O macierzach permutacji słów kilka

Już w samym tytule naszej pracy zawarte są dwa wyrazy, których znaczenie musimy najpierw wyjaśnić, by potem móc przedstawić ich właściwości.

Otóż macierz to układ liczb lub wyrażeń zapisanych w postaci prostokątnej tablicy. Zazwyczaj używamy do prezentacji nawiasów kwadratowych. Macierz składa się z wierszy i kolumn. Jeżeli liczba kolumn i wierszy jest równa, to mamy doczynienia z macierzą kwadratową. Macierz permutacji jest dowolną macierzą kwadratową, w której w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajduję się dokładnie jedna jedynka, pozostałe wyrazy są równe 0.

Przykłady macierzy permutacji: <= to jest macierzą permutacji

<=to jest macierzą permutacji

i <= ale to nie są macierze permutacji.

Rozważmy permutację A= dla której macierz wygląda następująco:

=

W permutacji A liczba 1 przechodzi na 3, 2 na 1 a 3 na 2. Macierz permutacji odpowiadającą permutacji A tworzymy w ten sposób, że w pierwszym wiersz jedynkę piszemy na trzecim miejscu, w drugim wierszu na pierwszym miejscu, a w trzecim na drugim.

Niech teraz czytelnik sprawdzi czy permutacji B= odpowiada macierz PB?

=

Jeżeli odpowiedź jest twierdząca to możemy przejść dalej.

Dwie permutacje możemy złożyć, a dwie macierze kwadratowe o tych samych wymiarach możemy pomnożyć. Przedstawimy te działania na przykładzie.

=

Aby pomnożyć dwie permutacje należy poczynić następujące kroki:

1) Patrzymy na co przechodzi 1 w pierwszej permutacji, w tym wypadku na 4

2) Następnie patrzymy w co przechodzi 4 w drugiej permutacji, na 5, czyli poprzez pomnożenie tych dwóch permutacji 1 przechodzi na 5

3) Podobnie postępujemy w przypadku 2, 3 i 4

Co tworzy następującą macierz permutacji:

Wprowadźmy teraz działanie mnożenia macierzy na poniższym przykładzie.

= =

Aby pomnożyć dowolne macierze trzeba wykonywać następujące kroki:

Wskazówka: Zawsze z pierwszej macierzy bierzemy wiersze, a z drugiej kolumny.

1. Żeby otrzymać liczbę pierwszą w pierwszej kolumnie i pierwszą w pierwszym wierszu należy

- ustalić, które liczby należą do pierwszej kolumny i do pierwszego wiersza ( w tym przypadku: wiersz z pierwszej macierzy- 1 i 3, kolumna z drugiej macierzy- 0 i 6 )



- iloczyn pierwszej liczby z wiersza i pierwszej liczby z kolumny dodajemy do iloczynu drugiej liczby z wiersza i drugiej z kolumny ( czyli, 1 0 + 36 )

1. Żeby otrzymać drugą liczbę macierzy należy

- ustalić, które liczby należą do pierwszej kolumny i do drugiego wiersza ( w tym przypadku: wiersz z pierwszej macierzy- 4 i 2, kolumna z drugiej macierzy- 0 i 6 )



- iloczyn pierwszej liczby z wiersza i pierwszej liczby z kolumny dodajemy do iloczynu drugiej liczby z wiersza i drugiej z kolumny ( czyli, 40 + 2 6 )

1. analogicznie



- iloczyn pierwszej liczby z wiersza i pierwszej liczby z kolumny dodajemy do iloczynu drugiej liczby z wiersza i drugiej z kolumny ( czyli, 1 (-2) + 33 )

1. i ostatnia liczba



- iloczyn pierwszej liczby z wiersza i pierwszej liczby z kolumny dodajemy do iloczynu drugiej liczby z wiersza i drugiej z kolumny ( czyli, 4(-2) + 23 )

Można łatwo zauważyć, że mnożenie permutacji jest nieprzemienne.

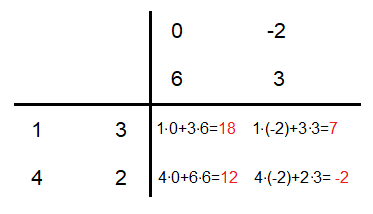
Pomnożone przez siebie dwie kwadratowe macierze dają pewną macierz kwadratową, jednak dwie te same pomnożone macierze, ale w odwrotnej kolejności dają macierz inną od tej z pierwszego działania.

Sprawdźmy teraz przemienność wyznaczania permutacji.

Podobnie jak w przypadku mnożenia macierzy kolejność w wyznaczaniu permutacji ma znaczenie. Pomnożone przez siebie dwie permutacje w zmienionej kolejności dają inny wynik od pierwotnego.

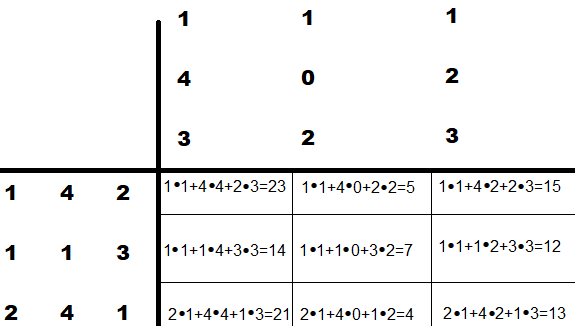
Z tego wynika, że mnożenie permutacji też nie będzie przemienne.

Można zasadę działania mnożenia przedstawic w inny sposób:



Przaanalizujmy jeszcze jeden przykład wyznaczenia iloczynu macierzy.

=



Zatem jeżeli znamy już działania na macierzach to wróćmy do naszego przykładu =

I przekształćmy permutacje na macierze i przemnóżmy je według poznanej metody:

=

Jak mnożyć jeszcze szybciej :O ?!

Jest również inny, szybszy sposób wyznaczenia iloczynu macierzy:

=

W tym przypadku skupiamy się tylko na wierszach. W pierwszej macierzy 1 jest na trzecim miejscu, więc w drugiej macierzy przechodzimy do trzeciego wiersza. W tym wierszu 1 znajduje się na miejscu drugim, z tego wynika, że w iloczynie w pierwszym wierszu 1 będzie na drugim miejscu. Analogicznie postępujemy z kolejnymi wierszami.

Rodzaje macierzy kwadratowych

Macierz jednostkowa o wymiarach 4x4

= = 1I

**Macierz jednostkowa** (macierz identycznościowa)

Szczególnym przypadkiem macierzy diagonalnej jest macierz, w której wszystkie elementy leżące na przekątnej głównej są równe jeden, a pozostałe elementy wynoszą zero. Macierz taką nazywamy **macierzą jednostkową**.

Macierz jednostkowa jest *elementem neutralnym* dla mnożenia macierzy.

I-macierz jednostkowa

M- macierz permutacji

Kolejność mnożenia macierzy permutacji z macierzą jednostkową jest przemienna.

Macierz jednostkowa odpowiada identyczności w permutacjach, więc sprawdźmy czy wyznaczanie permutacji przez identyczność też jest przemienna.

Mnożenie permutacji przez identyczność jest przemienne. Wynik tego działania będzie się równał permutacji mnożonej przez identyczność

**Macierz diagonalna**

Macierz przeważnie kwadratowa, w której wszystkie elementy leżące poza główną przekątną są równe zero.