

MATEMATYKA STAROŻYTNEGO EGIPTU



Autorzy:

Magdalena Kościelniak

Szkoła Podstawowa im. Wojciecha Rypla w Rabie Niżnej

Gabriela Oleksy

Szkoła Podstawowa im. Świętego Floriana w Glisnem

Opiekun: mgr Zofia Kościelniak

Wstęp

Jesteśmy dobrymi koleżankami od paru lat. Mimo że uczymy się w innych szkołach nasze wspólne zamiłowanie do matematyki wcale nam w tym nie przeszkadza. Mieszkamy w dwóch innych miejscowościach, jednak nasza Pani Zofia Kościelniak połączyła nasze zdolności matematyczne i wspólnie stworzyłyśmy „Matematykę Starożytnego Egiptu”. Przez ten cały czas gdy przygotowywałyśmy pracę, starałyśmy się zadbać o jak najmniejsze szczegóły, aby nasza praca była nie tylko dowodem geniuszu Egipcjan, ale też potrafiła wytłumaczyć ciekawe zagadnienia matematyczne, które dzisiaj są dla nas niesamowite. Pracę przygotowywałyśmy przez ponad dwa miesiące, a gdy już dopięłyśmy swego byłyśmy bardzo z siebie dumnie. Mamy nadzieję, że nasza praca będzie nie tylko zwykłą pracą matematyczną, ale też pokaże, że matematykę można zrozumieć na podstawie różnych hieroglifów czy też rysunków (dobrze się przy tym bawiąc). Nazywamy się Magdalena Kościelniak oraz Gabriela Oleksy i mamy wielki zaszczyt przedstawić państwu „Matematykę Starożytnego Egiptu”.

Krótką historia pisma starożytnego Egiptu

W okresie Starego Państwa, czyli ok. 2686 – 2181 p. n. e., Egipcjanie posługiwali się **hieroglifami** (od greckich słów święty i ryty). Było to pismo obrazkowe, w którym każdy rysunek wyobrażał jakieś słowo lub zgłoskę. W epoce Średniego Państwa, czyli ok. 2049 – 1778 p. n. e., pismo hieroglificzne zastąpiono prostszym **pismem** tzw. **hieratycznym**, w którym po każdym hieroglifie pozostało kilka charakterystycznych kresek, a hieroglifów używano tylko w wyjątkowo uroczystych okazjach. Wreszcie w epoce Nowego Państwa, czyli 1534 – 1085 p. n. e. powstaje skrócone **pismo** tzw. **demotyczne** (od greckiego lud).

Stosowane jako **znaki hieroglificzne** sylwetki ludzi lub zwierząt skierowane były w jedną lub drugą stronę, odczytywać je należało wychodząc im naprzeciw, tak żeby „napotykać ich wzrok”. Ponieważ ważną rolę odgrywały względy estetyczne, często napisom umieszczanym po obu stronach jakiegoś malowidła nadawano symetryczny kierunek. Pełne barw hieroglify biegły po jednej stronie z lewa na prawo, po drugiej odwrotnie, po obu stronach rzędy napisów kierowały się ku centrum sceny. Przy poziomym piśmie małe lub poziome znaki umieszczano jeden nad drugim, zamiast stawiać je w rzędzie; przy pionowym zapisie wysmukłe znaki stawiano jeden przy drugim, zamiast jeden nad drugim. Całość miała wyglądać ładnie. Egipcjanie pisali zazwyczaj od prawej do lewej, odwrotnie niż my, ale często także od góry na dół, albo od lewej do prawej.



Rys. 1 Hieroglify ze świątyni w Kom Ombo



Jedną z form pisma ukształtowaną w starożytnym Egipcie było **pismo hieratyczne**, które uważa się za uproszczoną formę pisma hieroglificznego. Owo uproszczenie polegało na ułatwieniu zapisu znaków, co w codziennym użytku było bardzo pomocne. Hieratyka używana była powszechnie, przede wszystkim jednak na potrzeby handlu. Stosowano w nim proste i pochyle znaki, stąd nazywa się je także *kursywą*. Pismo hieratyczne utrwalano najczęściej na zwojach i arkuszach papirusowych oraz ostrakonach. Stosowano

do tego pędzelek z trzciny i „czarnego tuszu”.

Rys. 2 Pismo hieratyczne

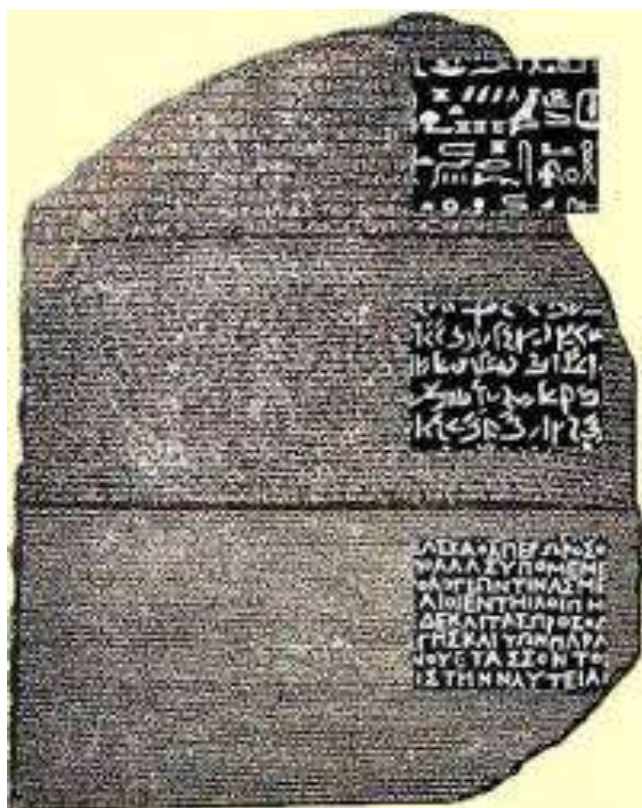
Pismo demotyczne (*demotika* ozn. grec. ludowe) ukształtowało się w VII w. p.n.e., stopniowo wypierając pismo hieratyczne. Było ono jeszcze bardziej uproszczone w stosunku do poprzednika. Nie miało charakteru ikonicznego, stosowano w nim mnóstwo skrótów, ligatur i nietypowych cech ortograficznych, które uniemożliwiają zestawienie go z hieroglifami. Demotyką pisano również horyzontalnie z prawej do lewej. Tak jak poprzednika, zapisywano demotykę na ostrakonach i papirusach, później na stelach kamiennych do napisów nagrobnych. Dokumenty demotyczne to głównie pisma o treści prawniczej, administracyjnej i handlowej.



Rys. 3 Pismo demotyczne

Najbardziej znanym przykładem zastosowania pisma demotycznego jest **Kamień z Rosetty**.

Kamień ten odkryty został w czerwcu 1799 r. nieopodal miasta położonego w Deltcie Nilu, zwanego w starożytności Rosetta, a obecnie al Raszid. Natrafili na niego francuscy saperzy z armii Napoleona, którzy mieli przygotowywać fundamenty pod budowę fortu.



Jest to fragment steli z czarnego bazaltu (o wymiarach - wysokość: 118 cm, szerokość: 77 cm, grubość: 30 cm, waga: 762 kg) zachowany w stanie szczątkowym. Płyta była częścią większej całości - brakuje prawdopodobnie 50 cm, znajdowała się w którejś ze świątyń egipskich.

Wypisana na niej inskrypcja pozwoliła na dokładniejsze określenie czasu jej powstania - dziewiąty rok panowania Ptolemeusza V Epifanesa - co odpowiada 27 III 196 r. p. Jest to kopia (być może nie jedyna) dekretu generalnego konsylium kapłanów egipskich oddająca część

królowi, z wyszczególnieniem przywilejów dla ludu i świątyń egipskich.

