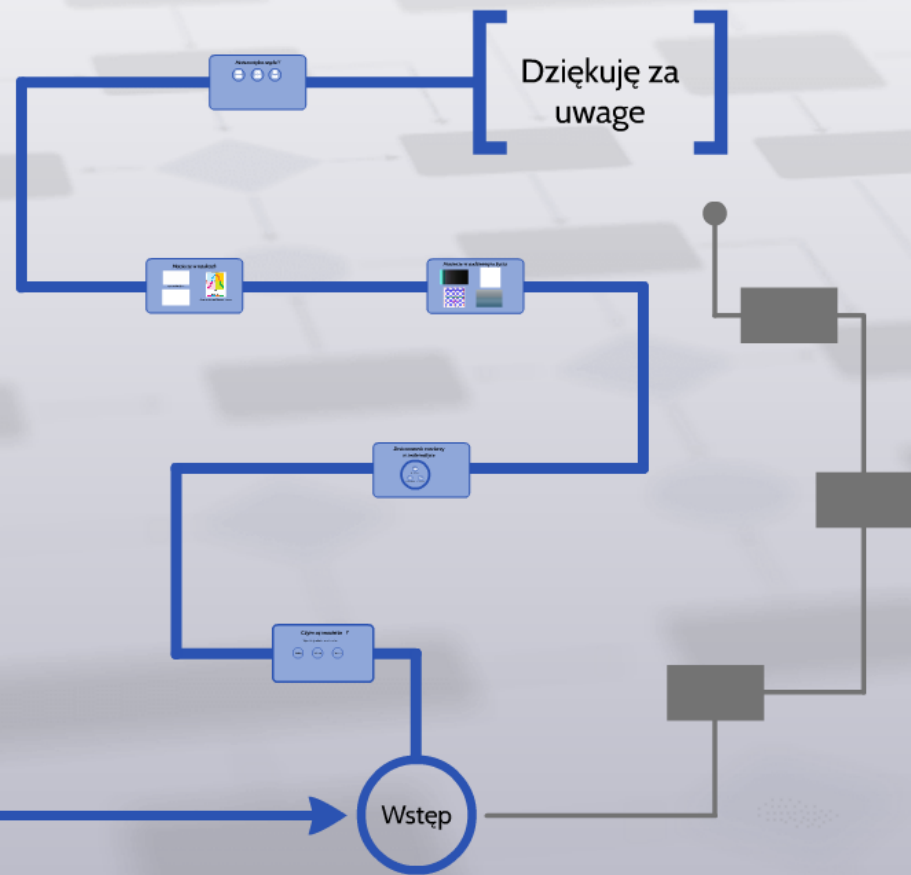


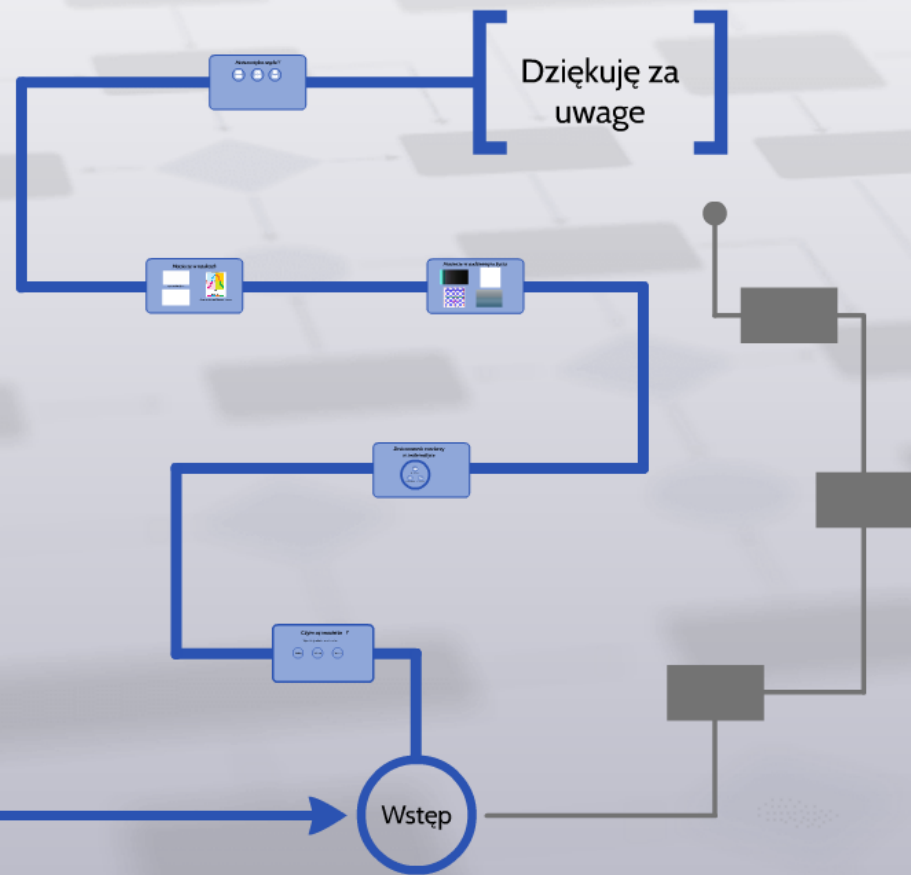
Odrobina algebry liniowej, czyli
zmacierzowany, zafascynowany ja

Szymon Rosiński
kl. 8 SP. Będkowiec



Odrobina algebry liniowej, czyli
zmacierzowany, zafascynowany ja

Szymon Rosiński
kl. 8 SP. Będkowiec





Wstęp

Czym są macierze ?

