O macierzach permutacji słów kilka

Już w samym tytule naszej pracy zawarte są dwa wyrazy, których znaczenie musimy najpierw wyjaśnić, by potem móc przedstawić ich właściwości.

Otóż macierz to układ liczb lub wyrażeń zapisanych w postaci prostokątnej tablicy. Zazwyczaj używamy do prezentacji nawiasów kwadratowych. Macierz składa się z wierszy i kolumn. Jeżeli liczba kolumn i wierszy jest równa, to mamy doczynienia z macierzą kwadratową. Macierz permutacji jest dowolną macierzą kwadratową, w której w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajduję się dokładnie jedna jedynka, pozostałe wyrazy są równe 0.

Przykłady macierzy permutacji: $\left[\begin{array}{c}1 0 0\\0 1 0\\0 0 1\end{array}\right]$ <= to jest macierzą permutacji

$\left[\begin{array}{c}1 0 0 0 0\\0 0 1 0 0\\0 0 0 0 1\\0 0 0 1 0\\0 1 0 0 0\end{array}\right]$ <=to jest macierzą permutacji

$\left[\begin{array}{c}1 0 0\\0 1 1\\0 1 0\end{array}\right]$ i $\left[\begin{array}{c}0 1 0\\0 2 1\\1 0 0\end{array}\right]$ <= ale to nie są macierze permutacji.

Rozważmy permutację A= $\left(\begin{array}{c}1 2 3\\3 1 2\end{array}\right)$ dla której macierz wygląda następująco:

$P\_{A}$= $\left[\begin{array}{c}0 0 1\\1 0 0\\0 1 0\end{array}\right]$

W permutacji A liczba 1 przechodzi na 3, 2 na 1 a 3 na 2. Macierz permutacji $P\_{A}$ odpowiadającą permutacji A tworzymy w ten sposób, że w pierwszym wiersz jedynkę piszemy na trzecim miejscu, w drugim wierszu na pierwszym miejscu, a w trzecim na drugim.

Niech teraz czytelnik sprawdzi czy permutacji B= $\left(\begin{array}{c}1 2 3 4 5\\3 5 2 1 4\end{array}\right)$ odpowiada macierz PB?

$P\_{B}$= $\left[\begin{array}{c}0 0 1 0 0\\0 0 0 0 1\\0 1 0 0 0\\1 0 0 0 0\\0 0 0 1 0\end{array}\right]$

Jeżeli odpowiedź jest twierdząca to możemy przejść dalej.

Dwie permutacje możemy złożyć, a dwie macierze kwadratowe o tych samych wymiarach możemy pomnożyć. Przedstawimy te działania na przykładzie.

$\left(\begin{array}{c}1 2 3 4 5\\4 2 1 3 5\end{array}\right)$ $∙$ $\left(\begin{array}{c}1 2 3 4 5\\4 2 1 5 3\end{array}\right)$= $\left(\begin{array}{c}1 2 3 4 5\\5 2 4 1 3\end{array}\right)$

Aby pomnożyć dwie permutacje należy poczynić następujące kroki:

1) Patrzymy na co przechodzi 1 w pierwszej permutacji, w tym wypadku na 4

 2) Następnie patrzymy w co przechodzi 4 w drugiej permutacji, na 5, czyli poprzez pomnożenie tych dwóch permutacji 1 przechodzi na 5

 3) Podobnie postępujemy w przypadku 2, 3 i 4

Co tworzy następującą macierz permutacji:

$$\left[\begin{array}{c} 0 0 0 0 1\\ 0 1 0 0 0\\ 0 0 0 1 0\\1 0 0 0 0\\ 0 0 1 0 0\end{array}\right]$$

Wprowadźmy teraz działanie mnożenia macierzy na poniższym przykładzie.

$\left[\begin{array}{c}1 3\\4 2\end{array}\right]$ $∙$ $\left[\begin{array}{c}0 -2\\6 3 \end{array}\right]$= $\left[\begin{array}{c}1∙0+3∙6 1∙-2+3∙3\\4∙0+2∙6 4∙-2+2∙3 \end{array}\right]$= $\left[\begin{array}{c}18 7\\12 -2\end{array}\right]$

Aby pomnożyć dowolne macierze trzeba wykonywać następujące kroki:

Wskazówka: Zawsze z pierwszej macierzy bierzemy wiersze, a z drugiej kolumny.