Rys. 4 Kamień z Rosetty

Szczególnie ważnym dla nauki był fakt, iż zawarto w nim tekst napisany w trzech rodzajach pisma:

- **hieroglifach,**
- **piśmie demotycznym,**
- **alfabecie greckim.**

Ponieważ z tych trzech języków greka była już znana zaistniała możliwość przetłumaczenia części hieroglificznej Kamienia, która niestety była najbardziej uszkodzona. Zabytek przechodził burzliwe dzieje, z Kairu trafił do Aleksandrii, gdzie na mocy traktatu pokojowego przeszli go Anglicy i wywieźli do Anglii, a ściślej do Londynu, obecnie przechowywany jest w British Museum. Zasługą Francuzów było podzielenie się z innymi naukowcami swym odkryciem, rozesłali oni bowiem po całej Europie reprodukcje kamiennego dokumentu w celu umożliwienia naukowemu światu, i nie tylko, prace nad tłumaczeniami tekstów. Ponieważ tekst grecki był znany, możliwe stało się odczytanie hieroglifów, czego dokonali w 1822 roku Jean-François Champollion i w 1823 roku Thomas Young.

Paleta Narmera

Starożytni Egipcjanie znali i stosowali wielkie liczby. Świadczy o tym dokument pochodzący sprzed około 3000 lat p.n.e. Jest nim pomnik wystawiony dla uczczenia zwycięstwa wojsk egipskich nad nieprzyjacielem. Jest to jedno z najstarszych znanych świadectw archeologicznych hieroglificznego pisma i numeracji egipskiej. Na pomniku napisane jest fonetycznie imię Narmera, króla, który zjednoczył Dolny i Górny Egipt oraz rzekomo przywiezione przez władcę łupy z jego zwycięskich wypraw. Odczytane na nim hieroglify podają liczbę wziętych jeńców na 120000 oraz zdobytych 400000 sztuk bydła rogatego i 422000 kóz.



Jak zapisywano liczby w starożytnym Egipcie?

Starożytni Egipcjanie, podobnie jak wiele innych ludów, zapisywanie liczb zaczęli od bardzo prostej || metody. Jedna pionowa || kreska oznaczała, |||| że policzono jeden przedmiot, dwie kreski - dwa przedmioty, trzy kreski - trzy, cztery kreski - cztery. Im większą liczbę trzeba zanotować, tym bardziej uciążliwy staje się ten sposób. Wyobraźmy sobie, że chcemy zapisać liczbę 78:



Mnóstwo kresek wymaga sporo pracy przy pisaniu. A przy odczytywaniu?

 1	 2	 3
 4	 5	 6
 7	 8	 9

Kiedy Egipcjanie rozwinęli swoje pismo, hieroglify, dla większych liczb wymyślili specjalne symbole. Liczby od 1 do 9 nadal zapisywano odpowiednią ilością pionowych kresek. Ale już 10 zapisywano specjalnym, pojedynczym znakiem – rysunkiem pięty  .

A następne liczby? Polskie „jedenaście” oznacza „jeden na dziesięcie”, czyli $10+1$, dwanaście to $10+2$, trzynaście to $10+3$. W podobny sposób spojrzeli na to Egipcjanie. Liczby następujące po 10 zapisywali rysując znak dziesiątki oraz odpowiednią liczbę znaków jednostek.

Podobnie „dwadzieścia” to dwie dziesiątki, dwadzieścia jeden to dwie dziesiątki i jeden, dwadzieścia dwa to dwie dziesiątki i dwa. „Trzydzieści” to trzy dziesiątki... i tak dalej aż do dziewięćdziesiąt dziewięć.

 10	 12	 19
 20	 22	 29
 90	 95	 99

Do zapisania liczby 100 trzeba by już było użyć dziesięciu symboli dziesiątki. Poradzono sobie z tym wprowadzając kolejny symbol, wyobrażający zwinięty sznur mierniczy. Podobnie jak w przypadku liczb od 11 do 99, liczby od 101 do 999 zapisywano używając odpowiedniej liczby znaków dla setek, dziesiątek i jednostek. Jak łatwo się domyślić, dla tysiąca wymyślono kolejny znak, przedstawiający kwiat lotosu. Z kolei dziesięć tysięcy symbolizował wizerunek palca wskazującego, sto tysięcy rysunek kijanki czy też ryby, zaś milion wyobrażała sylwetka klęczącego człowieka wznoszącego ręce w geście zdumienia.

				
100	1000	10 000	100 000	1 000 000

Jak widać, do zapisania liczby 348 trzeba było użyć 15 symboli: 3 symboli setki, 4 symbole dziesiątki i 8 symboli jednostki.



348

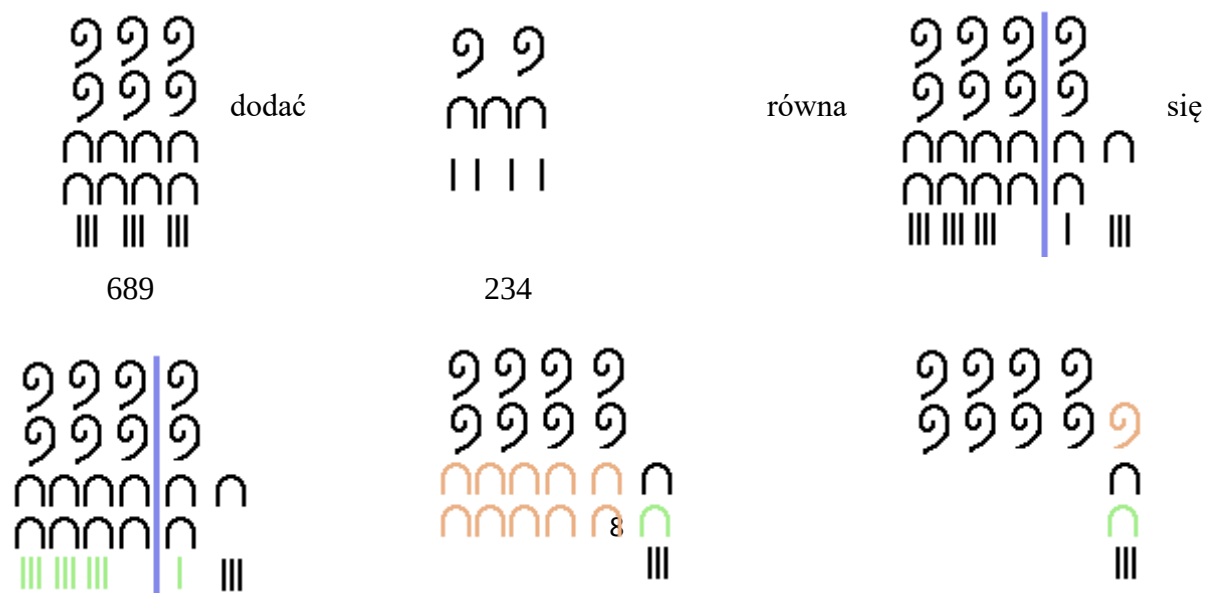


4622

W przeciwieństwie do naszego współczesnego, dziesiętnego pozycyjnego sposobu zapisu, w którym „348” oznacza inną liczbę niż „843”, w systemie stosowanym przez Egipcjan pojedynczy znak oznacza faktycznie liczbę, a nie cyfrę, więc zmiana kolejności ani wymieszanie symboli nie zmieniało wartości zanotowanej liczby.