Najprościej mówiąc macierze to:

Liczby

Wyrazy

Symbole

Liczby

Wyrazy

Symbole

Czym są macierze ?

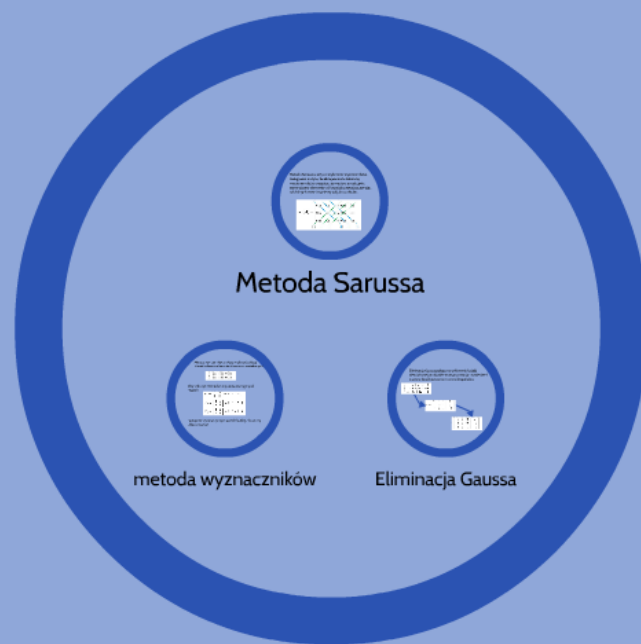
Najprościej mówiąc macierze to:

Liczby

Wyrazy

Symbole

Zastosowanie macierzy w matematyce



Metoda Sarrusa służy do wyliczania wyznaczników. Polega ona na tym, że dwie pierwsze kolumny macierzy należy przepisać za macierz a następnie wyznaczyć elementy od lewej do prawej zaczynając od różnych części macierzy tak jak na obrazku.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

Metoda Sarussa

Metoda wyznaczników służy do wyliczenia układu równań z danymi współrzędnymi i danymi niewiadomymi.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 2 \\ 3x + 8y = 3 \end{cases}$$

Aby wyliczyć niewiadome podstawiamy je pod macierz

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 15 = 1 \\ W_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0 \\ W_3 &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0 \end{aligned}$$

następnie wyliczamy wyznaczniki każdej z kolumn układu równań

Eliminacja Gaussa polega na wyliczeniu każdej niewiadomej w układzie równań poprzez skłanianie macierzy kwadratowej na macierz diagonalną.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ x + 3y + 4z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1, R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

metoda wyznaczników

Eliminacja Gaussa

Metoda Sarussa służy do wyliczania wyznaczników. Polega ona na tym, że dwie pierwsze kolumny macierzy należy przepisać za macierz a następnie wymnażamy elementy od lewej do prawej zaczynając od dolnych części macierzy tak jak na obraku.

$$\det(A) = \begin{array}{cccccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & \\ \ominus & \ominus & \ominus & \oplus & \oplus & \oplus \end{array}$$

Metoda Sarrusa służy do wyliczania wyznaczników. Polega ona na tym, że dwie pierwsze kolumny macierzy należy przepisać za macierz a następnie wyznaczyć elementy od lewej do prawej zaczynając od różnych części macierzy tak jak na obrazku.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

Metoda Sarussa

Metoda wyznaczników służy do wyliczenia układu równań z danymi współrzędnymi i danymi niewiadomymi.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 2z \\ 3x + 8y = 3z \end{cases}$$

Alby wyliczyć niewiadome podstawiamy je pod macierz

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 15 = 1 \\ W_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0 \\ W_3 &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0 \end{aligned}$$

resztkę wyliczamy wyznaczniki każdej z kolumn układu równań

Eliminacja Gaussa polega na wyliczeniu każdej niewiadomej w układzie równań poprzez zanikanie macierzy kwadratowej na macierz diagonalną.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ x + 3y + 4z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1, R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

metoda wyznaczników

Eliminacja Gaussa

Metoda wyznaczników służy do wyliczania układu równań z dwoma równaniami i dwiema niewiadomymi

$$\begin{cases} 2a + 5b = 2z \\ 3a + 8b = 3z \end{cases}$$

Aby wyliczyć niewiadome podstawiamy je pod macierz

$$W = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - 5 \cdot 3$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - 5 \cdot 3$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3$$

następnie wyliczamy wyznaczniki każdej z kolumny układu równań

Metoda Sarrusa służy do wyliczania wyznaczników. Polega ona na tym, że dwie pierwsze kolumny macierzy należy przepisać za macierz a następnie wyznaczyć elementy od lewej do prawej zaczynając od różnych części macierzy tak jak na obrazku.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

