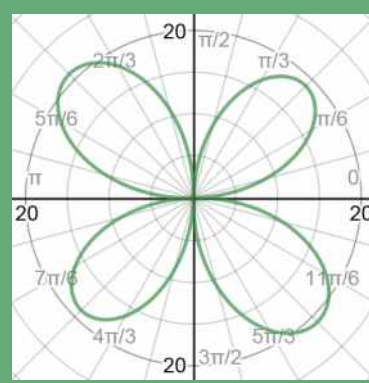
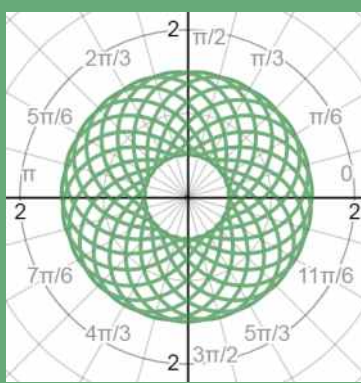
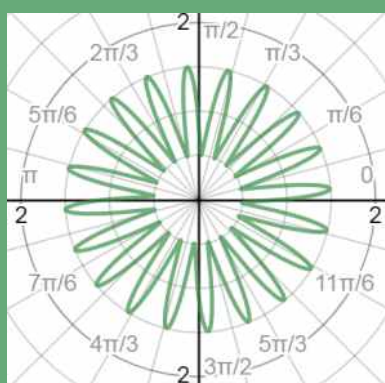
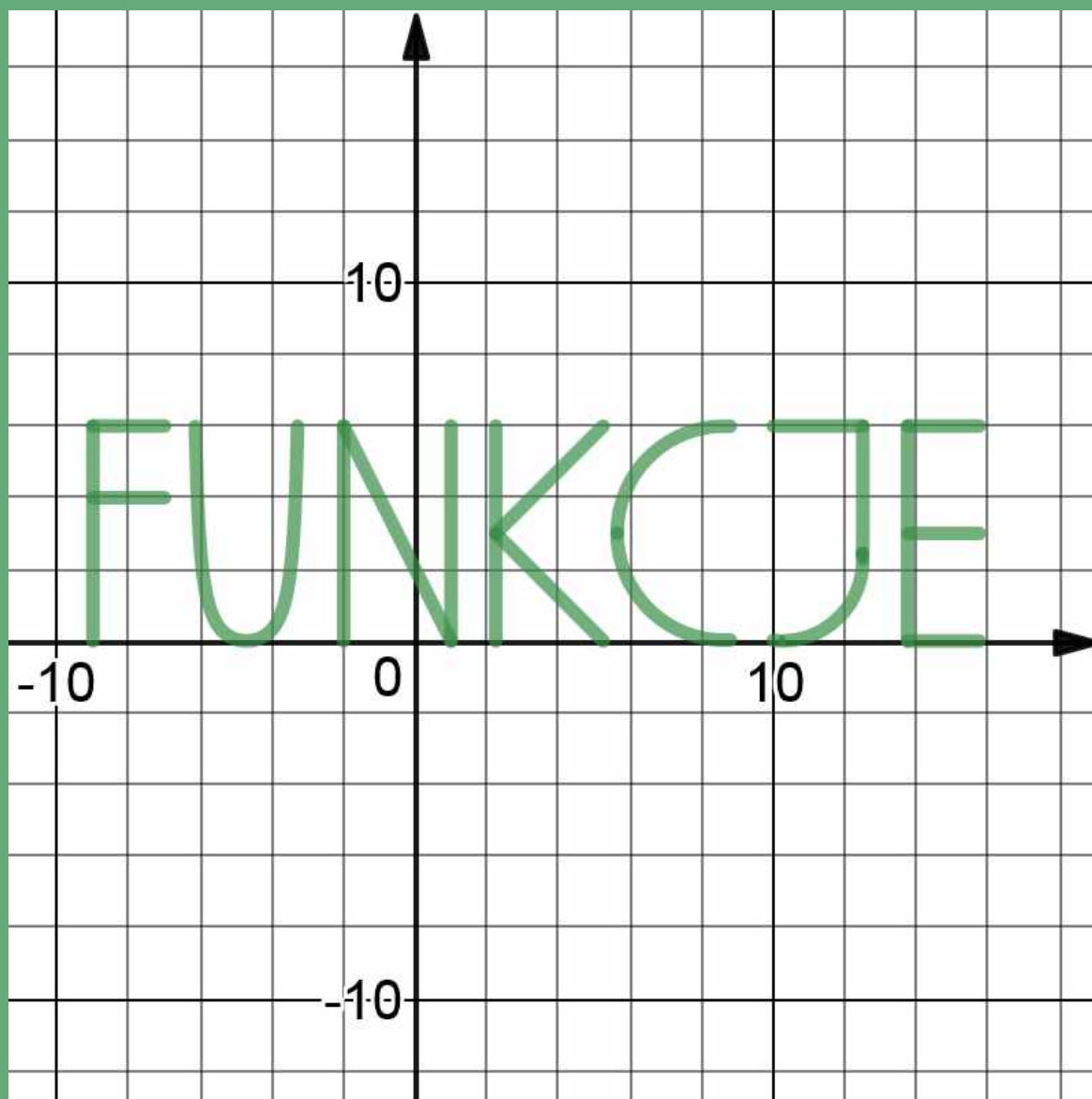


Kacper Błachut klasa VIIc

Szkoła Podstawowa nr 5 im. Konfederacji Tatrzańskiej,
ul. Orkana 17, 34-400 Nowy Targ



Opiekun: mgr Monika Parzygnat

Dane kontaktowe

Szkoła:

Szkoła Podstawowa nr 5 w Nowym Targu im. Konfederacji Tatrzańskiej

ul. Wł. Orkana 17 34-400 Nowy Targ

tel. 182662574

email: sp5@nowytarg.pl

Opiekun:

mgr Monika Parzygnat

tel. 788 601 231

email: monikabochnak94@gmail.com

Autor:

Kacper Błachut

tel. 601 22 32 31

email: kacper.blachut@gmail.com

Wstęp

Po raz trzeci próbuję zmierzyć się z wymyśleniem tematu mojej pracy w **Małopolskim Konkursie Prac Matematycznych** organizowanym przez Krakowskie Młodzieżowe Towarzystwo Przyjaciół Nauk i Sztuk w Centrum Młodzieży im. dr H. Jordana wspólnie z Oddziałem Krakowskim Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Znowu mam ogromny kłopot. Pierwsza praca była o nieskończoności. Zajmowałem się w niej między innymi różnymi paradoksami związanymi z tym pojęciem. Na przykład dowodziłem, że nieskończona suma wszystkich liczb naturalnych, nie dość, że nie jest nieskończonością, to jest ułamkiem i do tego ujemnym ($1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}$). Druga miała być jakby rozszerzeniem pierwszej i traktować o ciągach nieskończonych. Nic z tego nie wyszło. Wygrała druga z moich pasji (pierwszą jest oczywiście matematyka ☺) – kostka Rubika. A właściwie pisałem o kombinatoryce. Nie zajmowałem się algorytmami układania kostki, ale liczyłem, ile jest możliwych ułożeń takich układanek (dotyczyło to nie tylko zwykłych kostek sześciennych - $2 \times 2 \times 2$, $3 \times 3 \times 3$, $4 \times 4 \times 4$, ale także niesześciennych „rubików”). Myślałem, że w takim razie w tym roku powrócę do poprzedniego pomysłu o ciągach i nie będzie kłopotu. Niestety – kłopot jednak był i nie chciał odejść. Im bardziej wgryzałem się w ciągi, tym mniej mnie to wciągało. A z doświadczenia wiem (mimo, że jestem młodym człowiekiem, to jakieś tam doświadczenie posiadam), że jak mnie coś nie interesuje, tak na sto procent, to nic z tego nie wyjdzie. Postanowiłem odpuścić. *Mam jeszcze trochę czasu* – myślałem – *może coś samo przyjdzie*. Powróciłem więc do moich stałych zajęć pozaszkolnych tzn. przeglądania Internetu w poszukiwaniu ciekawostek matematycznych. Przeglądałem naprawdę wiele stron, ale nic nie wzbudzało mojego entuzjazmu. Były tam liczby perfekcyjne, było OEIS Online Encyclopaedia of Integer Sequences, Fourier Transform. Znalazłem nawet tzw. *eban numbers*. Liczby, które w nazwie (angielskiej) nie zawierają litery *e* – czego to ludzie nie wymyślą! Próbowałem nawet przeglądać książki! Przychodziło mi to z dużym trudem, mimo że moja ciocia pracuje w miejskiej bibliotece i właściwie miałem nieograniczony dostęp do księgozbioru. Nie oszukujmy się, należę do pokolenia wujka Google’a i cioci Wikipedii z dalekim kuzynem YouTube’em. W prezentacjach, które przygotowuję do szkoły w bibliografii trudno znaleźć jakieś wydawnictwa, za to pełno jest *www*, *http://* i *org*. Na razie książki porzuciłem. *Może później, jak podejmę jakiś temat* – myślałem uruchamiając po raz kolejny przeglądarkę Chrome.

W tym roku w szkole doszły mi nowe przedmioty, w tym fizyka i chemia. Piszę o tym, gdyż oboma tymi przedmiotami już się wcześniej interesowałem. Kiedyś nawet zdołałem przebrnąć przez dwa pierwsze rozdziały książki Michio Kaku *Hiperprzestrzeń. Wszechświaty równoległe, pętle czasowe i dziesiąty wymiar*. Niestety, potem zaczęły się schody. Miałem za mało wiedzy. Ale do rzeczy. Przy przygotowywaniu prezentacji na fizykę dotyczącej prędkości i przyspieszenia znalazłem ciekawą rzecz. Otóż przeczytałem, że prędkość jest pochodną odległości, przyspieszenie jest pochodną prędkości. Zacząłem szukać dalej i co znalazłem? Zryw jest pochodną przyspieszenia, a uderzenie jest pochodną zrywu. I to wszystko w czasie. Pochodna, pochodna, pochodna ... A cóż to takiego? Zapytałem szybko Taty (nie miałem czasu szukać w sieci - przecież prezentacja była na jutro). *Pochodna to miara szybkości zmian*

wartości funkcji względem zmian jej argumentów - odpowiedział poważnie, po czym się roześmiał, widząc moja minę. *Aby zrozumieć, co to jest pochodna, musisz zacząć od funkcji, inaczej nic z tego nie będzie* - dodał.

Następnego dnia po powrocie ze szkoły zacząłem przeglądać sieć w poszukiwaniu opisu funkcji. Okazało się, że to temat rzeka, bardzo obszerny. Dziedzina, przeciwdziedzina, wykresy, ekstrema, badanie przebiegu zmienności, pochodne, całki – to tylko niektóre pojęcia jakimi zasypywał mnie Internet. Aby to wszystko usystematyzować zacząłem od wykresów. Jestem wzrokowcem i lepiej do mnie trafia wiedza poprzez oczy, niż przez uszy.

Przeglądając sieć dotarłem do stron geogebra (<https://www.geogebra.org/graphing>), a potem WolframAlpha (<https://www.wolframalpha.com>), aby zakończyć na Desmos Graphing Calculator (<https://www.desmos.com/calculator>). To było ciekawe! Niektóre przykłady z Desmos'a były wręcz fascynujące! *Skoro wykresy funkcji są takie ciekawe, to cała reszta też taka musi być* – pomyślałem podejmując decyzję. FUNKCJE. Taki będzie temat mojej trzeciej pracy. Zacząłem zbierać materiały. Bywało różnie. Czasami wszystko trafiało do mnie bez trudu, ale innym razem kompletnie nie rozumiałem, o co w tym wszystkim chodzi. Bywały chwile wątplenia, ale też radości, kiedy wreszcie rozumiałem jakiś trudny problem. Ale najbardziej fascynowały mnie wykresy funkcji i to nie tylko w układzie kartezjańskim.

Powrócę do książek. Starłem się znaleźć jakieś wydawnictwa (oczywiście przez Google), które w sposób ogólny opisywałyby mój temat, ale gdy dotarłem do tytułów: *Miejsce i funkcje reklamy w zespole elementów aktywizacji sprzedaży*, czy też *Strój górali Beskidu Śląskiego: funkcje społeczno-kulturalne* dałem sobie spokój. Może później ...

Wszystko co udało mi się zebrać i zrozumieć starałem się przelać na karty niniejszej pracy. Czy mi się udało? Ocenicie Państwo sami.

