugiego lwa.

Patrząc na Fig. 10 można zauważyć, że po kilku kolejnych krokach drugi lew (*LB*) jest w stanie dotrzeć do człowieka - punkt, w którym po pięciu krokach znajduje się mężczyzna zawiera się w piątym wyrysowanym łuku. Pokazuje to, że drugi lew może złapać mężczyznę, nawet jeśli ten podąża ścieżką prof. Besicovitcha. Należy jednak pamiętać, że rycina ta nie jest dowodem na to, że dwa lwy zawsze złapią człowieka w dwuwymiarowej przestrzeni. Narysowany przeze mnie diagram jedynie ilustruje zachodzącą zależność i pokazuje, że faktycznie działa. Właściwy dowód można znaleźć we wspomnianym wcześniej artykule *„Lew i człowiek": Postscriptum*, napisanym w 1964 r. przez H. T. Crofta.

Wnioski

„Lew i Człowiek" to bardzo interesujący problem, którego rozwiązania udało się dokładnie objaśnić w powyższej pracy. Wygrywającą strategię człowieka, która pozwala mu nieskończenie długo uciekać przed dzikim zwierzęciem, udowodniono z pomocą artykułu napisanego przez Jarosława Górnickiego, skuteczność pozostałych strategii zostały przeze mnie rozważona samodzielnie. Dzięki wprowadzeniu drobnych zmian do problemu i dogłębnej analizie udało mi się odkryć, że zmieniając kształt obszaru, w którym człowiek jest zamknięty ze zwierzęciem, efektywność poszczególnych strategii nie zmienia się - człowiek zawsze zostanie złapany, jeśli podąży inną ścieżką niż ta, którą przedstawia Besicovitch. Pod koniec pracy udało mi się również pokazać, że jeśli na arenie znalazłby się jeszcze jeden lew, człowiek nie miałby szansy na przeżycie.

Problem Lwa i Człowieka ma wiele wariantów, alternatywnych postaci. Niektóre z nich zostały już rozwiązane, a część z nich wciąż pozostaje zagadką. Jednym z takich wariantów jest następujący problem: „Czy dwa lwy złapią człowieka na ograniczonym polu golfowym z wieloma jeziorami?".

Bibliografia

Barmak, J. (2018). Lion and man in non-metric spaces. *Mathematische Zeitschrift*, 290(3-4), pp.1165-1172.

Bollobás, B., Leader, I. and Walters, M. (2011). Lion and man—can both win?. *Israel Journal of Mathematics*, 189(1), pp.267-286.

Casini, M. and Garulli, A. (2017). An Improved Lion Strategy for the Lion and Man Problem. *IEEE Control Systems Letters*, 1(1), pp.38-43.

Croft, H. T. (1964). "Lion and Man": A Postscript. *Journal of the London Mathematical Society*, s1-39(1), pp.385-390.

Górnicki, J. (2013). *Lew i człowiek*. [online] DeltaMi. Available at: http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/analiza/2013/01/30/Lew_i_czlowiek/ [Accessed 1 Apr. 2019].

Sgall, J. (2001). Solution of David Gale's lion and man problem. *Theoretical Computer Science*, 259(1-2), pp.663-670.

Talwalkar, P. (2013). *The Man and the Lion Puzzle: Pursuit and Evasion Game Theory – Mind Your Decisions*. [online] Mindyourdecisions.com. Available at: https://mindyourdecisions.com/blog/2013/06/25/the-man-and-the-lion-puzzle-pursuit-and-evasion-game-theory/ [Accessed 27 May 2019].

Kraków, 26.02.2020

Opinia opiekuna
pracy matematycznej pt. „Lew i człowiek”
autorstwa Julii Galos

Julia Galos jest uczennicą klasy maturalnej VIII Prywatnego Akademickiego Liceum Ogólnokształcącego w Krakowie. Realizuje ona matematykę na poziomie rozszerzonym w programie matury międzynarodowej. Przedłożona na konkurs praca jest polskim tłumaczeniem jej pracy końcowej, będącej częścią egzaminu maturalnego. Tłumaczenie wykonane zostało przez uczennicę.
Temat pracy został zaproponowany przez autorkę pracy, natknęła się na niego w jednym z artykułów opublikowanych na stronie deltami.edu.pl. Uczennica samodzielnie przeanalizowała problem, zapoznała się z dostępną literaturą i zaproponowała rozważenie innych wersji problemu przy zmianie założeń - kształtu klatki czy liczby lwów.
Moja praca jako opiekuna sprowadziła się do konsultacji, poprawek redakcyjnych i zachęcenia do zamieszczenia dużej liczby rysunków pomagających czytelnikowi zwizualizować sobie problem, tak aby kolejne kroki były jasne i czytelne.

mgr Alicja Rozpędzka
VIII Prywatne Akademickie LO w Krakowie