1. Żeby otrzymać liczbę pierwszą w pierwszej kolumnie i pierwszą w pierwszym wierszu należy

- ustalić, które liczby należą do pierwszej kolumny i do pierwszego wiersza ( w tym przypadku: wiersz z pierwszej macierzy- 1 i 3, kolumna z drugiej macierzy- 0 i 6 )



- iloczyn pierwszej liczby z wiersza i pierwszej liczby z kolumny dodajemy do iloczynu drugiej liczby z wiersza i drugiej z kolumny ( czyli, 1$∙$ 0 + 3$∙$6 )

1. Żeby otrzymać drugą liczbę macierzy należy

- ustalić, które liczby należą do pierwszej kolumny i do drugiego wiersza ( w tym przypadku: wiersz z pierwszej macierzy- 4 i 2, kolumna z drugiej macierzy- 0 i 6 )



- iloczyn pierwszej liczby z wiersza i pierwszej liczby z kolumny dodajemy do iloczynu drugiej liczby z wiersza i drugiej z kolumny ( czyli, 4$∙$0 + 2$∙$ 6 )

1. analogicznie



- iloczyn pierwszej liczby z wiersza i pierwszej liczby z kolumny dodajemy do iloczynu drugiej liczby z wiersza i drugiej z kolumny ( czyli, 1$∙$ (-2) + 3$∙$3 )

1. i ostatnia liczba



- iloczyn pierwszej liczby z wiersza i pierwszej liczby z kolumny dodajemy do iloczynu drugiej liczby z wiersza i drugiej z kolumny ( czyli, 4$∙$(-2) + 2$∙$3 )

Można łatwo zauważyć, że mnożenie permutacji jest nieprzemienne.

$$\left[\begin{array}{c}0 1\\2 3\end{array}\right]∙ \left[\begin{array}{c}2 1\\0 3\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}0 3\\4 10\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c}2 1\\0 3\end{array}\right]∙ \left[\begin{array}{c}0 1\\2 3\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}2 5\\6 9\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c}0 3\\4 10\end{array}\right]\ne \left[\begin{array}{c}2 5 \\6 9\end{array}\right]$$

Pomnożone przez siebie dwie kwadratowe macierze dają pewną macierz kwadratową, jednak dwie te same pomnożone macierze, ale w odwrotnej kolejności dają macierz inną od tej z pierwszego działania.

Sprawdźmy teraz przemienność wyznaczania permutacji.

$$\left(\begin{array}{c}1 2 3 4\\3 2 4 1 \end{array}\right)∙\left(\begin{array}{c}1 2 3 4\\2 3 4 1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}1 2 3 4\\4 3 1 2\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c}1 2 3 4\\2 3 4 1\end{array}\right)∙\left(\begin{array}{c}1 2 3 4\\3 2 4 1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}1 2 3 4\\2 4 1 3\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c}1 2 3 4\\4 3 1 2\end{array}\right)\ne \left(\begin{array}{c}1 2 3 4\\2 4 1 3\end{array}\right)$$

Podobnie jak w przypadku mnożenia macierzy kolejność w wyznaczaniu permutacji ma znaczenie. Pomnożone przez siebie dwie permutacje w zmienionej kolejności dają inny wynik od pierwotnego.

Z tego wynika, że mnożenie permutacji też nie będzie przemienne.

Można zasadę działania mnożenia przedstawic w inny sposób:



Przaanalizujmy jeszcze jeden przykład wyznaczenia iloczynu macierzy.