Dodawanie liczb według Egipcjan

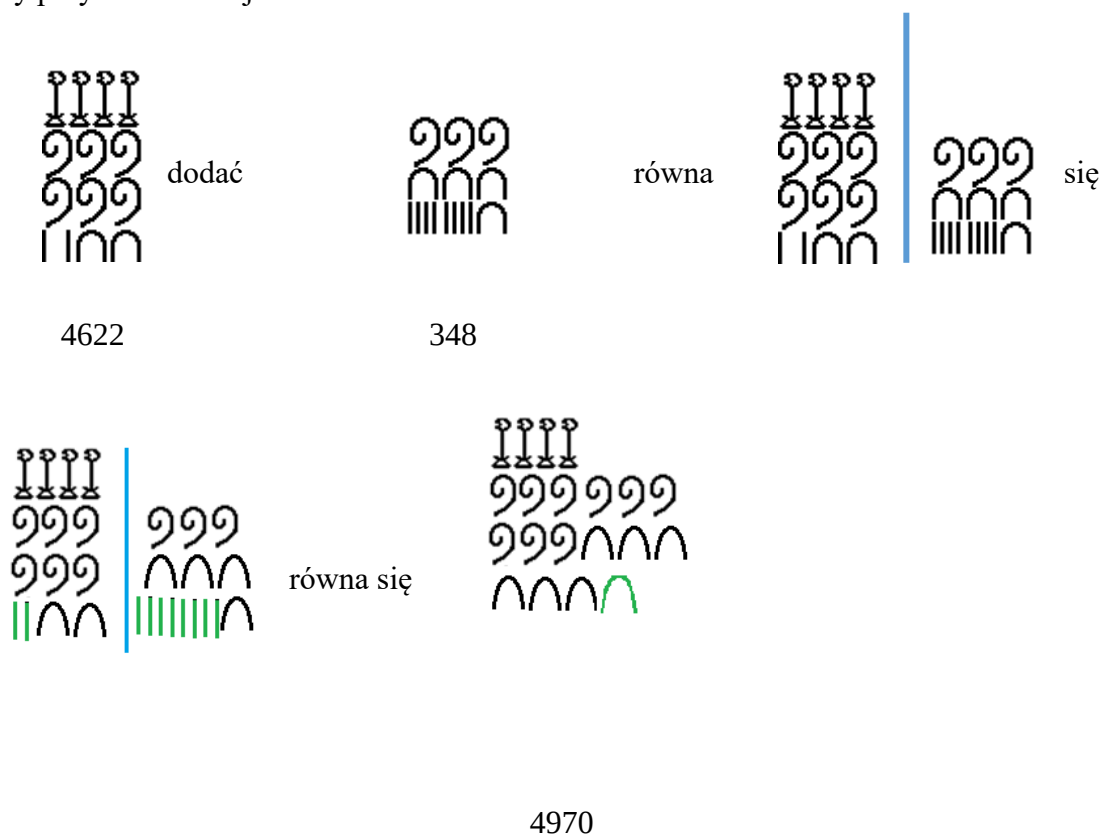
Egipcjanie dodawali liczby grupując symbole. Pierwszy przykład ilustruje dodawanie liczb 689 i 234.



równa się równa się

923

Następny przykład obrazuje dodawanie liczb 4622 i 348. Zatem:



A oto przykład zadania egipskiego:

Faraon Ramzes III podarował wielkiej świątyni Amona wołów oraz dzikich zwierząt rogowatych: oryksów, kozłów i gazel.

Porachuj skrybo, ile łącznie rogowatych zwierząt podarował świątyni władca?

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{|||||} & \text{|||||} & \text{|||||} & \text{|||||} & \text{|||||} & \text{|||||} & \text{|||||} \\
 10\,602 & + & 367 & = & 10\,969
 \end{array}$$



rogatych zwierząt.

Jak widać, dodawanie w systemie zapisu używanym w starożytnym Egipcie było równie proste jak obecnie, tylko że z braku cyfr często trzeba było rysować wiele jednakowych znaków. Zupełnie inaczej wygląda sprawa z mnożeniem. Przemnożenie np. liczby 37 przez 2 to to samo, co dodanie do siebie $37+37$, więc mnożenie przez dwa było równie łatwe, co dodawanie. Jak jednak poradzić sobie z mnożeniem, kiedy obie liczby są całkiem spore?

Ile jest ryb w 16 koszach, jeśli każdy kosz mieści 27 ryb, teoretycznie można by było obliczać rysując siedemnaście razy symbole składające się na liczbę 27, a następnie grupując to wszystko... Niezbyt zachęcające!



10

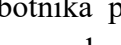
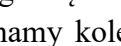
rysunków liczby 27 można równie dobrze wykonać cztery podwojenia. Podwojenia czyli zwykłe dodawania:

$27 + 27 = 54$	$(= 27 \times 2)$	dwa kosze ryb
$54 + 54 = 108$	$(= 27 \times 4)$	cztery kosze ryb
$108 + 108 = 216$	$(= 27 \times 8)$	osiem koszy ryb
$216 + 216 = 432$	$(= 27 \times 16)$	szesnaście koszy ryb

Metodą podwajania, czyli dodawania takich samych liczb, uzyskaliśmy wynik mnożenia. Dobrze się złożyło, że mieliśmy przemnożyć przez 16, liczbę, która powstaje przez same podwojenia. A co zrobić w przypadku mnożenia przez inną liczbę?

Przykład mnożenia:

Każdy z robotników powinien dostać  miar zboża. Ilu miar zboża potrzebuje dla swoich pracowników nadzorca grupy  robotników?

I	
II	
III	
III	
I II III	
	
	
	
I II III	
	
	
	

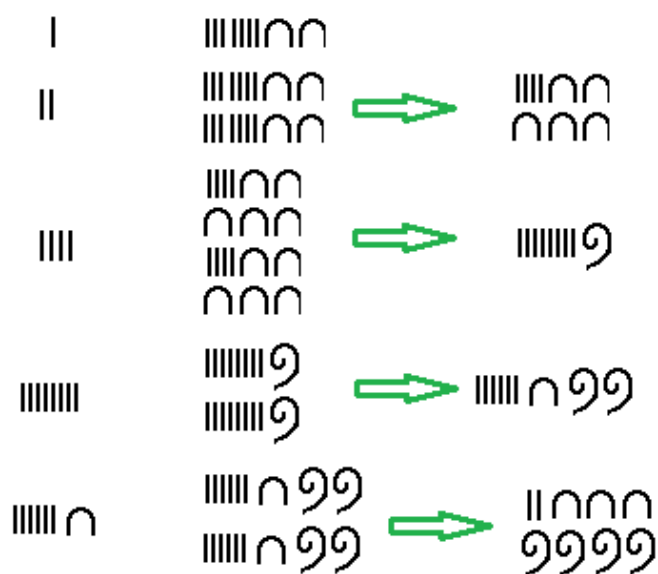
W pierwszym rzędzie widzimy, że dla 1 robotnika potrzeba 13 miar zboża. Drugi rząd powstał przez podwojenie obu liczb z pierwszego rzędu. Wynika z niego, że dla 2 robotników potrzeba 26 miar zboża. W trzecim rzędzie mamy kolejne podwojenie – dla 4 robotników potrzeba 52 miary zboża. Czwarty rząd nie zawiera liczby robotników, bo służy tylko uporządkowaniu zapisu liczby 52 uzyskanej z prostego podwojenia symboli składających się na liczbę 26.

Ale przecież 4 robotników i 2 robotników i jeszcze 1 robotnik to razem 7 robotników, czyli tyłu, dla ilu mamy zapewnić żywność! Skoro łączna liczba robotników jest taka, o jaką nam chodzi, to również łączna liczba miar zboża dla nich. W kolejnym wierszu zapisu przepisujemy po prostu wszystkie symbole miar zboża dla 1, 2 i 4 robotników. Na koniec w uzyskanej sumie zamieniamy dziesięć symboli jednostek na symbol dziesiątki. Otrzymany wynik brzmi: 9 dziesiątek oraz 1 jednostka, czyli 91. Jeśli każdy robotnik dostaje po 13 miar zboża, to dla 7 robotników potrzeba 91 miar zboża.

A co zrobić w innych przypadkach? Weźmy przykład z większymi liczbami, które nie mają własności takiej jak 16 ani 7.

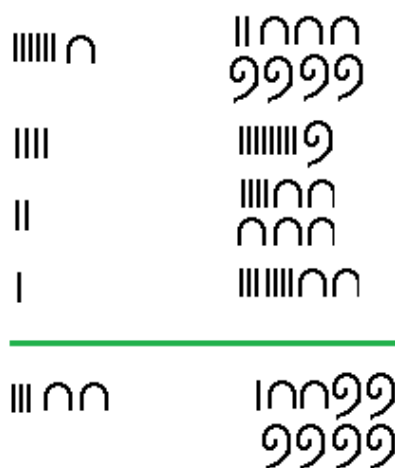
Nadzorca budowy postanowił za wzorową pracę nagrodzić  rzemieślników, przyznając każdemu z nich po  miar pszenicy. Ile miar pszenicy należy wydać ze spichlerza?

Szukamy zatem, ile to miar pszenicy: dla każdego z 23 ludzi po 27 miar? W starożytnym Egipcie przy obliczaniu iloczynu trzymano się metody podwajania liczb, połączonej z sumowaniem odpowiednich, pośrednich podwojonych liczb.



Dla jednej osoby — 27 miar, dla dwóch osób — 54 miary, dla czterech osób — 108 miar... Ponieważ $16+16=32$ jest większe od 23, czyli liczby osób, które mają otrzymać ziarno, nie ma potrzeby obliczać kolejnego podwojenia, tyle podwojeń nam wystarczy.