Metoda Sarussa

Metoda wyznaczników służy do wyliczenia układu równań z danymi nieznanymi i danymi nieznanymi.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 20 \\ 3x + 8y = 31 \end{cases}$$

Albo wyliczyć niewiadome podstawiając je pod macierz

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 15 = 1 \\ W_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 20 \\ 3 & 31 \end{vmatrix} = 62 - 60 = 2 \\ W_3 &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 9 = -3 \end{aligned}$$

rozwiązanie wyliczamy wyznaczniki każdej z kolumny układu równań

Eliminacja Gaussa polega na wyliczeniu każdej niewiadomej w układzie równań poprzez zanikanie macierzy kwadratowej na macierz diagonalną.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ x + 3y + 4z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1, R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

metoda wyznaczników

Eliminacja Gaussa

Eliminacja Gaussa polega na wyliczeniu każdej niewiadomej w układzie równań próbując zamienić macierz kwadratową na macierz diagonalną.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + 3y + 4z = -2 \end{cases}$$

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

Metoda Sarrusa służy do wyliczania wyznaczników. Polega ona na tym, że dwie pierwsze kolumny macierzy należy przepisać za macierz a następnie wyznaczyć elementy od lewej do prawej zaczynając od różnych części macierzy tak jak na obrazku.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

Metoda Sarussa

Metoda wyznaczników służy do wyliczenia układu równań z danymi współrzędnymi i danymi niewiadomymi.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 2z \\ 3x + 8y = 3z \end{cases}$$

Albo wyliczyć niewiadome podstawiając je pod macierz

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 15 = 1 \\ W_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0 \\ W_3 &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0 \end{aligned}$$

rozwiązanie wyliczamy wyznaczniki każdej z kolumn układu równań

Eliminacja Gaussa polega na wyliczeniu każdej niewiadomej w układzie równań poprzez zanikanie macierzy kwadratowej na macierz diagonalną.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ x + 3y + 4z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1, R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