INFORMACJA NAUCZYCIELA

Kacper jest uczniem klasy siódmej. Już po raz trzeci startuje w Małopolskim Konkursie Prac Matematycznych. W roku szkolnym 2016/2017 zajął II miejsce pisząc pracę na temat nieskończoności natomiast w 2017/2018 zajął I miejsce przedstawiając swoje zainteresowania na temat kostek Rubika.

Wszystkie prace pisemne Kacpra są wykonywane bezbłędnie, zadania o podwyższonym stopniu trudności wykonuje bez żadnych problemów. Rozwiązania zadań są zawsze szczegółowe i bardzo precyzyjne. Uczeń preferuje pracę samodzielną, jednak chętnie dzieli się swoją wiedzą i doświadczeniem z innymi uczniami.

Kacper brał udział także w innych konkursach matematycznych:

- w Małopolskim Konkursie Matematycznym przeszedł do etapu rejonowego,
- w międzyszkolnym konkursie „Niepodległość w liczbach” zajął II miejsce w kategorii klas VI – VIII,
- w konkursie matematycznym „Kangur”,
- w konkursie matematycznym „Krakowska Matematyka”

Uczeń ciągle poszerza swoją wiedzę i umiejętności matematyczne, rozwija swoje zainteresowania, a także szuka nowych problemów do rozwiązania. Jeśli zaciekawo Go jakiś temat to dąży do tego, aby się dowiedzieć o nim jak najwięcej. Przykładem jest ta praca, którą napisał samodzielnie.

W pracy konkursowej wykorzystał duże wiadomości i umiejętności, które posiada i ciągle poszerza. Opierał się na bibliografii dołączonej do pracy.

Monika Parzygnat

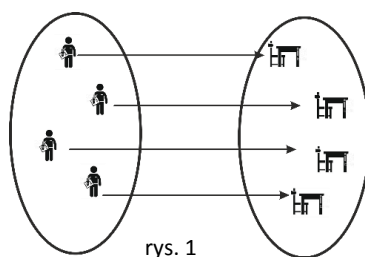
Monika Parzygnat
telefon: 788 601 231
email: monikabochnak94@gmail.com

Definicje

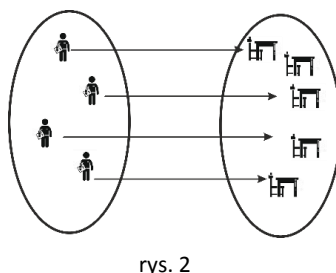
Co to jest funkcja? Najczęściej spotykałem się z taką oto definicją:

Funkcją nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi jednego zbioru dokładnie jednego elementu drugiego zbioru.

Jak to zwykle robię z nowymi matematycznymi pojęciami spróbowałem wyobrazić sobie jakiś przykład. Weźmy podzbiór uczniów mojej klasy oraz podzbiór ławek w naszej sali. Czy takie przyporządkowanie jak rysunku 1 można nazwać funkcją?

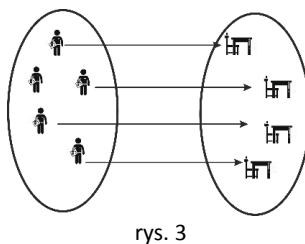


Zobaczmy: każdemu elementowi lewego zbioru (uczniowi) odpowiada dokładnie jeden element prawego zbioru (ławka). Zgodnie z powyższą definicją jest to funkcja. Popatrzmy na inne przykłady i spróbujemy określić czy takie przyporządkowania spełniają warunki określone w definicji funkcji.

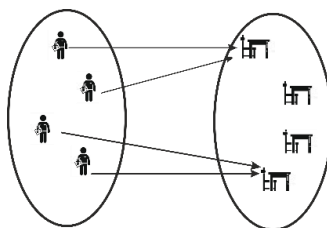


Przykład na rysunku 2 różni się od poprzednika, że liczba ławek jest większa niż liczba uczniów. Jeden element zbioru po prawej pozostaje „pusty”. To także jest funkcja. Dlaczego? **Każdemu** elementowi zbioru po lewej odpowiada dokładnie **jeden** element zbioru po prawej. Definicja funkcji nic nie mówi o tym, że w zbiorze wynikowym muszą być „wskazane” wszystkie elementy.

Idźmy dalej i weźmy następny przykład.

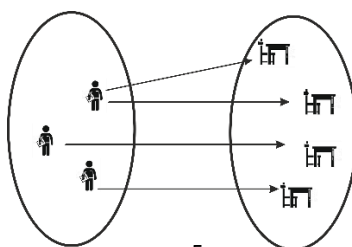


Tym razem w zbiorze po prawej mamy jeden element więcej niż w pierwszym przykładzie. Czy jest to funkcja? NIE. Nie każdemu elementowi z pierwszego zbioru przyporządkowany jest element drugiego zbioru.



rys. 4

Na rysunku 4 kilku uczniów zostało przyporządkowanych do jednej ławki. Czy jest to funkcja? TAK. Definicja nic nie mówi, o tym, że różnym elementom zbioru nie mogą odpowiadać te same elementy zbioru drugiego. Popatrzmy na rysunek powyżej i zauważmy, że: **każdemu** elementowi jednego zbioru odpowiada dokładnie **jeden** element drugiego.

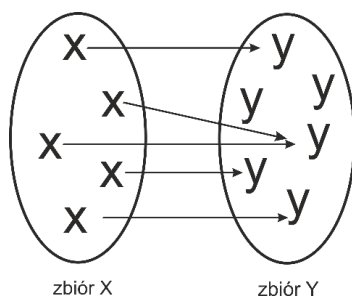


rys. 5

W powyższym przykładzie zauważmy, że jednemu uczniowi odpowiadają dwie różne ławki. Czy to jest funkcja? NIE. Definicja mówi wyraźnie, że jednemu elementowi pierwszego zbioru odpowiada **dokładnie jeden** element zbioru drugiego.

Po tych przykładach już jestem mądrzejszy 😊.

Ogólnie możemy narysować tak:



rys. 6

Każdemu elementowi zbioru X odpowiada dokładnie jeden element zbioru Y (ale nie na odwrót). Zbiór X jest nazywany dziedziną funkcji, a zbiór Y zbiorem wartości funkcji.

Tak więc dziedzina funkcji to: to **zbiór wszystkich argumentów** funkcji, inaczej można powiedzieć, że jest to zbiór tych x -ów dla których określona jest funkcja.

A przeciwdziedzina to zbiór zawierający zbiór wartości funkcji.

Odwołując się do poprzedniego rysunku mówimy, że funkcja f przyporządkowuje elementom zbioru X elementy zbioru Y i zapisujemy to następująco:

$$f: X \rightarrow Y \quad \text{inaczej} \quad y = f(x)$$

Zbiór X to dziedzina, a zbiór Y to zbiór wartości funkcji f .

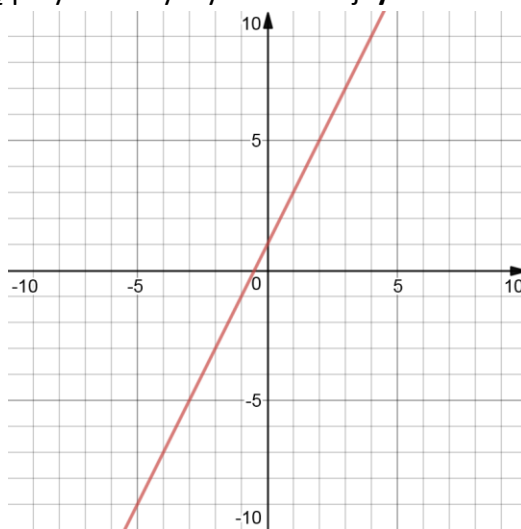
Jeśli dziedzina X jest skończona, to aby określić funkcję wystarczy wymienić jej wszystkie pary: argument $\rightarrow$ wartość (x, y) . Można to zrobić za pomocą np. takich rysunków jakie zamieściłem na poprzednich stronach. W takich funkcjach nie ma nic interesującego (przynajmniej dla mnie). Ciekawie zaczyna być dopiero, gdy zajmiemy się funkcjami liczbowymi. Można je zdefiniować w sposób analityczny, za pomocą wzorów, np.

$$y = 2x + 1, \quad y = 3x^2 + 2x + 1, \quad y = \sin(x).$$

W takich przypadkach możemy trochę zmienić definicję funkcji i zamiast mówić o relacjach, zaczniemy je określać zależność między dwoma zmiennymi x i y , gdzie $x \in X$, a $y \in Y$. Zmienną x nazywamy niezależną, a y zmienną zależną. X jest niezależne, gdyż możemy je dobierać dowolnie (jedyne ograniczenie to, że x musi należeć do dziedziny), natomiast y zmienia się w zależności od x . Np. w przypadku funkcji $y = 2x + 1$, gdy $x = 1$, to $y = 3$, gdy $x = 2$ to $y = 5$ itd.

Funkcję możemy sobie także wyobrazić jako zbiór par (x, y) i wtedy już tylko jeden krok do najbardziej fascynującej rzeczy dotyczącej funkcji - do wykresu. Jeżeli takie pary (x, y) naniesiemy na układ kartezjański to powstanie nam wykres funkcji. Dodajmy do tego jeszcze zależności pomiędzy wartością, a argumentem funkcji i już mamy naprawdę ciekawy temat.

Na rysunku 7 pokazuję przykładowy wykres funkcji **$y = 2x + 1$**

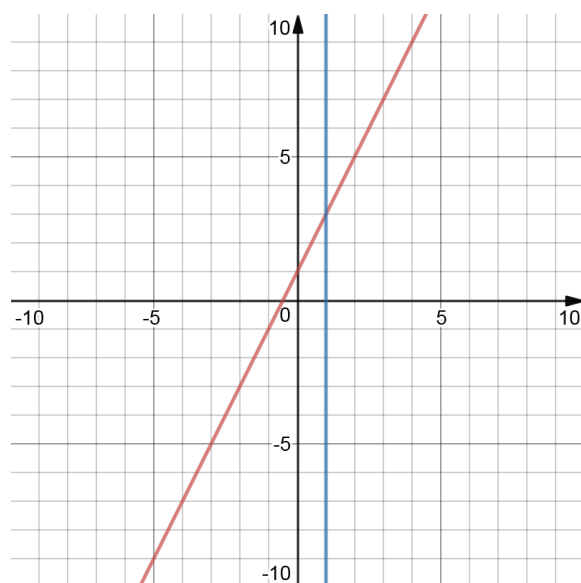


rys. 7

(wszystkie wykresy w niniejszej pracy zostały stworzone w kalkulatorze DESMOS
(<https://www.desmos.com/calculator>)

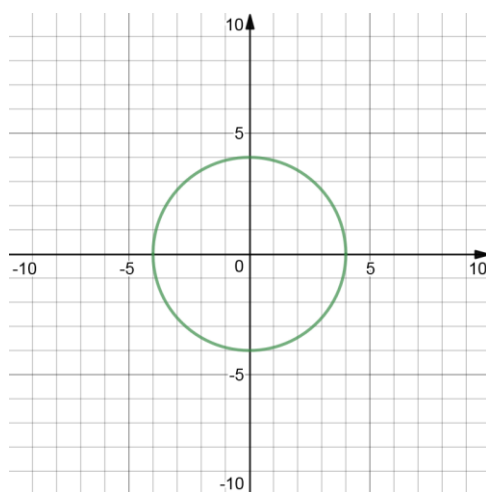
W całej pracy w układzie współrzędnym oś poziomą będziemy oznaczać osią X ,
a oś pionową osią Y

Patrząc na wykres funkcji i porównując go z definicją (każdemu elementowi jednego zbioru jest przyporządkowany **dokładnie** jeden element drugiego) możemy zauważyć, że jeżeli narysujemy linię pionową (równoległą do osi Y) to będzie ona przecinać wykres w co najwyżej jednym punkcie.



rys. 8

Analizując powyższą definicję musiałem stwierdzić, że np. okrąg nie jest wykresem funkcji.



rys. 9

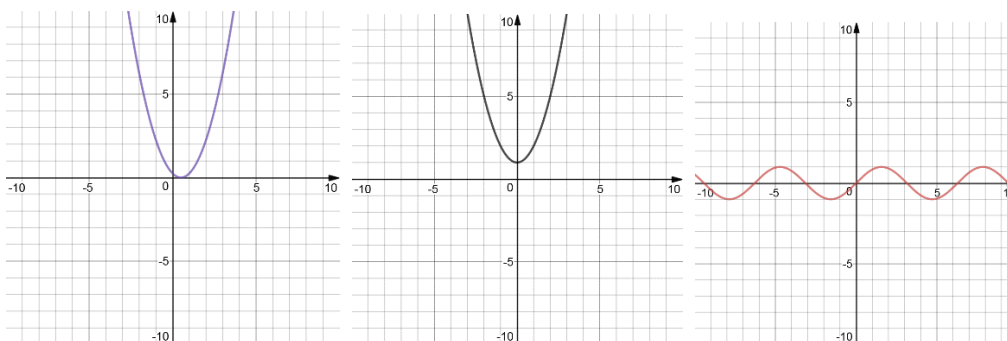
Dlaczego? Widać to z rysunku, każdemu x -owi musi być przyporządkowany dokładnie jeden y . A w wykresie okręgu tak nie jest. Czy rzeczywiście? Odpowiedź później.