Wybieramy wiersz, w kolumnie znajduje się nieprzekraczająca 23. Jest mnożenia 27×16 . Ale 16 do całkowitego wyniku pewnej liczby dwudziestek tym samym sposobem: czy



którym w prawej największa liczbę to 16. Znamy wynik jest mniejsze od 23, więc brakuje nam jeszcze siódemek. Posłużymy się poprzednia liczba w

kolumnie, czyli 8, dodana do 16 nie przekroczy 23? $16+8=24$, więc za dużo, ten wiersz pominiemy. Kolejna liczba to 4: $16+4=20$, nie przekracza 23, więc ją bierzemy. Po 27 miar zboża dla rzemieślnika daje dla 20 rzemieślników 540 miar zboża. Ponieważ 20 jest mniejsze od 23, do całkowitego wyniku brakuje zboża dla pozostałych 3 osób. Należy kontynuować tą samą metodą, zaczynając od możliwie największego wybierać kolejno z tablicy coraz mniejsze mnożniki, tak aby ich suma była wreszcie równa 23. Całość obliczeń można krótko zapisać w dwóch kolumnach:

Odp.: Należy wydać 621 miar pszenicy.

Papirus Rhinda

Z kultury Egiptu nie zachowało się wiele teksów matematycznych, a jednym z najcenniejszych jest tzw. Papirus Rhinda. Prawie wszystko co jest wiadome o matematyce egipskiej, pochodzi z tego papirusu. Jest to dwustronnie zapisany zwój o długości 5,5 m i szerokości 33 cm. Na jednej jego stronie znajduje się 87 zadań o rosnącym stopniu trudności wraz z rozwiązaniami, a na drugiej tablice liczb postaci $2:n$ dla wszystkich n nieparzystych od 3 do 101. Papirus Rhinda prawdopodobnie został wykonany w XVII w. p.n.e. na polecenie króla Ahmesa. Został on odnaleziony w 1858r. przez Aleksandra Henriego Rhinga podczas nielegalnych wykopalisk w Ramesseum, czyli kompleksie świątyń zbudowanych przez Ramzesa II w Tebach Zachodnich. Obecnie znajduje się w Muzeum Brytyjskim, do którego trafił sprzedany przez pełnomocnika Rhinda, Davida Bremnera, w 1865 roku. Niewielkie jego fragmenty znajdują się w Muzeum Brooklińskim w Nowym Jorku.

Papirus został po raz pierwszy przetłumaczony i wydany drukiem w 1877 r., zaczyna się od słów: „*Przepis do osiągnięcia poznanie wszelkich rzeczy ciemnych ... wszelkich tajemnic,*

które są zawarte w przedmiotach. Ułożona była ta księga w roku 33, Mesori dnia ... za króla Górnego i Dolnego Egiptu RA-A-US życie dającego, według wzoru starych pism, które wygotowane były za czasów króla (RA-EN-M-AT). Oto pisarz Ahmes pisał kopię tę.”



Rys. 6 Papirus Rhinda

Zadania są w nim sklasyfikowane nie według metod (np. zadania na proporcje, równania liniowe itd.) lecz według tematów. Np. zadania na wypiek chleba można ująć w jedną klasę, zadania na objętość zbiorników i naczyń - w drugą. W ten sposób rozwiązywanie zadań pierwszej grupy opierało się na zależności proporcjonalnej, a drugiej na wzorach na objętość bryły. Niekiedy podane są sprawdzenia do znalezionej odpowiedzi. Do celów ćwiczebnych układano zadania o treści rozrywkowej, nie mające bezpośredniego zastosowania praktycznego, albo też mające tylko postać zadań praktycznych.

Ułamki egipskie

Egipcjanie znali również ułamki, ale kiedy je odkryto nie jesteśmy w stanie odpowiedzieć, podobnie jak w przypadku liczb naturalnych. Wiemy jednakże z całą pewnością, że najwcześniej poznanymi spośród wszystkich ułamków są połowa i ćwierć. Oprócz znaków dla liczb całkowitych Egipcjanie mieli również specjalne hieroglify dla ułamków postaci

i dla ułamka . Podobnie jak współcześnie, posługiwali się oni do zapisu ułamków tymi samymi znakami hieroglificznymi, co do wyrażenia liczb naturalnych. Dla odróżnienia dorysowanie znaku owalu obok lub nad hieroglifem, było chyba początkiem ułamków, ponieważ powodowało to, że liczbę taką należało tak odczytać jako odwrotność. Innymi słowy, owal nad hieroglifem oznacza to samo, co dziś wykładnik: -1. Egipcjanie, ze

względem na łatwość zapisywania, używali jedynie ułamków prostych. Pozostałe ułamki przedstawiali jako sumy różnych, koniecznie prostych ułamków.



.



.



.



.

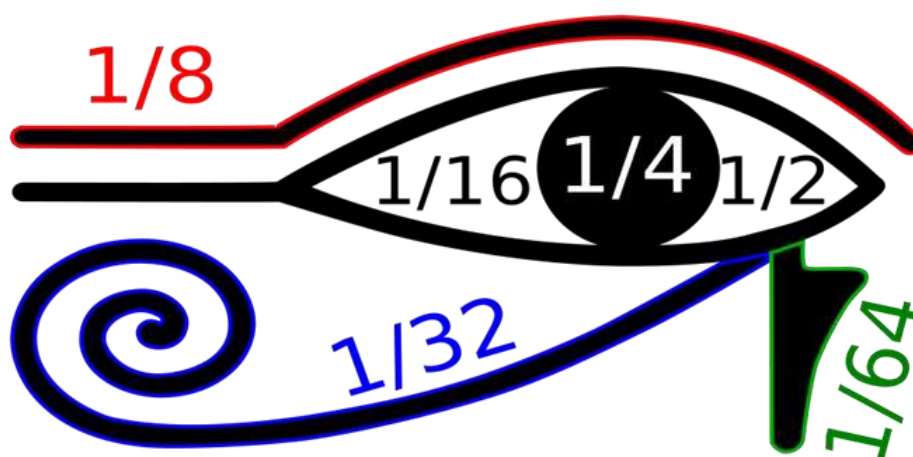


.

Egipcjanie ułożyli tablicę rozkładu dla ułamków postaci $\frac{2}{n}$, ponieważ przy dzieleniu podstawowym działaniem było podwajanie. Od takiej tablicy zaczyna się papirus Rhinda.

Oko Horusa

Oko Horusa inaczej można określić jako „Oko Uadżet” lub „Oko księżycowe” w mitologii staroegipskiej symbol ten oznaczał odrodzenie i powrót do zdrowia. W okresie Starego Państwa Egipcjanie uważali za oko najważniejszym symbolem, który zawsze ich chronił. Jest to prawe oko boga Horusa, które oznaczało Słońce i odpowiedzialne było za aktywność oraz przyszłość. Natomiast lewe oko bóg stracił podczas walki z Setem, symbolizowało Księżyc odpowiadając za pasywność i przeszłość. W Papirusie Matematycznym Rhinda możemy znaleźć tabele pt. „Horus Eye frakcje”.



Rys. 7 Oko Horusa

$$+ + + + + = 1 -$$

Uzasadnienie równości:

$$\frac{32}{64} + \frac{16}{64} + \frac{8}{64} + \frac{4}{64} + \frac{2}{64} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

$$1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

Starożytny egipski system miar stanowi kolejny przykład znaków liczbowych rozumianych jako spójny system. Gay Robins i Charles Shute opisali tę serię środków w swojej książce „The Rhind Mathematical Papyrus”:

„Wspólną jednostką objętości używaną do pomiaru ilości ziarna lub mąki był hekat, w przybliżeniu równy 4,8 litra lub nieco ponad brytyjski galon. W przypadku mniejszych ilości hekat można stopniowo zmniejszać o połowę, uzyskując frakcje / 2, / 4, / 8, / 16, / 32 i / 64. Są one znane jako frakcje oka Horusa, ponieważ zostały napisane charakterystycznymi znakami przypominającymi części oka sokoła boga Horusa.”

Te frakcje we współczesnej terminologii tworzą zbieżny postęp geometryczny sześciu wyrazów, przy czym pierwszy wyraz jest równy wspólnemu stosunkowi.