$\left[\begin{array}{c}1 4 2\\1 1 3\\2 4 1 \end{array}\right]∙$ $\left[\begin{array}{c}1 1 1\\4 0 2\\3 2 3\end{array}\right]$ =$\left[\begin{array}{c}23 5 15\\14 7 12\\21 4 13\end{array}\right]$



Zatem jeżeli znamy już działania na macierzach to wróćmy do naszego przykładu $\left(\begin{array}{c}1 2 3 4 5\\4 2 1 3 5\end{array}\right)$ $∙$ $\left(\begin{array}{c}1 2 3 4 5\\4 2 1 5 3\end{array}\right)$= $\left(\begin{array}{c}1 2 3 4 5\\5 2 4 1 3\end{array}\right)$

I przekształćmy permutacje na macierze i przemnóżmy je według poznanej metody:

$\left[\begin{array}{c}0 0 0 1 0\\0 1 0 0 0\\1 0 0 0 0\\0 0 1 0 0\\0 0 0 0 1\end{array}\right]$ $∙$ $\left[\begin{array}{c}0 0 0 1 0\\0 1 0 0 0\\1 0 0 0 0\\0 0 0 0 1\\0 0 1 0 0\end{array}\right]$ = $\left[\begin{array}{c}0 0 0 0 1\\0 1 0 0 0\\0 0 0 1 0\\1 0 0 0 0\\0 0 1 0 0\end{array}\right]$

Jak mnożyć jeszcze szybciej :O ?!

Jest również inny, szybszy sposób wyznaczenia iloczynu macierzy:

$\left[\begin{array}{c}0 0 1\\0 1 0\\1 0 0\end{array}\right]$ $∙$ $\left[\begin{array}{c}1 0 0\\0 0 1\\0 1 0\end{array}\right]$ = $\left[\begin{array}{c}0 1 0\\0 0 1\\1 0 0\end{array}\right]$

W tym przypadku skupiamy się tylko na wierszach. W pierwszej macierzy 1 jest na trzecim miejscu, więc w drugiej macierzy przechodzimy do trzeciego wiersza. W tym wierszu 1 znajduje się na miejscu drugim, z tego wynika, że w iloczynie w pierwszym wierszu 1 będzie na drugim miejscu. Analogicznie postępujemy z kolejnymi wierszami.

Rodzaje macierzy kwadratowych

Macierz jednostkowa o wymiarach 4x4

$\left[\begin{array}{c}1 0 0 0\\0 1 0 0\\0 0 1 0\\0 0 0 1\end{array}\right]$ = $\left(\begin{array}{c}1 2 3 4\\1 2 3 4\end{array}\right)$ = 1I

**Macierz jednostkowa** (macierz identycznościowa)

Szczególnym przypadkiem macierzy diagonalnej jest macierz, w której wszystkie elementy leżące na przekątnej głównej są równe jeden, a pozostałe elementy wynoszą zero. Macierz taką nazywamy **macierzą jednostkową**.

Macierz jednostkowa jest *elementem neutralnym* dla mnożenia macierzy.

I-macierz jednostkowa

M- macierz permutacji

$$M∙I=I∙M=M$$

$$\left[\begin{array}{c}1 0 0\\0 1 0\\0 0 1\end{array}\right]∙\left[\begin{array}{c}0 1 0\\0 0 1\\1 0 0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}0 1 0\\0 0 1\\1 0 0\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c}0 1 0\\0 0 1\\1 0 0\end{array}\right]∙\left[\begin{array}{c}1 0 0\\0 1 0\\0 0 1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}0 1 0\\0 0 1\\1 0 0\end{array}\right]$$

Kolejność mnożenia macierzy permutacji z macierzą jednostkową jest przemienna.

Macierz jednostkowa odpowiada identyczności w permutacjach, więc sprawdźmy czy wyznaczanie permutacji przez identyczność też jest przemienna.

$$\left(\begin{array}{c}1 2 3 4\\1 2 3 4\end{array}\right)∙\left(\begin{array}{c}1 2 3 4\\3 1 4 2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}1 2 3 4\\3 1 4 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c}1 2 3 4\\3 1 4 2 \end{array}\right)∙\left(\begin{array}{c}1 2 3 4\\ 1 2 3 4\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}1 2 3 4\\3 1 4 2\end{array}\right)$$

$$P∙1I=P$$

$$1I∙P=P$$

Mnożenie permutacji przez identyczność jest przemienne. Wynik tego działania będzie się równał permutacji mnożonej przez identyczność

**Macierz diagonalna**

Macierz przeważnie kwadratowa, w której wszystkie elementy leżące poza główną przekątną są równe zero.