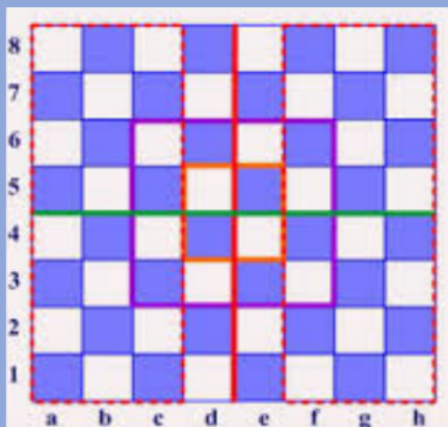
metoda wyznaczników

Eliminacja Gaussa

Macierze w codziennym życiu



Google
PageRank

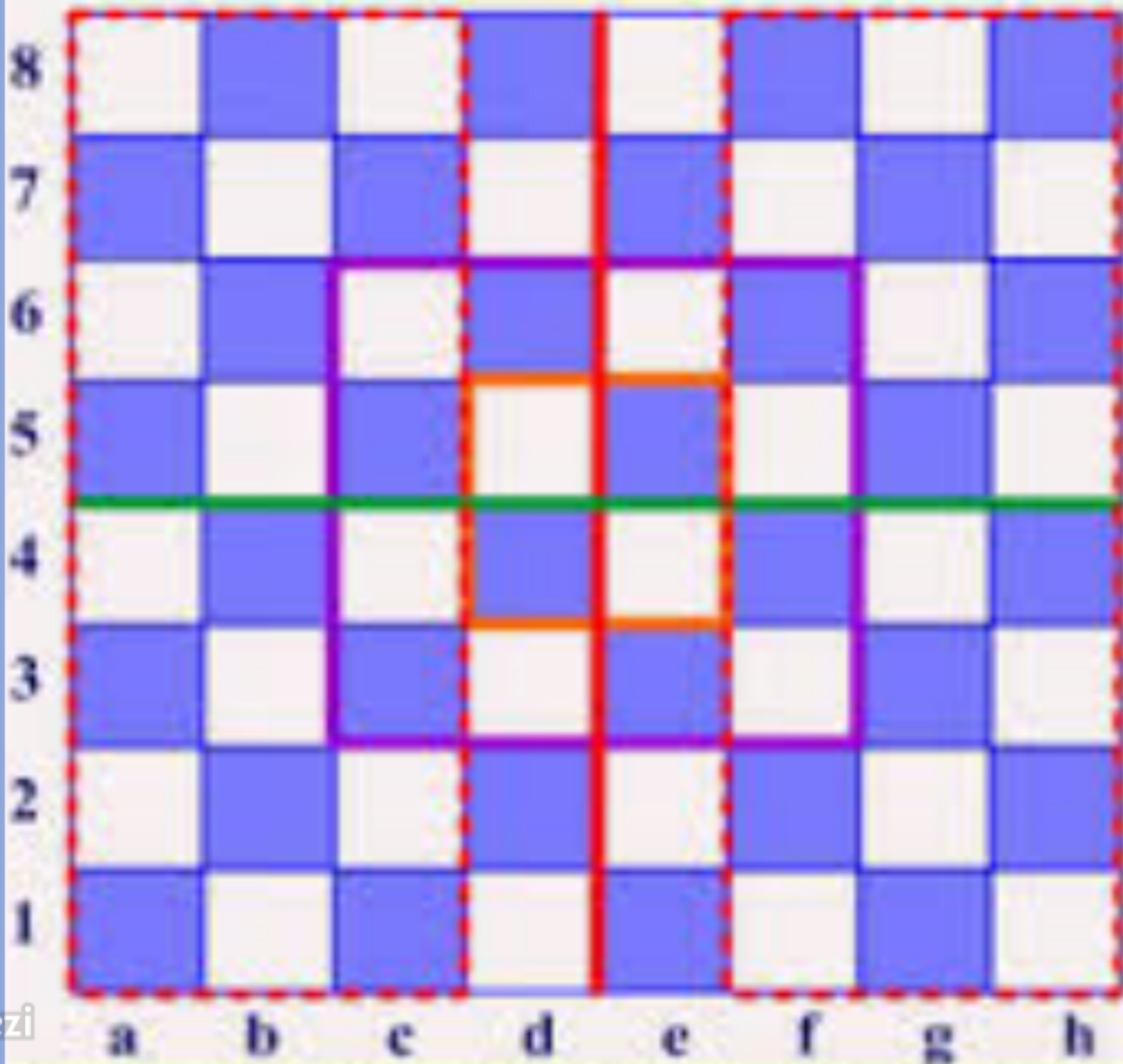


0 1 10100001101 1 1 00 01 0 0 10 0000 0 000 1 10 001 110 01 11 00 0 01100 00 1 0 1
1 01 00110010 0 0 1 00 01 101 1 111 0 0 0 0 1 1 10 10 1 0 0001 0 1 0
00 00 100 00 10 010 1 11 1 11 1 0 101 1 0 01 100 01 01 11 1 01 0
00010 01 01 1 0 0000010 100 01 0 101 1 0 00 00 1 00 1 0 0 10 10 0 000
011111 10 1 00111001 0 0 10 000011000 10 000 01 11111 1 0 0 0 1 1 0011 00
1 11 0 0 00 10 0 00 0 0 10 1 10 0010 0 10 0 0001100 10011 0 0 1 0 110
00 1 1 1 010 01 001 010 100 011 0 0 001 1010100 11 0 0 111100 0 010 1 101 001 0 01101 0 0
1 1 1 1 1 110 1 011 0 0 001 1010100 11 0 0 111100 0 010 1 101 001 0 01101 0 0
1 101 1 10 00111 0 1001 1 101 0 01 1 100 10 0 0 0 0 1 1 0 1
10 00 0 0 100 1 10000 1 0 0 0 0 10 101 0 01111 000 00 00 0000 1 1 1 000
0 00 1 1 01 010 00 1 11 0 0 01 0 1001 11 10 0001 0 110 1 0 1 1 1
111 0 110 00 1000 1 10 11 11 0 1 0 111 001 1 0 0 0 00 00 11 1 1
0011 1 0 1100 0 010 1 1 01 01 1 10 0 0 0 10001 1101 000 00 1 00
1 11 0 01 1 00 111 0 1111 0101 01 011 00 1 0001 0 1 1 1 001 0001 110 0
01 1 01 1 1 01 1 0 1 1 0 011 111 00010 1 100 100001 00 00 0 1 1 1 11 11
01 0 10 1 10 10 0 0 1 0111 1 10 1 10 1 00 1 100 0 01100110 01 1 1 10
0 0 0 0 0 0011 010 1 1000 0 0 0 0 1 1 101 0010 0 1 100 1 1 0 1 1010
1 11 11 01 011 1 1 0 1 01 0 00 0 1110 1 1000 0 10 1 1 100110 000 1
01 11 0 1 111 0 1 1 00000 1 100 1 1 11 1 1 10 0 1 1100 011 10 11 0
110010 1 1 10100 0 0 1 00 1 10 0 1 001 10011 1 1 00100 1 1011 110 0 1
01 0 0 101 0 11 0 1 01 1 111 01 0 0 0 1 0 1 010 1 0 1 1 0 0 1 00 01110 1
0 1 111101 10 1 000 1 1 11000011 11 111 1 11 0101 0 0 0 0 0 101 11 0
1 11 0 0100110 000 10110 11 00 1 11 1000 1 0 0 1 00 0 10 1 0111
1 0 1 11 00 0 1 11 0 1 1000 100 1 0 110 1 00 0 0 0 0 1 01 0 10 00
1 1 00 00 0 100 11 1 0100101 111 0 01 100 0 1 0 0 1 00 0 10 0 1
0 0 1 00 100 10 0 00 0 0 0 0 1000 1 11 1 1 011 101 0 11 1 000 0 0 1 1
11 011 111 1 0 1 0010 011 10 1 0 01 011 1 10 01 100 00 0 110 01 0 10
10 10 11 1 1010101 11 0 1 00 00101 1 00 1 0100 1 0 111 111 01 000 0
0 01 0011 10 0 1 0 01011 001 0 11 11 0 10 1 100 000000 111 011 1 0 01 1 0 0
00 1 0 00110 1 010 1101 1 11 10 0 11 1101 0 00 1 010 11 0 10 1 10 0