Własności funkcji

Każdej funkcji możemy przypisać pewne własności, które opiszę poniżej. Większość tych cech wykorzystuje się w trakcie tzw. badania przebiegu zmienności funkcji. Podobno zadania z badania przebiegu zmienności funkcji przyprawiają niektórych maturzystów o palpitacje serca. Zupełnie nie wiem, dlaczego? ☹️

a) Miejsce zerowe

To taki argument x , dla którego funkcja przyjmuje wartość 0 ($f(x) = 0$). Funkcje mogą nie mieć miejsca zerowego, mogą mieć też jedno miejsce zerowe lub wiele. Na wykresie miejsce zerowe to takie, w którym wykres przecina oś X ($y=0$)



rys. 10

b) Monotoniczność

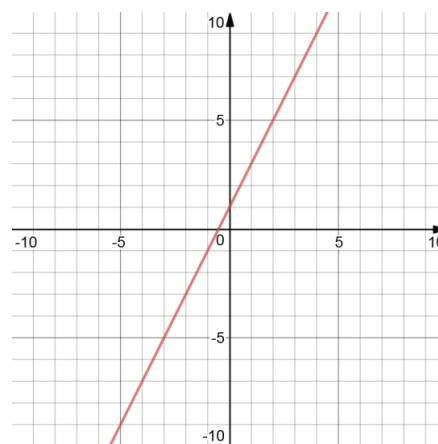
Przy badaniu monotoniczności określamy, czy funkcja jest rosnąca, czy też malejąca. Co te określenia oznaczają? Dla mnie są to określenia czysto intuicyjne. Funkcja jest rosnąca, jeżeli przy rosnących argumentach rosną także jej wartości:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1).$$

I na odwrót funkcję nazywamy malejącą, jeżeli przy rosnących argumentach jej wartości maleją:

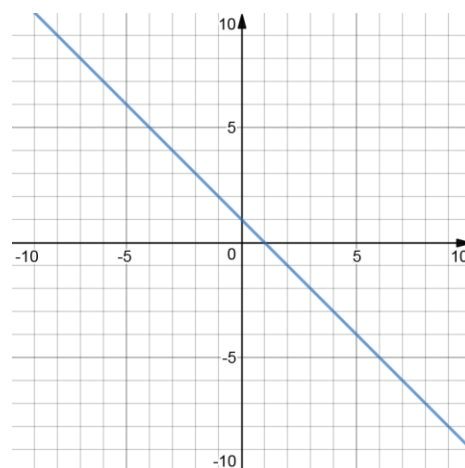
$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1).$$

Na wykresie funkcji monotoniczność można określić jeszcze prościej. Otóż, gdy wykres „rośnie” (tzn. „podnosi” się z lewa na prawo) to jest to funkcja rosnąca.



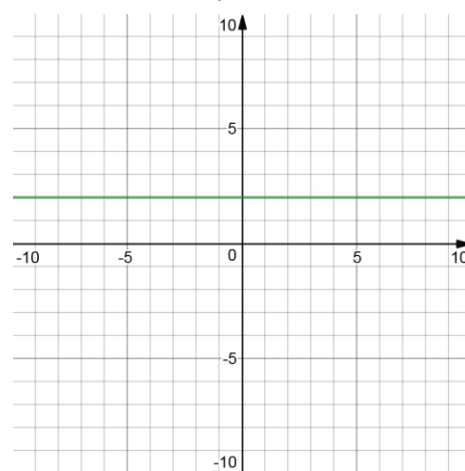
rys. 11

Natomiast gdy wykres „maleje” (tzn. „opada” z lewa na prawo) to jest to funkcja malejąca.



rys. 12

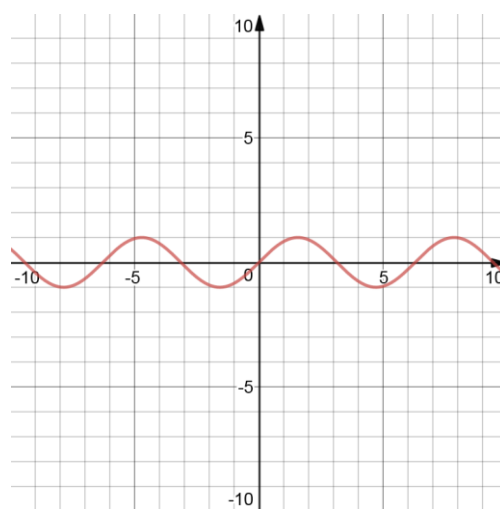
Mówimy także o funkcji stałej, tzn. o takiej, która niezależnie od argumentu przyjmuje jedną wartość: $f(x) = a$. Wykresem takiej funkcji jest linia pozioma.



rys. 13

Można także definiować funkcje niemalejące i nierosnące. Funkcja jest niemalejąca, jeżeli jest rosnąca lub jest stała. Funkcja jest nierosnąca, jeżeli jest malejąca lub jest stała (podobnie mamy ze znakiem większy lub równy/mniejszy lub równy).

Możemy także określać monotoniczność funkcji w pewnych przedziałach. Funkcja w jednym przedziale może być rosnąca, by za chwilę w innym być malejąca. Dobrym przykładem takiej funkcji jest funkcja sinus.



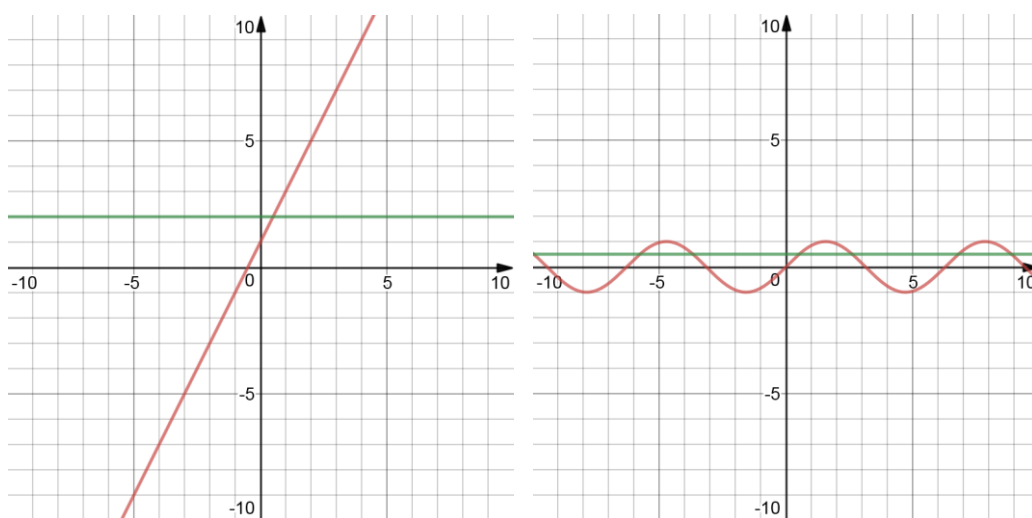
rys. 14

c) Różnowartościowość

Funkcja jest różnowartościowa, jeżeli dla każdego argumentu przyjmuje inną wartość, tzn. dla każdego x przyjmuje inną wartość y . Zapisujemy to tak:

$$x_2 \neq x_1 \Rightarrow f(x_2) \neq f(x_1).$$

Wykresu funkcji różnowartościowej nie da się przeciąć prostą równoległą do osi X w więcej niż jednym punkcie. Przykładem funkcji różnowartościowej może być np. każda funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ dla $a \neq 0$. Natomiast funkcja sinus nie spełnia definicji różnowartościowości.



rys. 15

d) Parzystość/Nieparzystość

Funkcję nazywamy parzystą, jeżeli dla każdego argumentu x należącego do dziedziny zachodzi równanie:

$$f(x) = f(-x).$$

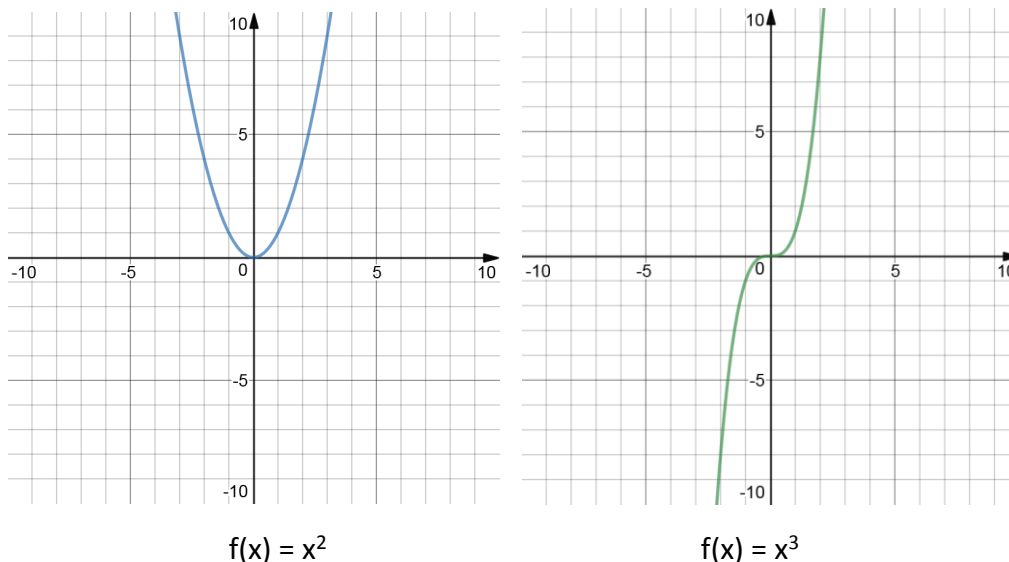
Oczywiście $-x$ musi także należeć do dziedziny funkcji. Bardzo ważnym określeniem jest tutaj **dla każdego**, nie wystarczy znalezienie jednego (kliku) takich argumentów, aby powyższe równanie było spełnione. Równanie musi być prawdziwe dla wszystkich argumentów. A jak to się przekłada na wykres? Otóż funkcja jest parzysta, jeżeli jej wykres jest symetryczny względem osi Y .

Funkcję nazywamy nieparzystą, jeżeli dla każdego argumentu x należącego do dziedziny spełnione jest równanie

$$f(-x) = -f(x).$$

Podobnie jak z funkcją parzystą. Równanie musi być spełnione **dla każdego argumentu** oraz x i $-x$ muszą należeć do dziedziny funkcji. A co z wykresem? Otóż wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem początku układu współrzędnych $(0,0)$.

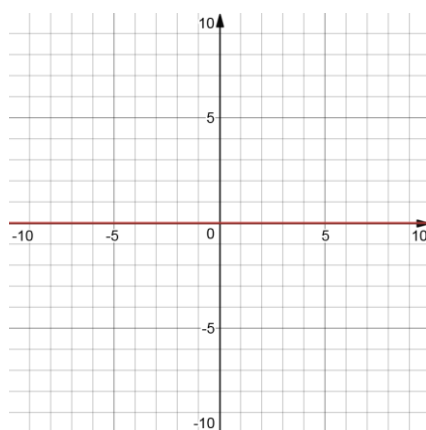
Przykładem funkcji parzystej może być funkcja kwadratowa $f(x) = x^2$. Natomiast funkcja nieparzysta to np. $f(x) = x^3$.



rys. 16

W algebrze mamy także określenia parzystości i nieparzystości liczb. Wprost z definicji wynika, że jeżeli liczba nie jest parzysta to jest nieparzysta (wyjątkiem jest zero). Czy tak jest również w przypadku tych definicji? Nie! Jeżeli funkcja nie spełnia definicji parzystości wcale nie wynika, że ta funkcja jest nieparzysta. I na odwrót, jeżeli funkcja nie jest nieparzysta nie można wywnioskować, że jest ona parzysta. Wynika to choćby z zależności pomiędzy definicjami parzystości/nieparzystości, a wykresami funkcji. Jest cała masa wykresów funkcji, które nie są symetryczne ani względem osi Y, ani punktu (0,0). A czy jest funkcja, która spełnia definicję zarówno parzystości, jak i nieparzystości? Spróbujmy policzyć (z wykresu widać to od razu – intuicyjnie).