Problem nr 79 Papirusu Rhinda wyjaśnia, że Egipcjanie byliby w stanie zsumować serię do 63

64. Co znamienne, hieroglif Horusa-Oko i jego składniki hekat zawsze pomijają źrenicę, która byłaby potrzebna do uzupełnienia oka.

„Dziwne, że Egipcjanie opisali źrenicę oka jako „białą”, chociaż ta część oka wcale nie ma tego koloru. Białą był kolorem czystości i świętości.” Rzeczywisty kolor źrenicy jest czarny. Chociaż czerń może oznaczać regenerację i płodność, tak jak w „Czarnej Krainie”, która była starożytnym egipskim imieniem Egiptu, czerń była przede wszystkim kolorem nocy i śmierci oraz świata podziemnego, a wypełnione czernią koło reprezentowało czarną dziurę niebyt, w którym świat się rozpuści pod koniec czasu. Trzeba

przyznać, że nic nie dowodzi, że starożytni badacze liczb wiedzieli, że seria musi kontynuować do nieskończoności, aby zsumować brakującą część. To, że seria Horus Eye zawiera tylko sześć elementów i potrzebuje magicznie uzyskanej siódmej części, aby ta boska jednostka była kompletna, nie było zatem spowodowane brakiem umiejętności obliczeniowych wśród faraonów skrybów. Ten system może być oparty na tych samych powodach, dla których wspólny łokieć miał sześć dłoni długości i potrzebował siódmej dłoni, aby uczynić go królewskim, a tym samym doskonałym lub kompletnym łokciem, jednostką miary stosowaną do wszystkich świętych konstrukcji.

Zadania z papirusu Rhinda

Książka I – „Arytmetyka i algebra”

Pierwsza część papirusu Rhinda zawiera tabele referencyjne i zbiór 21 problemów arytmetycznych i 20 algebraicznych. Problemy zaczynają się od prostych wyrażeń ułamkowych, po których następują problemy z uzupełnianiem (*sekem*) i bardziej *złożone* równania liniowe (problemy *aha*).

W pierwszej części papirusu znajdziemy rozkład ułamków postaci .

Po tej tabeli następuje znacznie mniejsza, maleńka tabela wyrażen ułamkowych dla liczb od 1 do 9 podzielonych przez 10. Na przykład podział 7 na 10 jest rejestrowany jako:

7 podzielone przez 10 daje .

Po tych dwóch tabelach papirus rejestruje 91 problemów, które dotyczą algebry arytmetycznej i elementarnej. Zadania dotyczą np. podziału pewnej liczby bochenków chleba przez 10 mężczyzn i zapisują wynik w ułamkach jednostkowych lub pokazują jak pomnożyć

. . .

wyrażenia i przez różne ułamki. Inne zadania

dotyczą odejmowania oraz zawierają problemy „aha”- czyli równania liniowe (np. $x +$

$x +$ $x = 2$). Pozostałe problemy dotyczą podziałów hekat, która jest starożytną egipską jednostką objętości lub wykorzystują postępy arytmetyczne.

Książka II – „Geometria”

Problemy 41–46 pokazują, jak znaleźć objętość zarówno cylindrycznych, jak i prostokątnych spichlerzy.

Problem 47 to tabela z ułamkowymi równościami, które reprezentują dziesięć sytuacji, w których fizyczna objętość „100 czterokrotnie hekatów” jest podzielona przez każdą z wielokrotności dziesięciu, od dziesięciu do stu. Iloraz wyrażony jest w ułamkach oka Horusa, czasem także przy użyciu znacznie mniejszej jednostki objętości zwanej „czterokrotnym ro”. Czterokrotny *hekat* i czterokrotny *ro* to jednostki objętości uzyskane z prostszego hekat i *ro*, tak że te cztery jednostki objętości spełniają następujące zależności:

$$1 \text{ czterokrotny hekat} = 4 \text{ hekat} = 1280 \text{ ro} = 320 \text{ czterokrotny ro}.$$

Problemy 48–55 pokazują, jak obliczyć obszary figur. Problem 48 jest znaczący, ponieważ zwięźle oblicza powierzchnię koła przez przybliżenie π . W szczególności problem 48 wyraźnie pokazuje, że „powierzchnia koła odpowiada powierzchni jego kwadratu w stosunku 64/81”. Zatem π w przybliżeniu wynosi 256/81. Inne problemy pokazują, jak znaleźć obszar prostokątów, trójkątów i trapezów.

Sześć ostatnich problemów związanych jest ze zboczami piramid. Zadania mają związek z terminem *seked* czyli nachyleniem piramidy. Przytoczmy tu następujące zadanie:

Jeśli piramida ma wysokość 250 łokci, a bok jej podstawy ma 360 łokci, to ile wynosi *seked*?

Rozwiązanie problemu podano jako stosunek połowy boku podstawy piramidy do jej wysokości lub stosunek wybiegu do jej powierzchni. Innymi słowy, ilość znaleziona dla *seked* jest cotangensem kąta do podstawy piramidy i jej powierzchni.

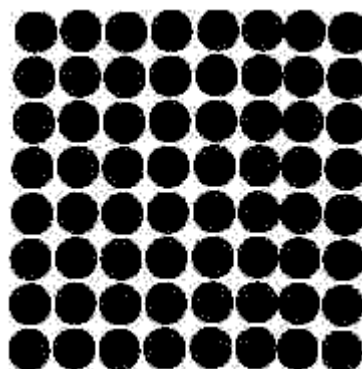
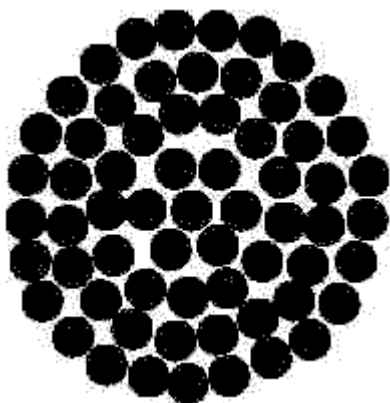
Książka III – „Miscellany”

Trzecia część papirusu Rhinda składa się z pozostałych 91 problemów, które nie mają charakteru matematycznego. Ta ostatnia sekcja zawiera bardziej skomplikowane tabele danych (które często obejmują frakcje oka Horusa), kilka problemów *pefsu*, które są podstawowymi problemami algebraicznymi dotyczącymi przygotowywania posiłków, a nawet zadania zabawne, które sugerują postępy geometryczne, szeregi geometryczne oraz pewne późniejsze problemy i zagadki w historii. Trzecia część papirusu Rhinda jest zatem rodzajem pomyłki, opartej na tym, co zostało już przedstawione.

Wprowadzenie do zadania z papiirusu Rhinda, który ustalał wartość liczby π .

1 *khet* ma 100 łokci, a 1 metr to około 2 łokcie. *Setat* jest to pomiar powierzchni równej, co nazwalibyśmy kwadratowy khet.

Egipcjanie łatwo zauważyli, że pole kwadratu o 8 jednostkach na boku można przekształcić, aby uzyskać prawie koło o średnicy 9.



Problem 50

Okrągłe pole ma średnicę 9 khet. Jaki jest jego obszar?

Pisemne rozwiązanie mówi: odejmij $\frac{1}{9}$ średnicy, która pozostawia 8 khet. Obszar ten jest pomnożony przez 8 razy 8 czyli 64 setat.