Google

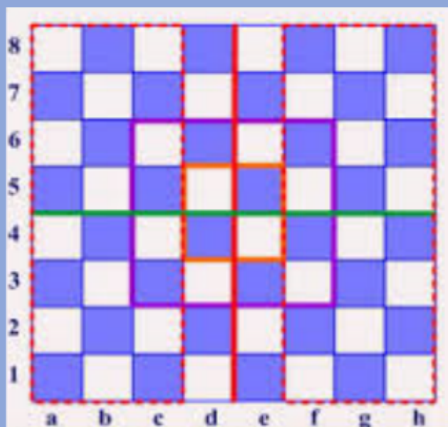
PageRank





Wycinek prostok

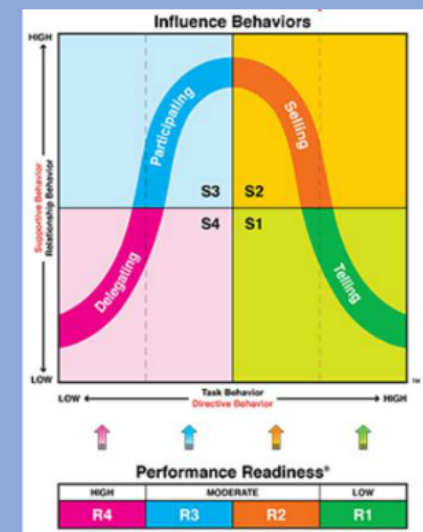
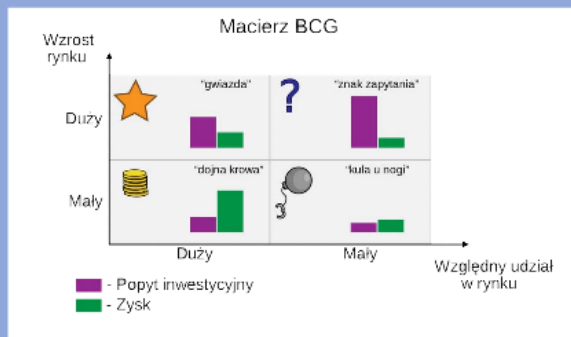
Macierze w codziennym życiu



Macierze w naukach

		Drugi więzień (Jan)	
		nie przyznać się (B ¹)	przyznać się (B ²)
Pierwszy więzień (Adam)	nie przyznać się (A ¹)	mała kara dla obu (1)	duża kara dla Adama (3) zwolnienie Jana
	przyznać się (A ²)	duża kara dla Jana (4) zwolnienie Adama	średnia kara dla obu (2)