Taka funkcja byłaby parzysta, a więc $f(x) = f(-x)$ oraz nieparzysta, a więc $f(-x) = -f(x)$. Dodajmy to stronami: $f(x) + f(-x) = f(-x) - f(x)$ i dalej $2f(x) = f(-x) - f(x)$, a więc $2f(x) = 0$, czyli $f(x) = 0$. Istnieje zatem funkcja, która jest zarówno parzysta jak i nieparzysta. I jest to funkcja stała $f(x) = 0$. Powróćmy teraz do wykresu:

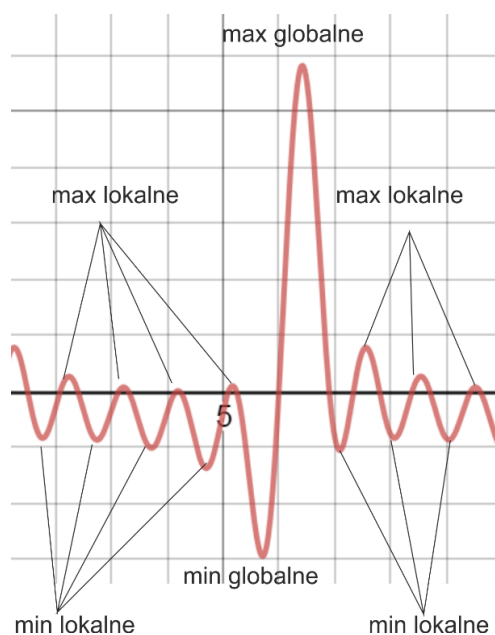


rys. 17

Prawda, że nie trzeba wiele liczyć? Wystarczy popatrzeć na układ kartezjański i od razu widać, że funkcja stała $f(x) = 0$ jest symetryczna względem osi Y (a więc jest parzysta), ale jest także symetryczna względem punktu (0,0), czyli jest nieparzysta. Kłóci się to z naszym pojmowaniem parzystości i nieparzystości przeniesionym z algebry, ale z funkcjami tak właśnie jest.

e) Ekstrema (minimum i maksimum)

Jest to temat rzeka. Tutaj określe tylko takie intuicyjne „definicje”. Otóż funkcja $f(x)$ przyjmuje minimum (maksimum) lokalne w punkcie x_0 , jeżeli w pewnym otoczeniu tego punktu funkcja nie przyjmuje wartości mniejszych (większych) niż $f(x_0)$. Natomiast najmniejsza i największa wartość funkcji w całej dziedzinie (o ile istnieją) nazywane są ekstremami globalnymi (globalne minimum i maksimum). W teorii definicje są dość skomplikowane, natomiast na rysunku 18 od razu wszystko widać jak na dłoni.



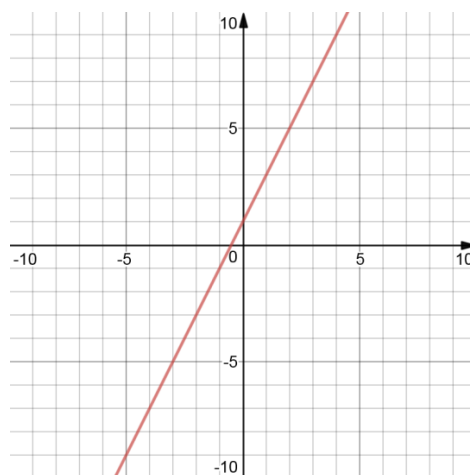
rys. 18

Istnieją oczywiście takie funkcje, które posiadają tylko jedno ekstremum (minimum bądź maksimum) np. $f(x) = x^2$ ($f(x) = -x^2$). Są także takie funkcje, które nie posiadają żadnych ekstremów – np. funkcje liniowe. Określanie ekstremów jest bardzo ważne w praktycznych zastosowaniach matematyki. Ich obliczanie związane jest z tzw. pochodnymi funkcji – ale o tym później.

Rodzaje funkcji

W tym rozdziale zajmę się opisaniem kilku podstawowych i najbardziej znanych oraz ciekawych funkcji i ich wykresów. Wybór jest całkowicie indywidualny, przedstawię kilka prostych funkcji, a potem te, które mnie najbardziej zainteresowały.

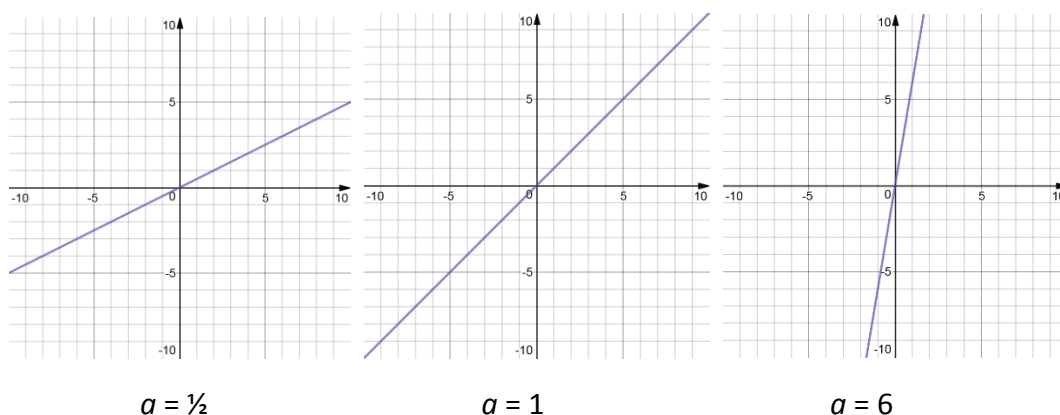
a) Funkcja liniowa $f(x) = ax + b$



rys. 19

Jest to jedna z najprostszych funkcji liczbowych. Jak sama nazwa wskazuje wykresem takiej funkcji jest linia prosta. Dziedziną jest cały zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Zbiór wartości także obejmuje całe $\mathbb{R}$. Parametr a odpowiada za nachylenie wykresu względem osi X. Im większy parametr a , tym bardziej linia jest „stroma”.

$$y = ax$$



$$a = \frac{1}{2}$$

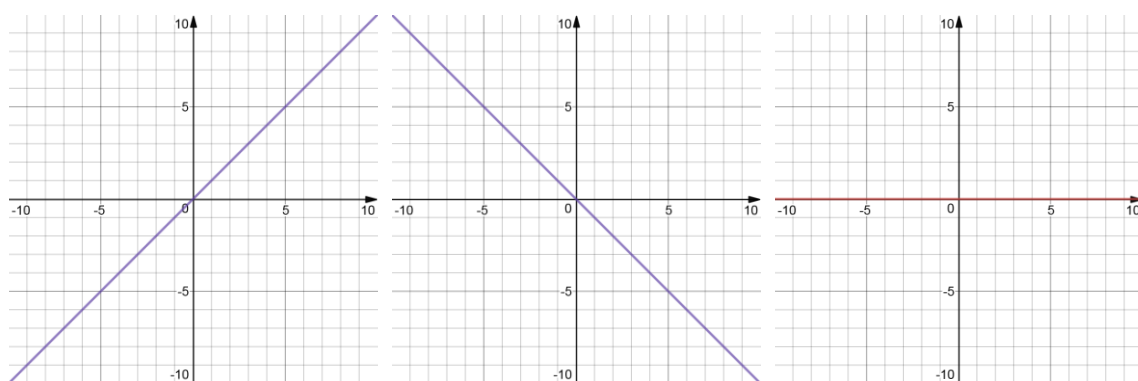
$$a = 1$$

$$a = 6$$

rys. 20

Parametr a odpowiada także za monotoniczność funkcji liniowej: gdy a jest dodatnie funkcja jest rosnąca, natomiast przy a mniejszym od zera, funkcja jest malejąca, natomiast gdy a jest równe zero, to funkcja liniowa staje się funkcją stałą.

$$y = ax$$



$$a = 1$$

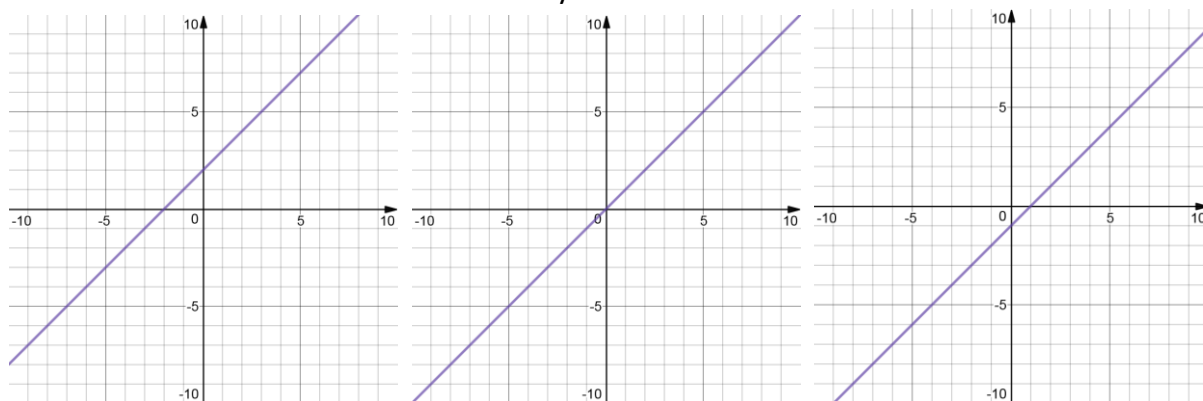
$$a = -1$$

$$a = 0$$

rys. 21

Parametr b odpowiada za „przesunięcie” wykresu w górę ($b > 0$) lub w dół ($b < 0$). Oczywiście, gdy wykres jest linią - możemy powiedzieć równie dobrze - że przesunięcie wykresu następuje w prawo ($b < 0$) lub w lewo ($b > 0$)

$$y = x + b$$



$$b = 2$$

$$b = 0$$

$$b = -1$$

rys. 22

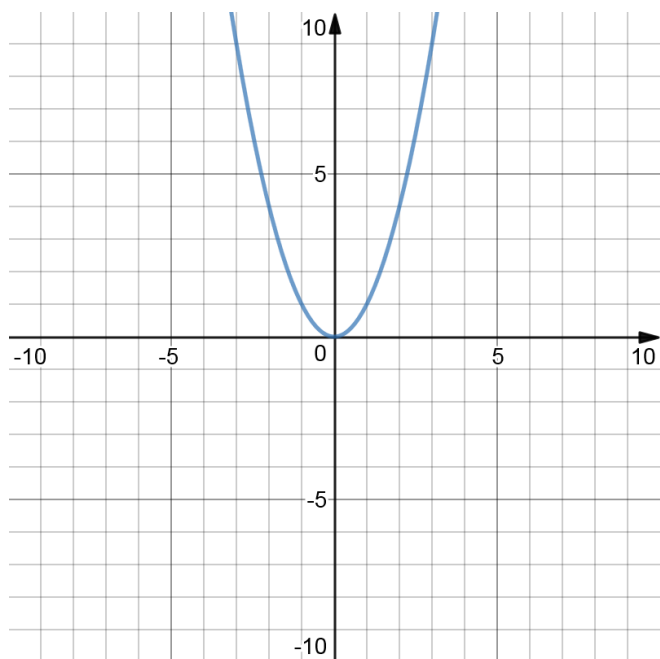
Już po tych kilku wykresach możemy bardzo prosto określić kilka opisanych wcześniej własności funkcji. Zatem:

- $a \neq 0$ funkcja liniowa jest różnowartościowa,
- $a > 0$ funkcja liniowa jest rosnąca,
- $a < 0$ funkcja liniowa jest malejąca,
- $a = 0$ (funkcja stała) funkcja liniowa jest parzysta,
- $b = 0$ funkcja liniowa jest nieparzysta,
- $a = 0$ i $b = 0$ funkcja liniowa jest zarówno parzysta jak i nieparzysta.