Uzasadnienie współczesne:

d – średnica

$d = 9$ khet

$$d - \frac{1}{9}d = 9 - \frac{1}{9} \cdot 9 = 8$$

$$P = 8 \cdot 8 = 64$$

Ze wzoru na pole koła otrzymujemy

$$\pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{d^2}{4} = \pi \cdot \frac{81}{4}$$

Z drugiej strony mamy

$$64 = \pi \cdot \frac{81}{4}$$

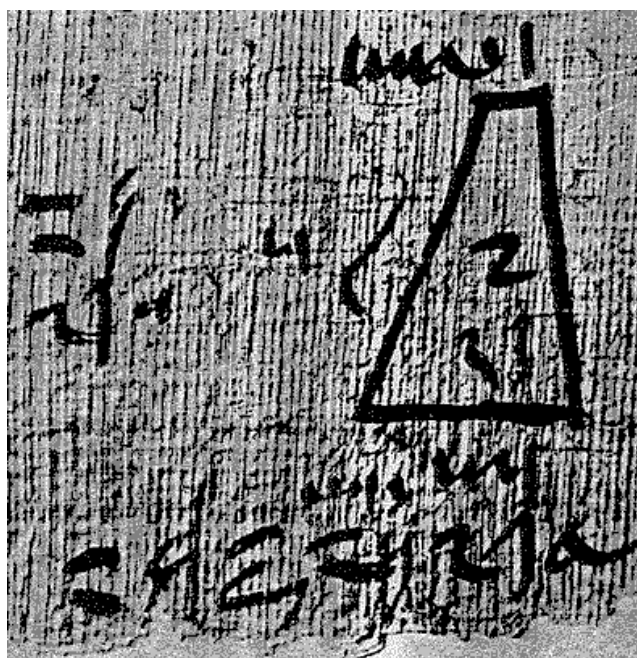
$$\pi = 64 \cdot \frac{4}{81} = \frac{256}{81} = 3 \frac{13}{81}$$

Rozkładając na ułamki proste mamy

$$\pi = 3 + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} \sim 3,1605$$

Papirus Moskiewski

Drugi papirus tzw. Papirus moskiewski ma 5,44 m długości 8 cm szerokości. Zwój ten zawiera 25 zadań. Merytoryczna zawartość obu papirusów jest taka sama. Zadania miały związek z życiem, z praktycznym zastosowaniem matematyki. Papirus Moskiewski został skopiowany przez nieznanego skrybę (ok. 1850 p.n.e). Został sprowadzony do Rosji w połowie XIX wieku i znajduje się w Muzeum Sztuk Pięknych w Moskwie.



Rys. 8 Papirus Moskiewski

Problemy w papirusie moskiewskim nie mają określonej kolejności, a rozwiązania problemów dostarczają znacznie mniej szczegółów niż w papirusie matematycznym Rhinda. Papirus jest dobrze znany z niektórych problemów z geometrią. Problemy 10 i 14 obliczają odpowiednio pole powierzchni i objętość skorupy. Pozostałe problemy są bardziej powszechne w przyrodzie.

Problemy z częściami statku

Problemy 2 i 3 są problemami części statku. Jeden z problemów oblicza długość steru statku, a drugi oblicza długość masztu statku, biorąc pod uwagę, że jest to $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ długości kłody cedrowej o pierwotnie 30 łokciach.

Problemy z Aha



Problemy Aha polegają na znalezieniu nieznanymi ilości (zwanymi Aha), jeśli podana jest suma ilości i jej części. Problemy 1, 19 i 25 papyrusu moskiewskiego to problemy Aha. Na przykład problem 19 wymaga obliczenia ilości pobranej 1 i $\frac{1}{2}$ razy i dodanej do 4, aby uzyskać 10. Innymi słowy, we współczesnej notacji matematycznej należy rozwiązać równanie

co daje nam

$$x = 4$$

Problemy z Pefsu

Większość problemów to problemy z pefsu: 10 z 25 problemów. Pefsu mierzy siłę piwa wykonanego z hekata ziarna

$$\text{Pefsu} = \frac{\text{liczba bochenków chleba (lub dzbanów piwa)}}{\text{liczba hekatów ziarna}}$$

Wyższa liczba pefsu oznacza słabszy chleb lub piwo. Numer pefsu jest wymieniony na wielu listach ofert.

Problem 8 tłumaczy się jako:

- (1) Przykład obliczenia 100 bochenków chleba pefsu 20
- (2) Jeśli ktoś ci powie: „Masz 100 bochenków chleba pefsu 20
- (3) do zamiany na piwo z pefsu 4
- (4) jak piwo $\frac{1}{2} \frac{1}{4}$ słodu ”
- (5) Najpierw obliczyć ziarno wymagane na 100 bochenków chleba pefsu 20
- (6) Wynik to 5 hekat. Następnie zastanów się, czego potrzebujesz do szklanki piwa takiej jak piwo o nazwie $\frac{1}{2} \frac{1}{4}$ słodu
- (7) Wynikiem jest $\frac{1}{2}$ hekatu potrzebne do odklejenia piwa wykonanego z ziarna górnego Egiptu.
- (8) Oblicz $\frac{1}{2}$ z 5 hekat, wynikiem będzie $2 \frac{1}{2}$

- (9) Weź to $2 \frac{1}{2}$ cztery razy
 (10) Wynik to 10. Następnie mówisz mu:
 (11) „Oto ilość piwa jest poprawna”.

Problemy z Baku

Problemy 11 i 23 to problemy Baku. Obliczają one wydajność pracowników.

Problem 11 Wyjaśnia, jeśli ktoś przynosi 100 logów o wymiarach 5 na 5, to ile logów o wymiarach 4 na 4 to odpowiada?

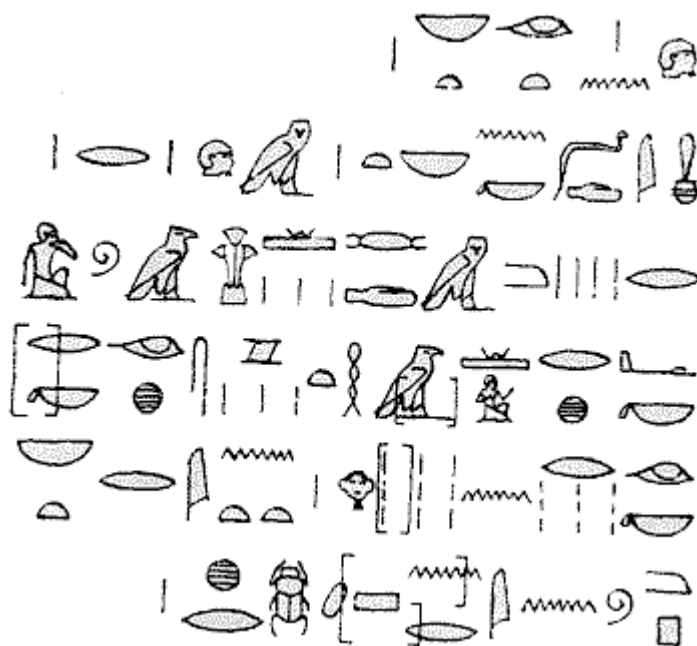
Problem 23 Znajduje wyjście szewca, biorąc pod uwagę, że musi on ciąć i ozdabiać sandały.

Problemy z geometrią

Siedem z dwudziestu pięciu problemów to problemy z geometrią i obejmują one obliczanie obszarów trójkątów, znajdowanie pola powierzchni półkuli (problem 10) i znajdowanie objętości frustum (ściętej piramidy).

Problem 10

Obliczanie pola powierzchni kosza



Przykład obliczenia [pola powierzchni] kosza [półkuli].

2

3

4

5

6

7

8

9

28



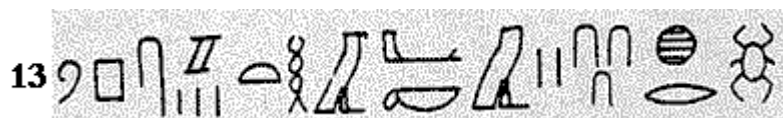
Znajdź resztę tego 8



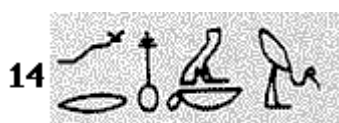
Po odjęciu $2/3 + 1/6 + 1/18$. Dostajesz $7 + 1/9$.



Pomnóż $7 + 1/9$ przez $4 + 1/2$.



Dostajesz 32. Oto jego powierzchnia [obszar]!



Znalazłeś to poprawnie.

Współczesne uzasadnienie wykorzystujące wzór na pole powierzchni półkuli:

$$P_c = 2\pi r^2$$

niech

$$d = 4 \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \text{ oraz } \pi = \frac{256}{81}$$

zatem

$$r = \frac{9}{4}$$

Podstawiając do wzoru mamy

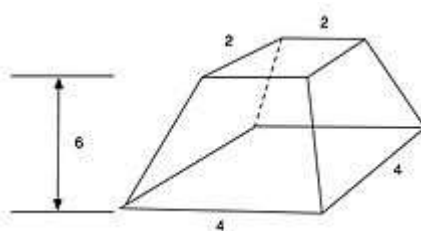
$$P_c = 2 \cdot \frac{256}{81} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^2$$

$$P_c = \frac{512}{81} \cdot \frac{81}{16} = 32$$

Co należało wykazać.