dylemat więźnia

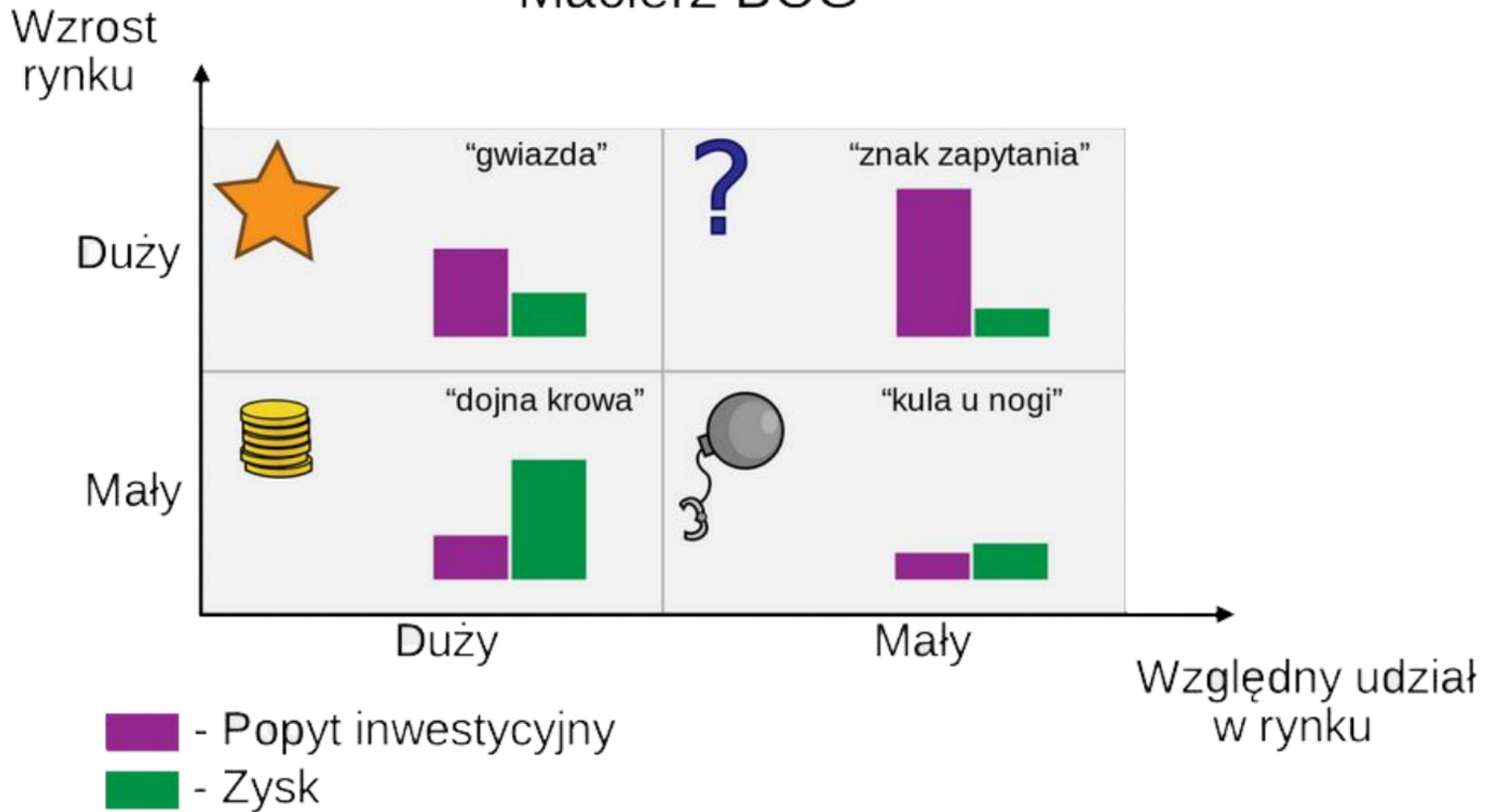


Macierz sterowań kierowniczych

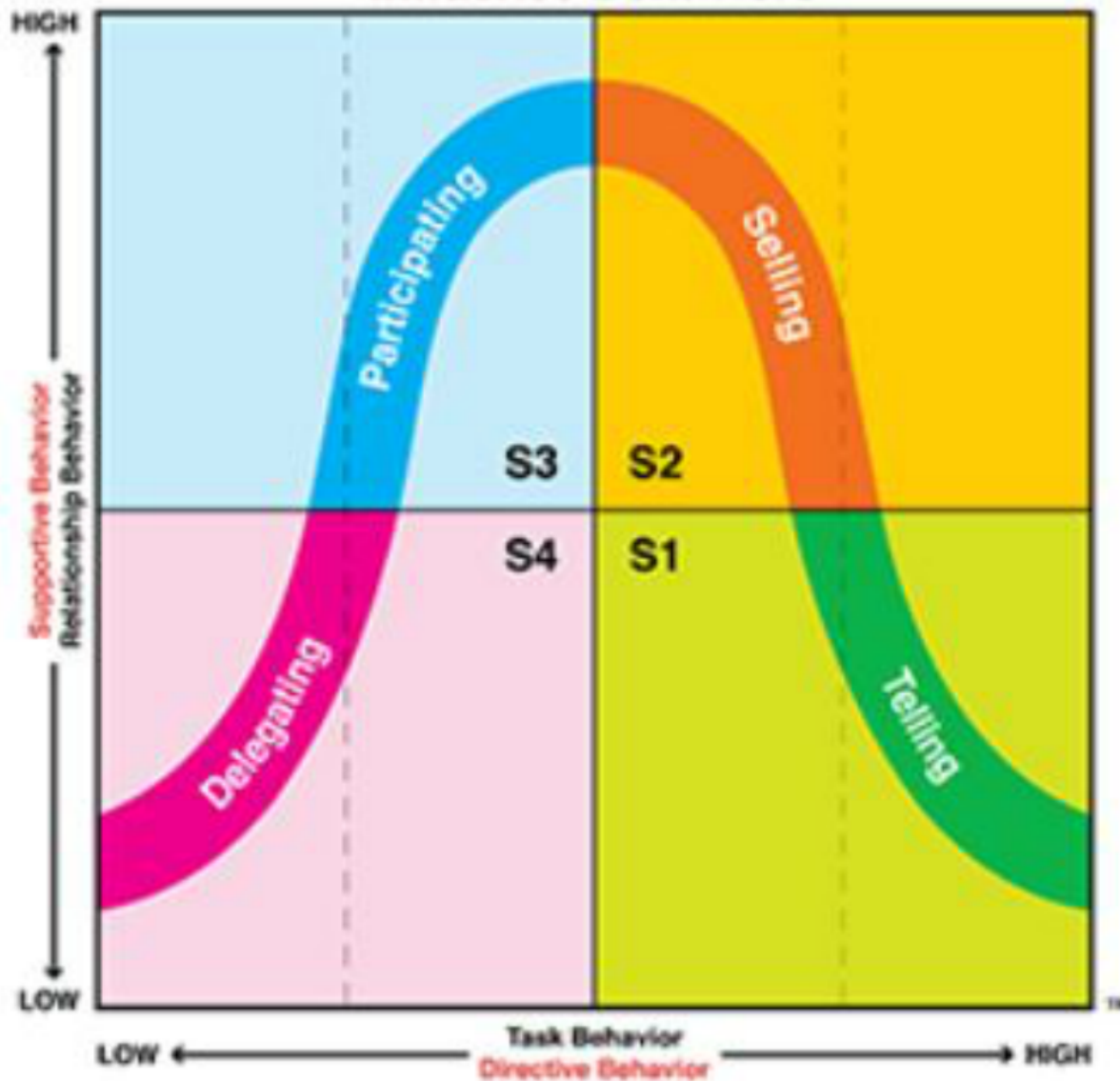
		Drugi więzień (Jan)	
		nie przyznać się (B ¹)	przyznać się (B ²)
Pierwszy więzień (Adam)	nie przyznać się (A ¹)	mała kara dla obu (1)	duża kara dla Adama (3) zwolnienie Jana
	przyznać się (A ²)	duża kara dla Jana (4) zwolnienie Adama	średnia kara dla obu (2)