Z wykresu widać również, że funkcje liniowe nie posiadają ekstremów ani lokalnych, ani globalnych. A co z miejscami zerowymi? Również wykres pokazuje nam, że funkcja liniowa (z wyłączeniem funkcji stałej) ma jedno miejsce zerowe, które możemy w prosty sposób obliczyć z wzoru $ax + b = 0$ ($-b, 0$).

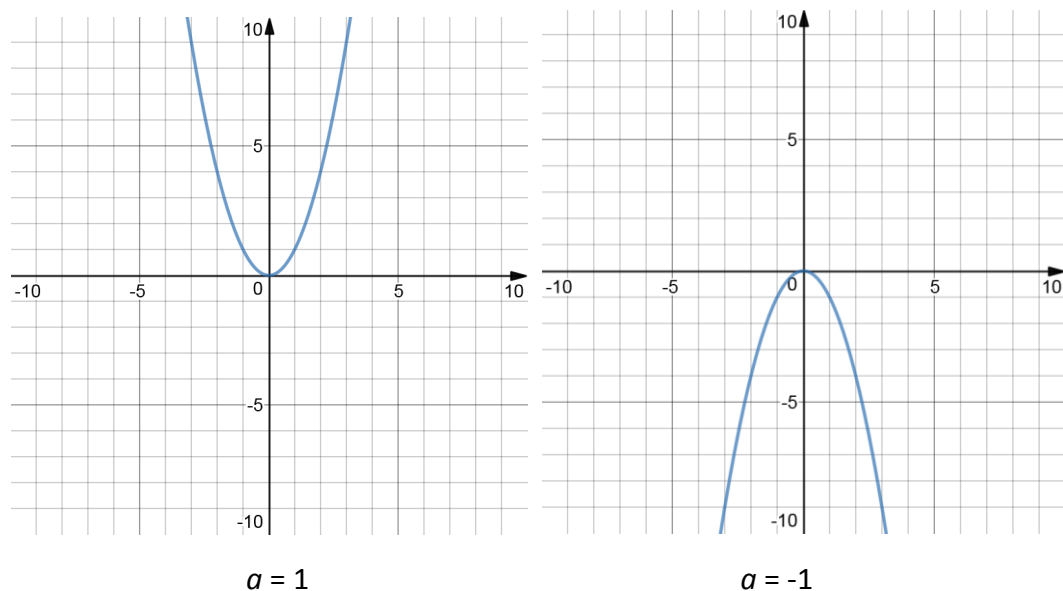
b) Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$,

gdzie $a \neq 0$ (przy $a = 0$ mamy funkcję liniową).



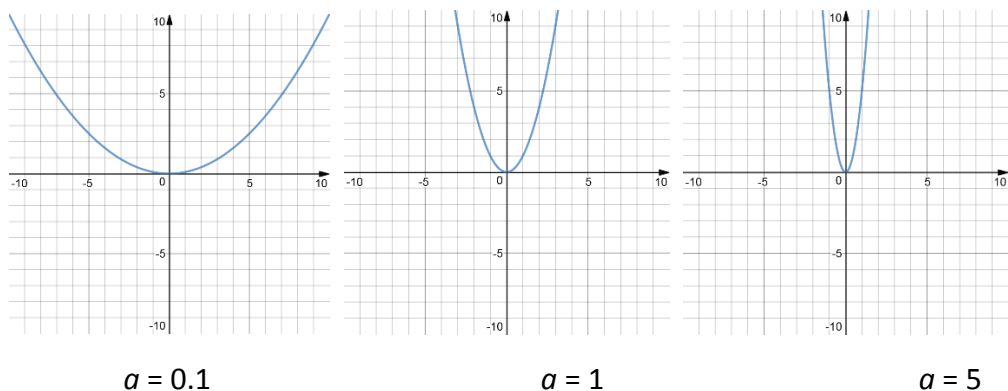
rys. 23

Wykres funkcji kwadratowej zwany jest parabolą. W zależności od znaku parametru a parabola może mieć ramiona skierowane w górę bądź w dół.



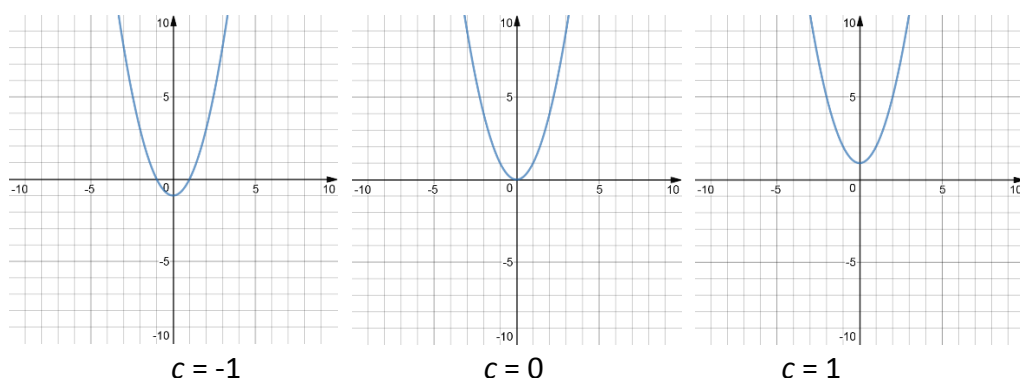
rys. 24

Od parametru a zależy także, czy parabola jest bardziej „strzelista”, czy też bardziej szeroka.



rys. 25

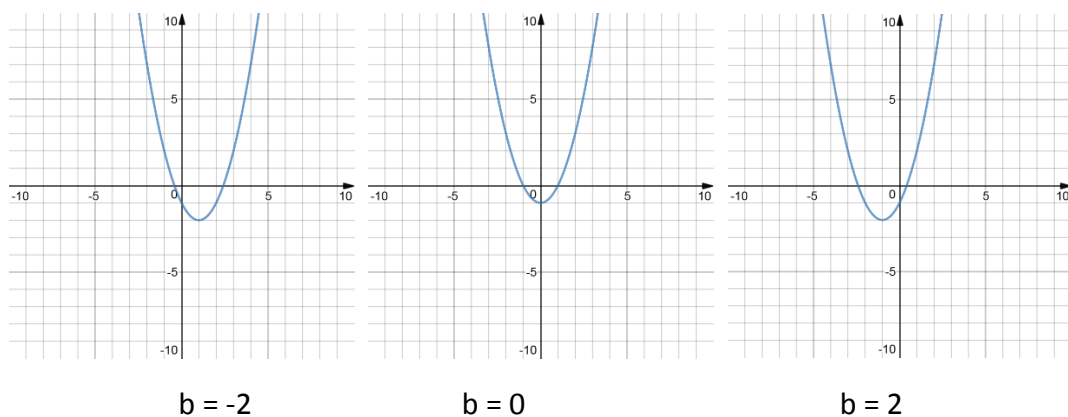
Parametr c odpowiada za „przesunięcie” wykresu w górę ($c > 0$) lub w dół ($c < 0$)



rys. 26

Z parametrem b sprawa jest bardziej skomplikowana. Otóż powoduje on przesuwanie się paraboli zgodnie ze zwrotem osi OX (gdy $b < 0$) lub przeciwnie ($b > 0$) przy jednoczesnym zachowaniu punktu przecięcia wykresu z osią OY .

Zwróćmy uwagę na punkt $(0,-1)$ – punkt przecięcia się paraboli z osią OY – pozostaje bez zmian.



rys. 27

Często spotykamy się z tak zwaną postacią kanoniczną funkcji kwadratowej

$$f(x) = a(x-p)^2 + q.$$

Jest to postać przekształcona z ogólnego wzoru $f(x) = ax^2 + bx + c$. Postać kanonicza ułatwia nam rysowanie paraboli, gdyż współrzędne (p, q) wyznaczają wierzchołek paraboli (a parametr a jej zwrot). Aby udowodnić równość obu wzorów wystarczy je do siebie przyrównać:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x-p)^2 + q && \text{/podnosimy (x-p) do kwadratu} \\ ax^2 + bx + c &= a(x^2 - 2px + p^2) + q && \text{/mnożymy wyrażenie w nawiasie przez a} \\ ax^2 + bx + c &= ax^2 - 2apx + ap^2 + q && \text{/odejmujemy od obu stron równania } ax^2 \\ bx + c &= -2apx + ap^2 + q \end{aligned}$$

aby równanie było prawidłowe współczynniki „z x” po obu stronach muszą być równe oraz współczynniki „bez x” także muszą być równe. Zatem:

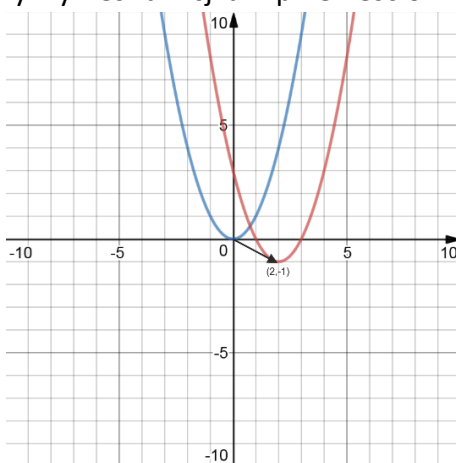
$$b = -2ap \text{ oraz } c = ap^2 + q.$$

Obliczmy z tego układu równań p oraz q .

Z pierwszego równania otrzymujemy $p = -\frac{b}{2a}$. Wstawiając p do drugiego równania otrzymujemy $c = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + q$ a więc $q = c - \frac{b^2}{4a}$ sprowadzając lewą stronę równania do wspólnego mianownika otrzymujemy $q = \frac{4ac}{4a} - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$. Licznik tego ułamka zwany jest wyróżnikiem równania kwadratowego i oznaczany jest symbolem Δ (delta) $\Delta = b^2 - 4ac$. Otrzymujemy zatem $p = -\frac{b}{2a}$ oraz $q = -\frac{\Delta}{4a}$.

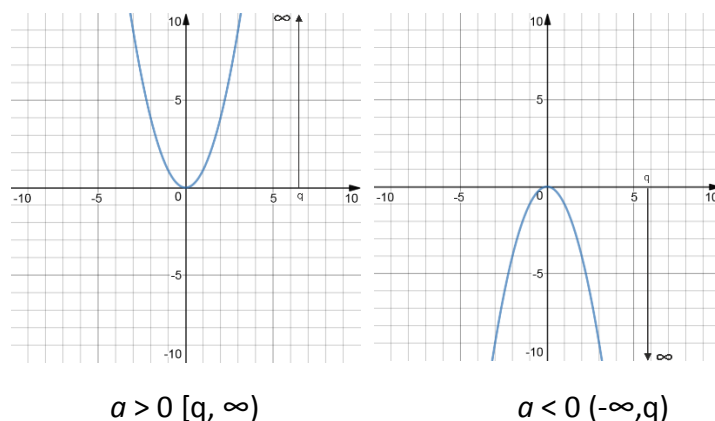
Popatrzmy na przykład:

Weźmy funkcję kwadratową: $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Przekształćmy ją na postać kanoniczną: $a = 1, b = -4, c = 3; \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4; p = -\frac{-4}{(2 \cdot 1)} = 2; q = -\frac{4}{4 \cdot 1} = -1$, a więc $f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$. Korzystając z funkcji kanoniczej możemy od razu otrzymać wierzchołek paraboli. Można powiedzieć, że mając wartości p i q , chcąc otrzymać wykres funkcji kwadratowej wystarczy wykres funkcji ax^2 przenieść o wektor $[p, q]$.



rys. 28

Po tak trochę długich obliczeniach przejdźmy do podstawowej właściwości funkcji jaką jest dziedzina i zbiór wartości. Oczywiście dziedziną będzie zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. A co będzie ze zbiorem wartości? Najlepiej widać to na rysunku. Jeżeli a jest dodatnie, to zbiorem wartości będzie zbiór liczb (na osi Y) od wierzchołka w górę (do nieskończoności) a więc $[q, \infty)$, i analogicznie, jeżeli a jest ujemne to zbiorem wartości będzie $(-\infty, q]$.



rys. 29

A co z monotonicznością? Znowu pomocna będzie postać kanoniczna funkcji kwadratowej. Wiemy, że wierzchołek paraboli to punkt (p, q) , wiemy także, że przy $a > 0$ ramiona paraboli „skierowane” są w górę, a gdy $a < 0$ w dół. I już z tego możemy wywnioskować, że funkcja maleje w przedziale $(-\infty, p)$, a rośnie w przedziale (p, ∞) i odwrotnie przy $a < 0$ funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty, p)$, a jest malejąca w przedziale (p, ∞) .