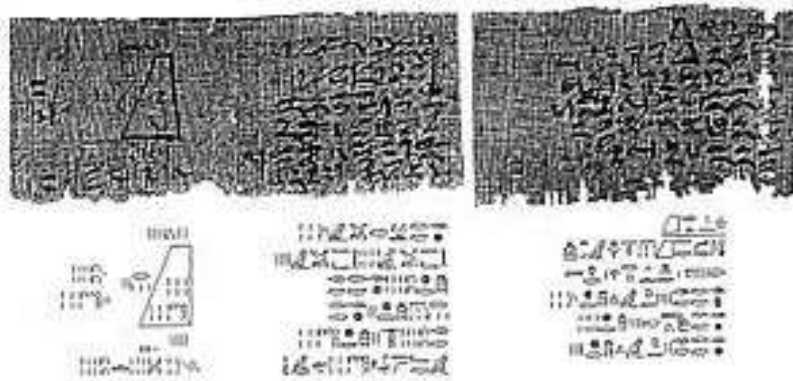
Problem 14

Problem 14 mówi, że piramida została obcięta w taki sposób, że górny obszar jest kwadratem o długości 2 jednostek, dolny kwadrat o długości 4 jednostek, a wysokość 6 jednostek, jak pokazano. Objętość wynosi 56 jednostek sześciennych, co jest poprawne.



Tekst przykładu przebiega w następujący sposób:

„Jeśli powiesz: ścięta piramida 6 dla wysokości w pionie o 4 na podstawie o 2 na górze: masz wyrównać 4; wynik 16. Masz podwoić 4; wynik 8. Masz wyrównać to 2; wynik 4. Masz dodać 16 oraz 8 i 4; wynik 28. Masz wziąć $1/3$ z 6; wynik 2. Musisz wziąć 28 dwa razy; wynik 56. Widzisz, to jest 56. Znajdziesz [to] rację”.



Rys. 9 Papirus Moskiewski

Współczesne uzasadnienie:

Rozwiązanie problemu wskazuje, że Egipcjanie znali prawidłowy wzór do uzyskania objętości ściętej piramidy :

$$V = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2)$$

Podstawiając wymiary ściętej piramidy do wzoru otrzymujemy

$$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot (4^2 + 4 \cdot 2 + 2^2)$$

$$V = 2 \cdot (16 + 8 + 4)$$

$$V = 56$$

Co kończy uzasadnienie.

Papirus berliński

Jeden z dwóch problemów matematycznych na Papirusie dostarcza dowodów na to, że starożytni Egipcjanie znali twierdzenie Pitagorasa .



Rys. 10 Papirus Berliński

Problem 1

Powiedziano nam, że pole kwadratu 100 łokci jest równe polu dwóch mniejszych kwadratów,

bok jednego kwadratu wynosi drugiego. Jakie są boki dwóch nieznanych kwadratów?

Współcześnie wyrażalibyśmy to jako

$$x^2 + y^2 = 100 \quad \text{i} \quad x = y.$$

Nowoczesne rozwiązanie w tej formie można przedstawić jako

$$(y)^2 + y^2 = 100$$

oznacza

$$(1 + \frac{25}{16}) y^2 = 100$$

czyli

$$y^2 = \frac{16}{25} \cdot 100 = 64$$

zatem

$$y = 8 \quad \text{i} \quad x = 8 = 6.$$

Jednak większość tłumaczy uważa, że Egipcjanie postrzegali ten problem w sposób, w jaki wykonujemy równania

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$4x - 3y = 0$$

Czym są x i y ?

Oto ich rozwiązanie. Załóżmy, że kwadrat pierwszej strony y ma wartość 1 łokcia. Wtedy druga

strona x będzie wynosić . Wtedy $y^2 = 1$ i używając mnożenia egipskiego, określamy x^2 za pomocą

1

*

*

Więc

$$x^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{16}.$$

Zatem

$$x^2 + y^2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$$

teraz

$$\text{ i } 100^{\frac{1}{2}} = 10$$

.

Podziel 10 przez , a otrzymasz 8 (patrz metoda problemu 24).

Otrzymujemy $y = 8$ i $x = 6$.

Problem 2.

Powiedziano ci, że pole kwadratu 400 łokci odpowiada powierzchni dwóch mniejszych

kwadratów, bok jednego kwadratu wynosi drugiego. Jakie są boki dwóch nieznanych kwadratów?

Współczesne rozwiązanie

$$x^2 + y^2 = 400 \quad \text{i} \quad x = \quad y.$$

$$(\quad y)^2 + y^2 = 400$$

oznacza

$$(1 + \quad) y^2 = (\frac{25}{16}) y^2 = 400$$

czyli

$$y^2 = \frac{16}{25} \cdot 400 = 256$$

zatem

$$y = 16 \quad \text{i} \quad x = \quad 16 = 12.$$

Boki szukanych kwadratów wynoszą 16 i 12.

Matematyczne tajemnice Piramidy Cheopsa

Wielka Piramida Cheopsa została ułożona z geometryczną precyzją – prawie idealna kwadratowa podstawa, z bokami **230 m** różniącymi się od siebie o niecałe **20 cm**, a twarze nachylone są pod kątem **51°**, aby osiągnąć wierzchołek prawie **150 m** na pustynną podłogą.



Rys. 11 Piramidy w Egipcie

Piramida zbudowana jest z około 2 300 000 ogromnych, ciężkich kamiennych bloków, które są umieszczone tak blisko siebie, że nie można włożyć pomiędzy nie ostrzy noża.

Kwadratowe boki podstawy mają mniejszy błąd niż $\frac{1}{14000}$, a kąty mają błąd mniejszy od $\frac{1}{27000}$.

Matematyczne ciekawostki dotyczące Piramidy Cheopsa:

- mierząc łokciami egipskimi obwód piramidy otrzymujemy 365,24 – czyli liczbę dni w roku
- podwojenie odwołu podstawy odpowiada 1' i 1" na równiku
- ciężar piramidy pomnożony przez 10^{15} jest równy przybliżonej masie Ziemi
- pomiary Komnaty Króla wynoszą 2-5-3 i 3-4-5, więc są podstawowymi trójkątami pitagorejskimi
- piramida stoi prawie dokładnie na osi Północ-Południe. Kiedyś stała dokładnie na osi Północ – Południe, jednak odchylenie, od strony północnej 2'28" na północny-zachód i od strony południowej 1'57" na południowy-zachód, powstało wskutek dryfu kontynentów,

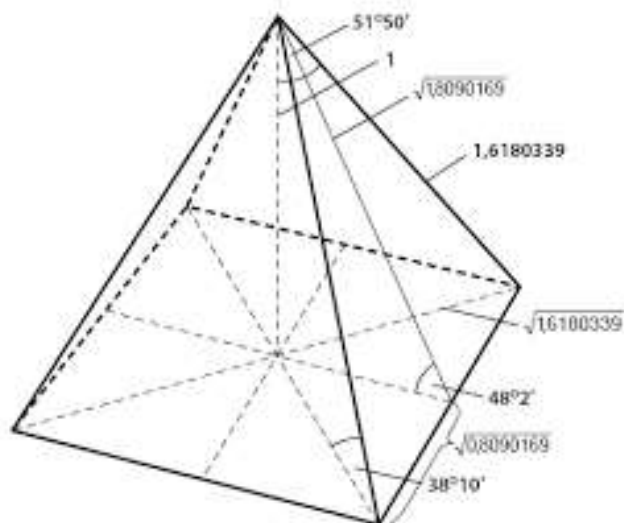
- południk biegnący przez piramidę jest najdłuższym biegnącym przez ląd. Dzieli on jednocześnie morza i kontynenty na dwie równe części,
- obwód podstawy podzielony przez podwójną wysokość daje liczbę $\Pi = 3,1416$ wysokość piramidy, jeżeli pomnożymy przez 1000000000, to otrzymamy średnią odległość Ziemi od Słońca,
- układ piramid zadziwiająco przedstawia układ gwiazd w pasie Oriona w roku 10583 p.n.e.,
- piramida od końca lutego do połowy października nie rzuca w południe żadnego cienia, tak więc piramida była zegarem słonecznym, pokazującym pory i długość roku,
- temperatura wewnątrz Komory Królewskiej wynosi 68° Fahrenheita. Stanowi to dokładnie $1/5$ odległości rtęci wznoszącej się w rurce od punktu zamarzania do punktu wrzenia wody na poziomie morza,
- stosunek długości i objętości piramidy odpowiada stosunkowi promienia do powierzchni koła,
- południk przechodzący przez środek piramidy tworzy z równoleżnikiem przechodzącym przez piramidę Mykerinosa i z linią prostą łączącą te dwa punkty trójkąt pitagorejski,
- kąty piramidy dzielą Deltę Nilu na dwie równe części,
- piramida Cheopsa leży w centrum masy lądu stałego Ziemi,
- odległość do bieguna południowego jest równa odległości do środka Ziemi i odległości od bieguna do środka Ziemi,
- wszystkie cztery ściany boczne Wielkiej Piramidy nie są płaskimi trójkątami lecz mają wklęsnięcia. Powodują one, że podczas równonocy wiosennej i jesiennej, tuż po wschodzie słońca oświetlana jest jedynie połowa ściany bocznej.