dylemat więźnia

Macierz BCG



Influence Behaviors



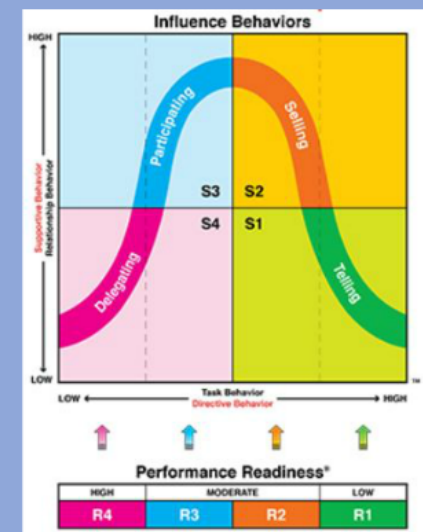
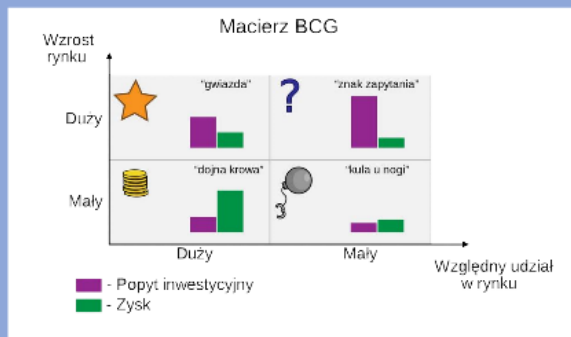
Performance Readiness®

HIGH	MODERATE		LOW
R4	R3	R2	R1

Macierze w naukach

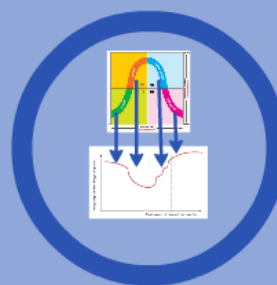
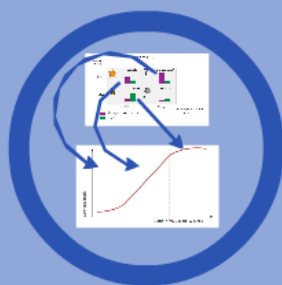
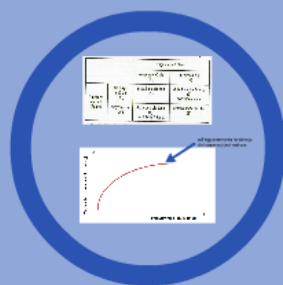
		Drugi więzień (Jan)	
		nie przyznać się (B ¹)	przyznać się (B ²)
Pierwszy więzień (Adam)	nie przyznać się (A ¹)	mała kara dla obu (1)	duża kara dla Adama (3) zwolnienie Jana
	przyznać się (A ²)	duża kara dla Jana (4) zwolnienie Adama	średnia kara dla obu (2)