Natomiast jeżeli chodzi o ekstrema, to funkcja kwadratowa ma tylko jedno maksimum globalne przy $(a < 0)$ lub minimum globalne $(a > 0)$. To ekstremum to wierzchołek paraboli, a więc funkcja kwadratowa osiąga minimum (maksimum) q w punkcie p .

Możemy jeszcze zastanowić się nad parzystością i nieparzystością. Tutaj znowu z pomocą przychodzi nam wykres. Popatrzmy na parabolę - kiedy funkcja kwadratowa będzie symetryczna wobec początku układu współrzędnych? Nigdy! A kiedy będzie symetryczna wobec osi Y? Tylko wtedy, gdy wierzchołek będzie leżał na osi Y, czyli $p = 0$. Podstawmy to do wzoru na p i otrzymamy $-\frac{b}{2a} = 0$. Kiedy to równanie będzie prawdziwe? Mianownik nie może być równy zero, więc $b = 0$. A więc funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest parzysta tylko wtedy, gdy jej parametr $b = 0$.

Czy funkcja kwadratowa jest różnowartościowa? I znowu popatrzmy na wykres. Od razu stwierdzimy, że nie. Gdziekolwiek narysujemy linię poziomą (oczywiście w granicach zbioru wartości) przetnie nam ona wykres w dwóch miejscach (lub w jednym, gdy linia będzie przechodzić przez wierzchołek).

Pozostają nam jeszcze tylko miejsca zerowe funkcji. Z wykresu możemy wywnioskować, że parabola może przecinać oś X (to są właśnie miejsca zerowe) w dwóch miejscach, w jednym, bądź nie przecinać w ogóle. Od czego to zależy? Spróbujmy sprawdzić. Zaczniemy znowu od postaci kanonicznej i przyrównajmy go do zera:

$$a(x - p)^2 - q = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0 \quad \text{/podstawiamy wzory na } p \text{ i } q$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a} \quad \text{/dzielimy przez } a$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Przypatrzmy się powyższemu równaniu: z prawej strony mamy liczbę nieujemną (kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej nie może być ujemny), podobnie rzecz ma się z mianownikiem ułamka po prawej stronie równości – ten zawsze będzie dodatni (mianownik nie może być zerem). Czy powyższe równanie będzie miało rozwiązanie? Zależy to od wyróżnika Δ .

Jeżeli $\Delta < 0$,

to mamy sprzeczność – po prawej stronie równania mamy wartość ujemną, a po lewej dodatnią. Równanie to nigdy nie będzie miało rozwiązania (a więc nie będzie miejsc zerowych).

Jeżeli $\Delta = 0$,

to równanie sprowadza się do $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, czyli $x + \frac{b}{2a} = 0$ i wreszcie $x = -\frac{b}{2a}$. Mamy jedno miejsce zerowe w punkcie $\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$

Jeżeli $\Delta > 0$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

/pierwiastkujemy obustronnie

$$x_1 + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a},$$

lub

$$x_1 + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a},$$

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a},$$

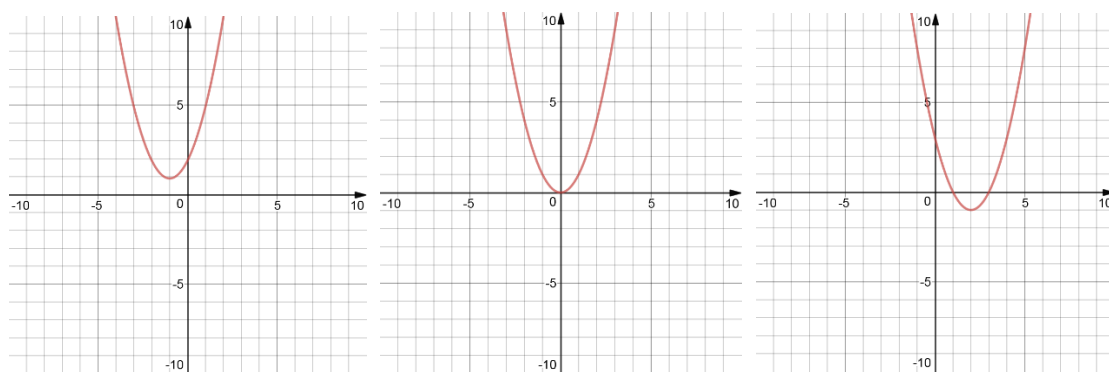
$$x_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a},$$

$$x_1 = -\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},$$

$$x_2 = -\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Zatem będą dwa miejsca zerowe $\left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right)$ oraz $\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right)$.

Podsumowując równanie kwadratowe ma - w zależności od wyróżnika Δ - zero ($\Delta < 0$), jedno ($\Delta = 0$), lub dwa rozwiązania ($\Delta > 0$).



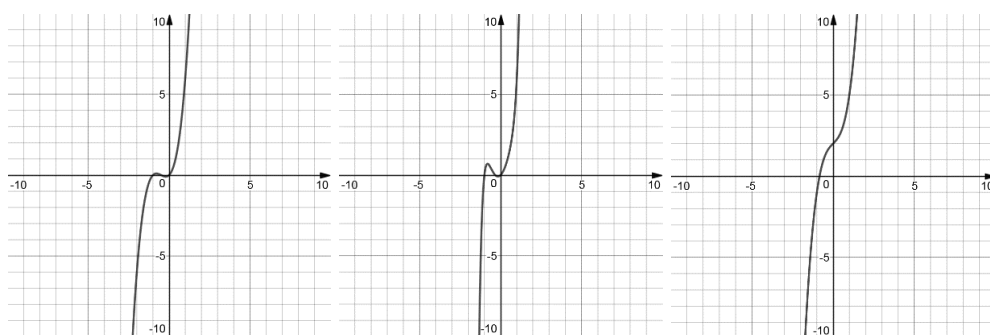
rys. 30

I jeszcze jedna uwaga dotycząca zależności pomiędzy parametrem p w postaci kanoniczej (czyli współrzędnej x wierzchołka), a miejscami zerowymi funkcji x_1 i x_2 . Rysując różne parabole wykorzystywane w niniejszej pracy zauważyłem, że wierzchołek leży zawsze pośrodku miejsc zerowych. Zatem możemy obliczyć parametr p , jako średnia arytmetyczna miejsc zerowych $p = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Na tym kończę opis funkcji kwadratowej. Jest on dosyć obszerny, ale chciałem pokazać, że wzory opisujące własności funkcji kwadratowej, mimo, że wyglądają na dość skomplikowane, można je wyprowadzić posługując się wykresem funkcji i intuicją.

c) Funkcja wielomianowa $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

To uogólnienie funkcji kwadratowej do dowolnego wielomianu $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Wykresy tak określonej funkcji bywają różne (zazwyczaj w zależności od najwyższej potęgi).

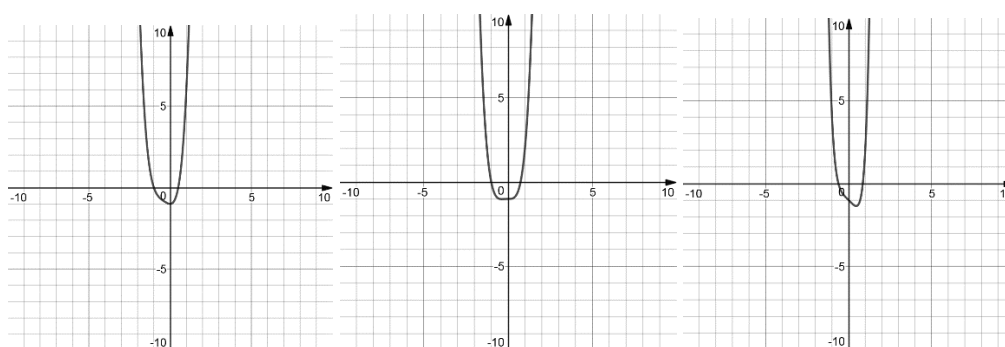


$$2x^3 + 3x^2 + x$$

$$2x^7 + 3x^2 + x$$

$$2x^3 + x + 2$$

rys. 31



$$2x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 1$$

$$2x^4 + x^3 - 1$$

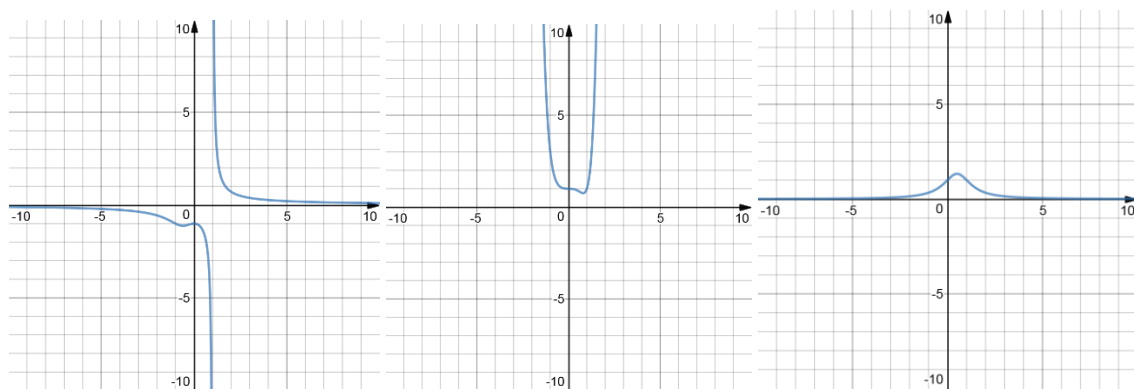
$$2x^6 + 2x^4 - x - 1$$

rys. 32

W takim zakresie bardzo trudno określać właściwości funkcji. Można na przykład określić dziedzinę, będzie to zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, zbiór wartości to także $\mathbb{R}$ (przy najwyższej potęgce, która jest parzysta niecałe $\mathbb{R}$ (popatrzmy na przykład funkcji kwadratowej)). Wielomiany można próbować rozkładać na postać iloczynową: $x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x - 2)(x + 2)(x + 1)$, ale nie jest to tematem tej pracy, więc tutaj dodam tylko, że jak widać na powyższych wykresach, jeżeli najwyższa potęga wielomianu jest parzysta to wykres przypomina parabolę, a w przypadku potęgi nieparzystej w mniejszy lub większy sposób przypomina wykres funkcji $f(x) = x^3$.

d) Funkcja wymierna $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$

Funkcja wymierna to taka, która jest ilorazem dwóch wielomianów. Wykresy takiej funkcji są naprawdę bardzo różne.



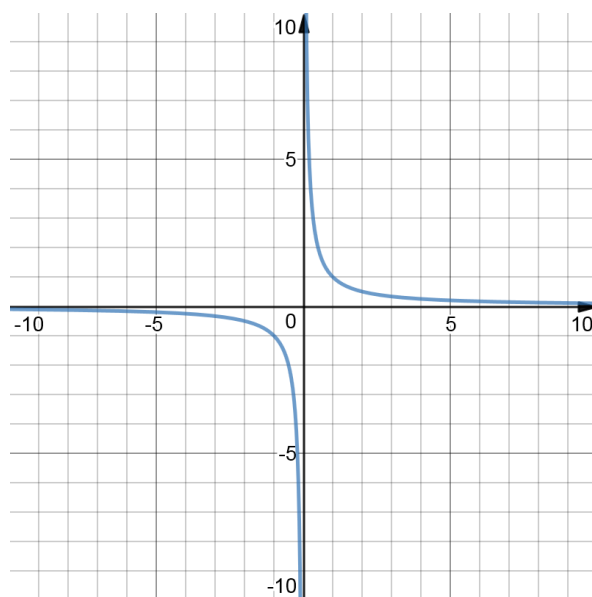
$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-1}$$

$$f(x) = \frac{x^9+1}{x^3+1}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^3+1}$$

rys. 33

Trudno w tak szerokim spektrum omawiać własności takiej funkcji. Można jedynie powiedzieć, że dziedziną takiej funkcji to $\mathbb{R}$ z wyłączeniem takich x , dla których wyrażenie w mianowniku równa się zero. Omówmy tutaj szczególny rodzaj funkcji wymiernej jaką jest funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$. Wykres takiej funkcji to:



rys. 34

Wykres takiej funkcji nazywamy hiperbolą. Określmy teraz własności takiej funkcji. Dziedzina to $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (x nie może przyjmować wartości 0, gdyż stoi samo w mianowniku). Zbiór wartości to także $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Jak widać na wykresie funkcja nie posiada miejsc zerowych. Jest również różnowartościowa i malejąca w całej dziedzinie oraz nieparzysta. Nie osiąga także ekstremów. Wszystko to widać od razu z wykresu. A czy możemy to również jakoś udowodnić analitycznie?