Rys. 12 Położenie Piramidy Cheopsa na mapie

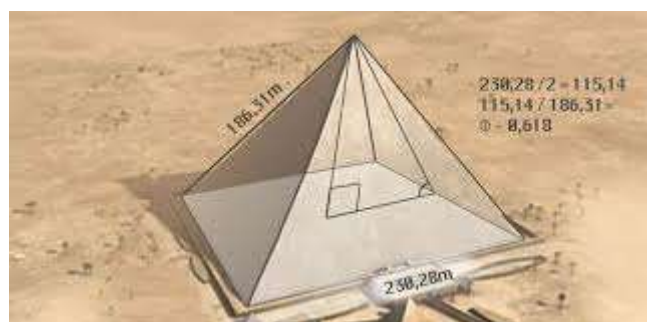
Wymiary Piramidy Cheopsa

Pierwotna wysokość	5813 cali
Długość podstawy	9131 cali
Obecna wysokość	5496 cali
Krawędź ściany bocznej	8684 cali
Apotema od środka podstawy do wierzchołka	7387 cali
Kąt nachylenia ściany bocznej względem Ziemi	51° 17' 14''
Wierzchołkowy kąt dwuścienny	76° 17' 32''
Kąt nachylenia krawędzi względem poziomu Ziemi	41° 59' 50''
Dwuścienny kąt ścian bocznych	106° 54'
Wierzchołkowy kąt między krawędziami	96°
Obwód podstawy	36524,24 cale
Rok ziemski	365,24 dni
Suma diagonali podstawy	25827 cali
Precesja naszego punktu równonocnego	25827 lat
Objętość piramidy	90 mln. stóp
Zajmowany obszar	13 akrów
Masa piramidy	5955000 ton
Położenie piramidy	29° 58' 51'' N, i 31° 9' 00'' E
Długość boku zachodniego	230,357 m
Długość boku wschodniego	230,391 m
Długość boku północnego	230,251 m
Długość boku południowego	230,454 m



Rys. 14
Wymiary w
Piramidzie
Cheopsa

Rys. 13
Kąty w
piramidzie



Cywilizacyjne osiągnięcia Egipcjan

W starożytności Egipt był państwem, które w bardzo szybkim czasie rozwijało się w różnych dziedzinach np.: architekturze, literaturze, religii oraz pisma, które przyczyniło się do kolejnych osiągnięć w dziedzinach nauki takich jak matematyki, astronomii oraz medycynie.

Kapłani byli najbardziej wykształconą grupą ludzi, nieco gorzej urzędnicy. W Egipcie nie wykształciła się oddzielna grupa elit intelektualnych, dlatego można zaryzykować stwierdzenie, że to kapłani byli jedyną wykształconą grupą ludzi w Egipcie, od których zależał rozwój nauki.

W efekcie rozwoju astronomii kapłanie egipscy posiadali głęboką wiedzę i umiejętności astronomiczne np.:

- znali kalendarz słoneczny, oparty na cyklu obiegu Ziemi wokół Słońca, określili długość roku na 365 dni i podzielili rok na trzy części, w zależności od wylewu Nilu.
- podzielili rok na 12 miesięcy po 30 dni i na końcu roku zostawało im 5 dni,
- ustalili podział nocy i dnia na 12 godzin (stąd pochodzi określenie doby na 24 godziny),
- potrafili obliczyć terminy zaćmienia Słońca i Księżyca,
- obserwowali niektóre planety i gwiazdy np. Syriusza.



Rys. 15 Kalendarz egipski

W medycynie dokonywano następujących osiągnięć:

- mumifikowano zwłoki,
- przeprowadzano niezwykle trudne operacje np.: oczu i mózgu, z zastosowaniem środków znieczulających,
- dokonywano trepanacji czaszki,
- przypalano torbiele,
- znano budowę serca i jego funkcje biologiczne,
- w dentystyce stosowali protezy,
- doskonała znajomość anatomii człowieka,
- wydzielono specjalizacje medyczne w zależności od choroby,
- wytwarzali proste narzędzia chirurgiczne,
- przy świątyniach powstawały pierwsze szkoły medyczne.



Rys. 16 Medycyna w Egipcie

Rozwinęła się kosmetologia:

- Egipcjanie znali zastosowanie środków takich jak np.: henna,



ochra, liczne preparaty na bazie mleka, miodu lub oliwy,

- znali bakteriobójcze i grzybobójcze działanie roślin i w celach leczniczych stosowali uzdrawiające kąpiele. Znajomość tę wykorzystywano również przy balsamowaniu zwłok.

Rys. 17 Mumifikowanie zwłok

Do innych przykładów świadczących o wysokim poziomie rozwoju nauki w starożytnym Egipcie mogą świadczyć następujące osiągnięcia:

- opanowano obróbkę miedzi,
- znali niektóre zasady magnetyzmu i akustyki. Ta ostatnia wiedza pozwalała im wzmacniać sztucznie siłę dźwięku,
- znali sposób zapalania pochodni przy zanurzeniu ich do wody,
- umieli produkować papirus,
- obliczać prawidłowo pomiary do budowy systemów irygacyjnych i piramid,
- wynaleźli zegar wodny.



Rys. 18 Zegar wodny



Rys. 19 Biżuteria egipska



Podsumowanie

W naszej pracy ukazałyśmy na czym polegała Matematyka Starożytnego Egiptu. Staraliśmy się przybliżyć czytelnikowi historię pisma Egipcjan oraz gdzie znajdują się pierwsze zapisy dotyczące zapisu liczb. Pokazałyśmy w jaki sposób zapisywano liczby w starożytnym Egipcie oraz na czym polegało dodawanie i mnożenie. Zamieściłyśmy również kilka problemów i zadań z Papirusu Rhinda, Papirusu Moskiewskiego oraz Papirusu Berlińskiego. Kilka problemów uzasadniłyśmy współczesnym rozumowaniem. Dowiedziałyśmy się, że większość zadań dotyczyła zastosowania matematyki w życiu codziennym. Opisałyśmy także największy matematyczny Cud Świata - czyli Piramidę Cheopsa. Wskazałyśmy największe cywilizacyjne osiągnięcia Egipcjan.

Podczas tworzenia pracy uczyłyśmy się nawzajem wykorzystując w szkole najnowocześniejsze technologie. Przygotowałyśmy również gazetkę poświęconą Egipskiej Matematyce, by i inni uczniowie mogli przekonać się o ogromnej wiedzy Egipcjan.

Bibliografia

1. <http://www.touregypt.net/featurestories/numbers.htm>
2. http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/mad_ancient_egyptpapyrus.html#moscow%20papyrus
3. <http://im0.p.lodz.pl/~kubarski/mgr/FisiakPraca.pdf>
4. https://en.wikipedia.org/wiki/Moscow_Mathematical_Papyrus
5. https://en.wikipedia.org/wiki/Rhind_Mathematical_Papyrus
6. https://en.wikipedia.org/wiki/Berlin_Papyrus_6619
7. <https://sciaga.pl/tekst/118654-119-osiagniecia-starozytnych-egipcjan>