dylemat więźnia

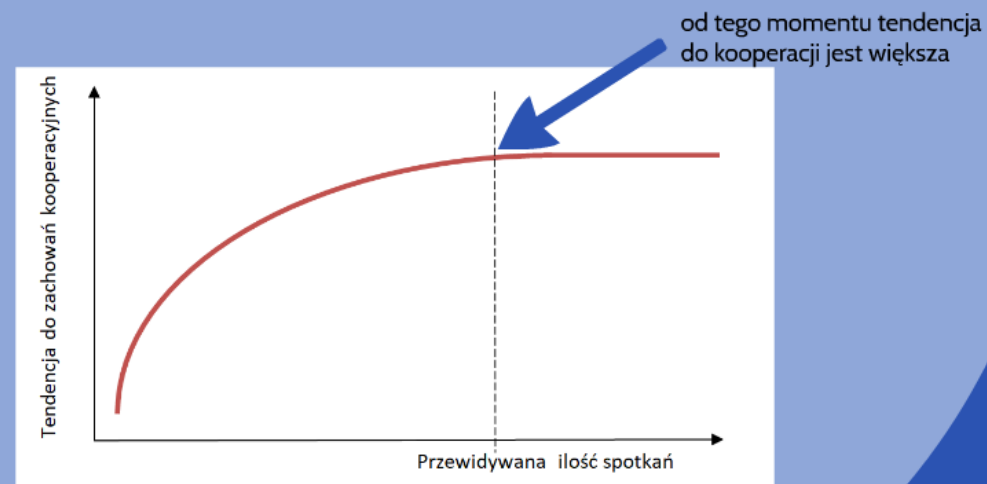


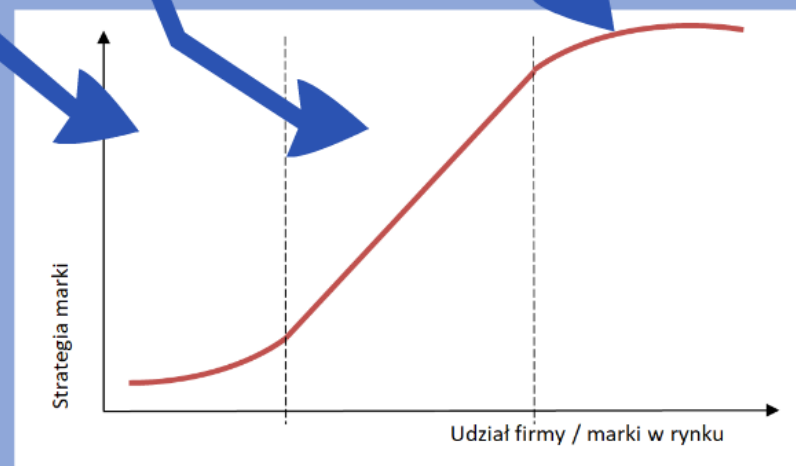
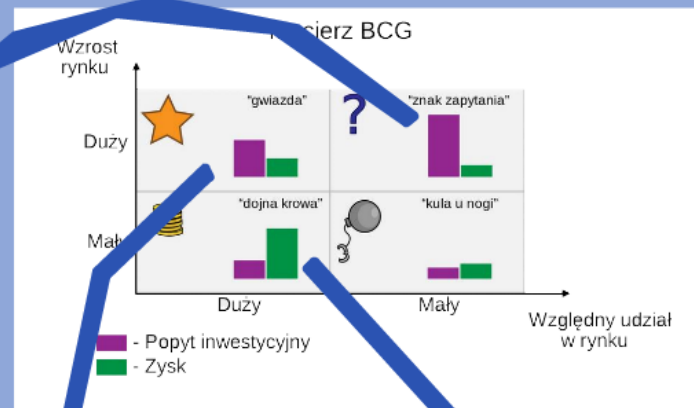
Macierz sterowań kierowniczych

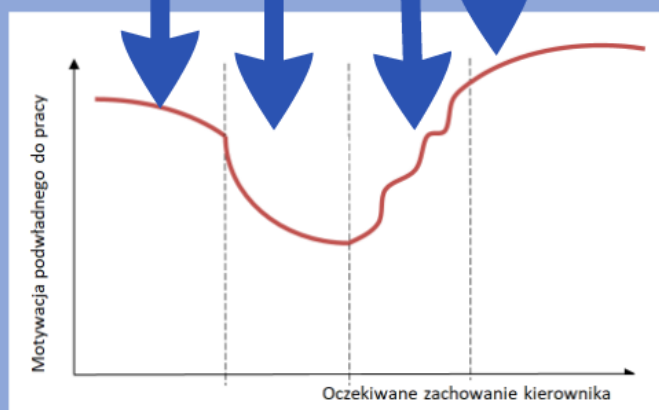
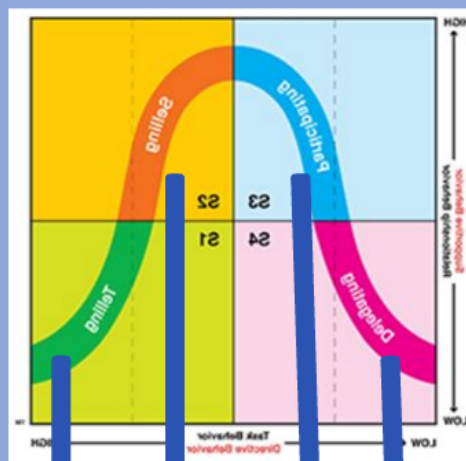
Matematyka rządzi !



		Drugi więzień (Jan)	
		nie przyznać się (B ¹)	przyznać się (B ²)
Pierwszy więzień (Adam)	nie przyznać się (A ¹)	mała kara dla obu (1)	duża kara dla Adama (3) zwolnienie Jana
	przyznać się (A ²)	duża kara dla Jana (4) zwolnienie Adama	średnia kara dla obu (2)









Dziękuję za
uwagę

Odrobina algebry liniowej, czyli
zmacierzowany, zafascynowany ja

Szymon Rosiński
kl. 8 SP. Będkowice