Zobaczmy:

Zacznijmy od nieparzystości funkcji:

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x).$$

Przy monotoniczności sprawa jest jeszcze prostsza. Funkcja jest malejąca, więc $f(x+1) < f(x)$, czyli $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x}$ - jeżeli w ułamku zwiększamy mianownik, to cały ułamek maleje.

Miejsca zerowe? Jeżeli funkcja miałaby mieć miejsca zerowe, to $f(x) = 0$, czyli $\frac{1}{x} = 0$ takie równanie jest sprzeczne – nie ma rozwiązań (np. mnożymy obie strony równań przez x i wychodzi nam $1=0$), więc funkcja nie ma miejsc zerowych. Wszystkie te własności funkcji można udowodnić analitycznie (przy niektórych funkcjach jest to oczywiście bardziej skomplikowane), ale wiele własności widać wprost z wykresu.

e) Funkcja potęgowa $f(x) = x^p$

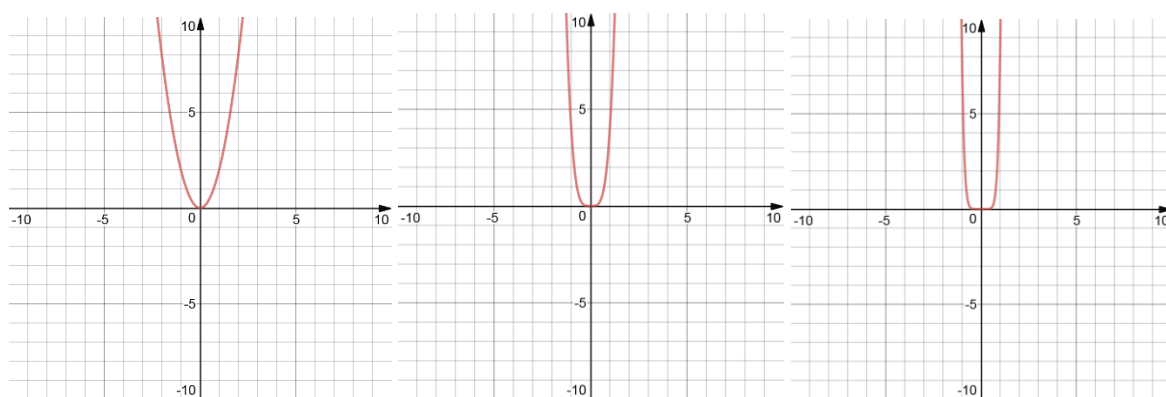
Funkcja potęgowa to zarówno uogólnienie, jak i zawężenie wyżej omówionych. Uogólnienie, gdyż nie mamy określonej dokładnie potęgi funkcji, a zawężenie, ponieważ nie występują elementy o niższych potęgach. Z funkcji liniowej pozostaje nam tylko $f(x) = x$, z kwadratowej $f(x) = x^2$, a z sześcienniej $f(x) = x^3$.

Jakie będą własności takiej funkcji. Na pewno będą zależały od parametru p .

Przy parametrze p zerowym, czyli $p=0$, funkcja potęgowa staje się funkcją stałą $f(x) = 1$, w której nie ma nic ciekawego.

p parzyste (dodatnie)

Wiemy już, że jeżeli $p = 2$ wykresem będzie parabola $f(x) = x^2$. Okazuje się, że dla wszystkich p parzystych (dodatnich) wykresem funkcji potęgowej będzie parabola.



$p = 2$

$p = 4$

$p = 8$

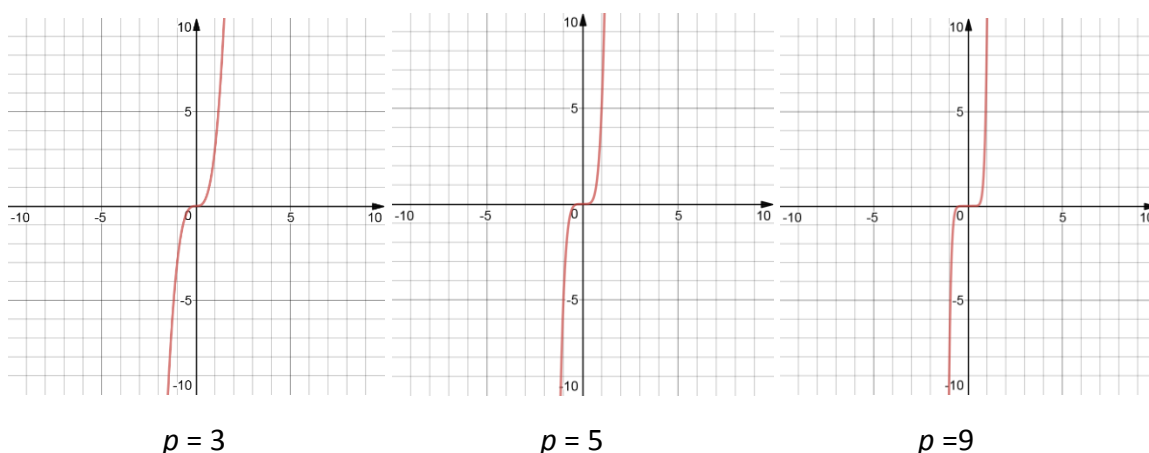
rys. 35

Widzimy, że przy rosnącym p wykres w granicach $(-1,1)$ jest bardziej „płaski”, a potem szybciej rośnie. Jest to naturalne i wynika z tego, że liczby mniejsze od jeden podnoszone do coraz większej potęgi maleją, natomiast liczby większe od 1 podnoszone do coraz większej potęgi rosną ($(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$; $(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$; $(\frac{1}{2})^8 = \frac{1}{256}$; $2^2 = 4$; $2^4 = 16$; $2^8 = 256$). Wszystkie wykresy funkcji potęgowej o p parzystym przechodzą także przez punkty $(0,0)$ - wierzchołek oraz $(1,1)$ i $(-1, 1)$. Zero do dowolnej potęgi (oczywiście bez wykładnika zerowego) to zero, jeden do dowolnej potęgi to jeden, a minus jeden do dowolnej potęgi parzystej to także 1.

Dziedzina takiej funkcji to zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, jak widać z rysunków zbiorem wartości będzie $\mathbb{R}^+$ (z zerem). Miejsca zerowe? Znowu z rysunku (ale też z definicji) widzimy, że będzie jedno w punkcie $(0,0)$. Funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty, 0)$, a rosnąca w przedziale $(0, \infty)$. Również z wykresu od razu widać, że nie jest to funkcja różnowartościowa. Ekstrema? Ma jedno minimum globalne – wierzchołek paraboli. Przy p parzystym dodatnim funkcja potęgowa jest parzysta.

p nieparzyste (dodatnie)

A co się stanie z wykresem (i funkcją), gdy p będzie nieparzyste? Przy $p = 1$ funkcja potęgowa stanie się liniową $f(x) = x$ opisywaną już wcześniej, a co będzie przy wyższych nieparzystych p ?



rys. 36

Widzimy, że nie jest to już parabola (choć przez niektórych jest nazywana *parabolą sześcienną*). Jest to oczywiste, jeżeli zauważymy, że przy p parzystym argumentom o przeciwnym znaku odpowiadają takie same wartości, jednak przy p nieparzystym już tak nie jest – argumentom o przeciwnych znakach odpowiadają wartości także o przeciwnych znakach. Przekładając to na *język wykresu* znaczy to mniej więcej tyle, że „lewa strona” wykresu (dla $x < 0$) jest jakby odbita względem osi X). Podobnie, jak przy p parzystym w przedziale $(-1,1)$ wykres staje się bardziej płaski przy rosnącym parametrze p . Wyjaśnienie jest identyczne jak poprzednio. Wszystkie wykresy przechodzą przez punkty $(0,0)$, $(1,1)$ oraz $(-1,-1)$. Zero do dowolnej potęgi (oczywiście bez wykładnika zerowego) to zero, jeden do dowolnej potęgi to jeden, natomiast minus jeden do dowolnej potęgi nieparzystej to minus jeden.

Dziedzina takiej funkcji to zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, jak widać z rysunków zbiorem wartości będzie także $\mathbb{R}$. Miejsca zerowe? Podobnie jak przy p parzystym z rysunku (ale też z definicji) widzimy, że będzie jedno w punkcie $(0,0)$. Funkcja jest rosnąca w całej dziedzinie. Również z wykresu od razu widać, że jest to funkcja różnowartościowa. Ekstrema? Brak. Przy p nieparzystym dodatnim funkcja potęgowa jest nieparzysta.

Czy to już wszystkie możliwości dla funkcji potęgowej? NIE! Możemy jeszcze rozważyć, co będzie się działo, jeżeli parametr p będzie ujemny. Na początek przypomnijmy sobie, co to

znaczy podnosić jakąś liczbę do potęgi mniejszej od zera. Otóż ujemny wykładnik „odwraca” nam liczbę potęgowaną:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}.$$

A gdy liczba potęgowana jest ułamkiem właściwym, po prostu „odwracamy” ułamek

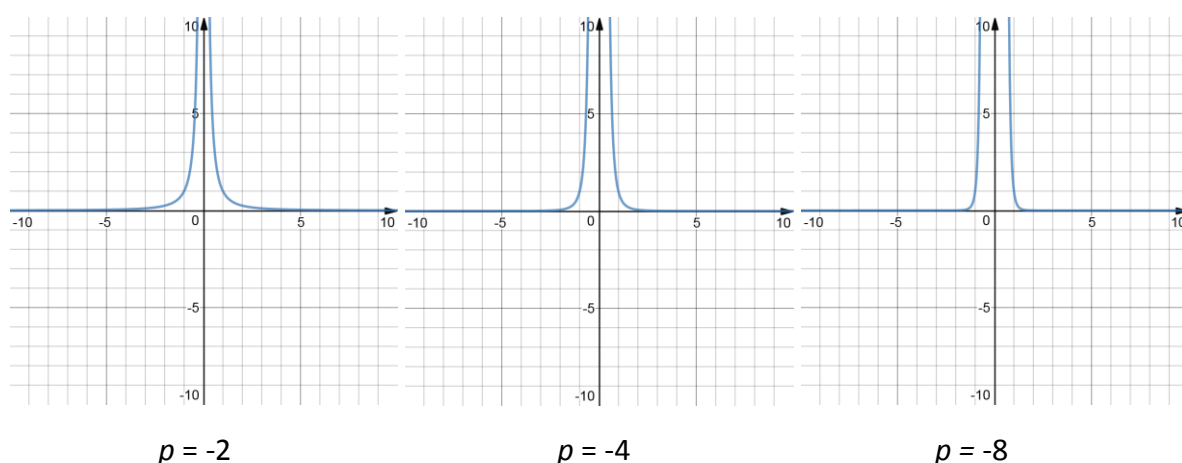
$$\left(\frac{p}{q}\right)^{-n} = \left(\frac{q}{p}\right)^n.$$

Zobaczmy zatem, jak będzie wyglądać funkcja potęgowa przy parametrze p ujemnym. Podobnie, jak w przypadku p dodatnim, podzielimy opis na p parzyste ujemne oraz p nieparzyste ujemne.

p parzyste (ujemne)

Przy takim parametrze p funkcja przyjmuje potęgowa postać $f(x) = x^p = \frac{1}{x^q}$ (gdzie $q = -p$).

Wykresy takiej funkcji przedstawiają się następująco:



rys. 37

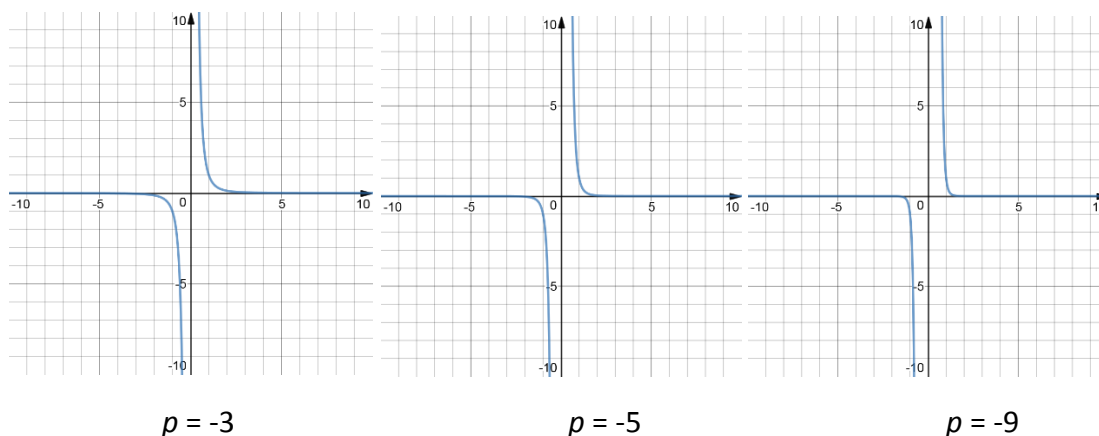
Widzimy, że przy malejącym p wykres wolniej „zbiega” się do osi Y (pomiędzy -1 a 1 na osi X). Jest to naturalne i wynika z tego, że przy argumentach x z zakresu $(-1, 1)$ – bez zera – wartości funkcji szybciej rosną przy wzroście parametru p (np. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 2^4 = 16$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-8} = 2^8 = 256$). I odwrotnie poza przedziałem $(-1,1)$ przy rosnącym p wykres szybciej „zbiega” się do osi X ($2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, $2^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$, $2^{-8} = \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256}$). Wszystkie wykresy przechodzą przez punkty $(-1,1)$ oraz $(1,1)$ z podobnych względów, jak to miało miejsce przy p parzystym dodatnim (1 do dowolnej potęgi to jeden, a minus jeden do dowolnej potęgi parzystej jest równe także jeden). Dziedziną takiej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych bez zera ($\mathbb{R} \setminus \{0\}$) – x nie może przyjmować wartości zero, gdyż po przekształceniach znajduje się w mianowniku. Zbiór wartości funkcji to zbiór liczb rzeczywistych dodatnich ($\mathbb{R}^+$). Miejsc zerowych taka funkcja nie posiada. Ekstremów również. Funkcja potęgowa dla parametru p parzystego ujemnego jest rosnąca dla x z przedziału $(-\infty, 0)$, a malejąca w przedziale $(0, \infty)$. Nie jest to funkcja różnowartościowa, ale za to jest

parzysta. Zauważmy, że wszystkie te własności otrzymaliśmy tylko i wyłącznie z wykresu. Jeszcze raz powtórzę: wykres funkcji jest niezwykle pożyteczną rzeczą.

p nieparzyste (ujemne)

Podobnie jak przy p ujemnym nieparzystym funkcja przyjmuje potęgową postać $f(x) = x^p = \frac{1}{x^q}$ (gdzie $q = -p$). Przy $p = -1$ funkcja przyjmuje postać $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$, czyli znanej nam z poprzedniego przykładu funkcji wymiernej.

Wykresy takiej funkcji przedstawiają się następująco:



rys. 38

Widać, że przy malejącym p wykres wolniej zbiega się do osi Y w przedziale $(-1, 1) \setminus \{0\}$, natomiast poza tym przedziałem szybciej zbiega się do osi X. Wyjaśnienie jest identyczne jak w poprzednich przykładach. Dziedziną takiej funkcji jest $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, a zbiorem wartości $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Funkcja jest różnowartościowa i nieparzysta. Jest także malejąca w całej dziedzinie. Miejsc zerowych brak. Nie ma także ekstremów.

Czy to wyczerpuje wszystkie możliwości funkcji potęgowej? Zauważmy, że do tej pory parametr p przyjmował tylko wartości całkowite. Nie rozpatrywaliśmy zupełnie podnoszenia do potęgi wymiernej czyli funkcji w postaci: $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$. Dodałoby to do niniejszej pracy dobrych kilkanaście stron, więc może poprzestaniemy na wykładnikach całkowitych ☺.

f) Funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$

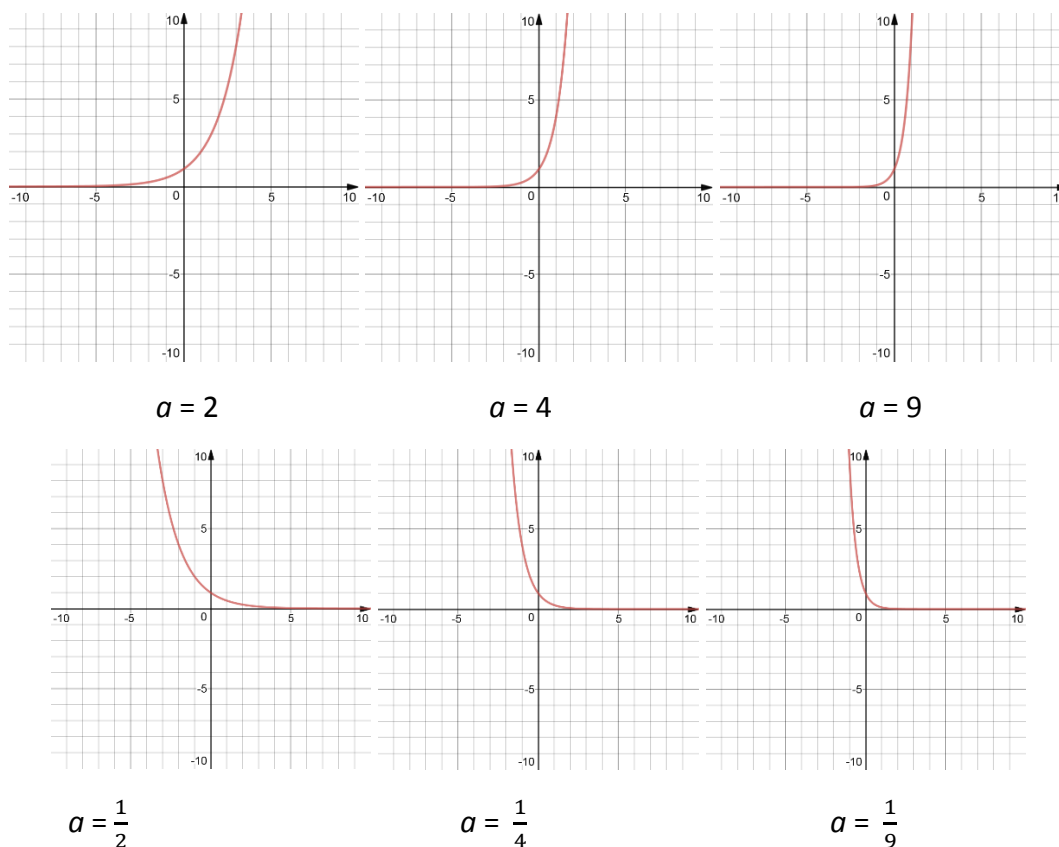
W poprzednim podrozdziale dotyczącym funkcji potęgowej przypominałem działania na potęgach ujemnych. A jak jest w przypadku potęg wymiernych (tj. takich które da się przedstawić w postaci ułamka $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są całkowite). Poniższe wzory wskazują co to znaczy podnieść liczbę do potęgi ułamkowej:

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a} \quad \text{oraz uogólnienie} \quad a^{\left(\frac{p}{q}\right)} = \sqrt[q]{a^p}$$

Uzbrojeni w taką wiedzę przyjrzyjmy się najpierw definicji funkcji $f(x) = a^x$. Dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Jeżeli x jest rzeczywiste to także może być wymierne, a więc może być ułamkiem. Weźmy na przykład $x = \frac{1}{2}$. Jaki w takim razie może być parametr a ?

$f(x) = a^x = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$. Wynika z tego, że a musi być większe bądź równe zero (poruszamy się w zakresie liczb $\mathbb{R}$). Czy a może być zerem? Weźmy teraz $x = 0$. 0^0 – to symbol nieoznaczony. Zatem a musi być silnie większa od zera ($a > 0$). Czy możemy jeszcze jakoś zawęzić parametr a ? Możemy wykluczyć jeszcze jedynkę, gdyż jeden do dowolnej potęgi to jeden i wtedy mamy funkcję stałą. Zatem całkowita definicja funkcji wykładniczej to $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$. Czy coś możemy jeszcze wywnioskować z samej definicji? Zauważmy, że mnożąc przez siebie (a więc potęgując) liczby większe od jeden otrzymujemy iloczyn, który jest większy od składników, natomiast mnożąc przez siebie liczby mniejsze od jeden, iloczyn będzie mniejszy ($2^2 = 4$; $3^3 = 27$; $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$; $(\frac{1}{3})^3 = \frac{1}{27}$). Zatem funkcje będą miały różny przebieg w zależności od parametru a , który może przyjmować wartości z dwóch przedziałów: $(0,1)$ oraz $(1, \infty)$.

Przyjrzyjmy się teraz wykresom:

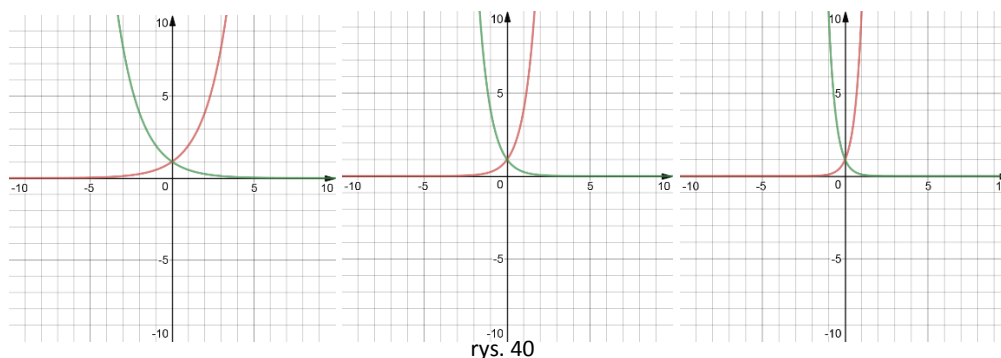


rys. 39

Dziedzinę już określiliśmy ($\mathbb{R}$). A jaki jest zbiór wartości? Z wykresu widzimy, że jest to $\mathbb{R}^+$, ale także widać to też z samej definicji: a^x , gdzie $a > 0$ zawsze będzie dodatnie. Wykresy funkcji (jakie by nie było a) przecinają oś Y w punkcie $(0,1)$, gdyż $a^0 = 1$. Co jeszcze wynika z wykresów? Ta funkcja nie ma miejsc zerowych (a większe od zera podniesione do jakiegokolwiek potęgi zawsze będzie większe od zera). A monotoniczność? Tu wszystko zależy od parametru a . Gdy $a \in (0, 1)$ funkcja jest malejąca (już pisałem wyżej, że mnożąc ułamki właściwe przez siebie otrzymujemy w wyniku liczbę mniejszą od początkowego ułamka), natomiast dla $a \in (1, \infty)$ funkcja jest rosnąca. Jest to funkcja różnowartościowa. Jak widać

z wykresów funkcja nie posiada ekstremów. Nie jest to ani funkcja parzysta, ani nieparzysta. Czy coś możemy powiedzieć jeszcze na temat funkcji wykładniczej? Otóż tak. Zupełnie przez przypadek, w aplikacji DESMOS nałożyłem na siebie dwie funkcje:

$f(x) = 2^x$ oraz $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Po dokładnym przyjrzeniu się obu wykresom zobaczyłem, że jeden do drugiego jest symetryczny względem osi Y. Sprawdziłem dla innych wartości a i wyszło to samo:



Ogólnie można powiedzieć, że wykres funkcji $f(x) = a^x$ oraz $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ są do siebie symetryczne względem osi Y. Dlaczego tak się dzieje? Zauważmy, że $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x} = f(-x)$.

g) Funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x$

Na początek przypomnijmy, co nazywamy logarytmem. Logarytmem liczby dodatniej b przy podstawie a , gdzie $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ nazywamy wykładnik potęgi c , do której należy podnieść a , aby otrzymać b i oznaczamy to w następujący sposób: $\log_a b = c$. Więcej od opisu zobaczymy w postaci analitycznej:

$\log_a b = c$ oznacza, że $a^c = b$ dla $a > 0$ i $a \neq 1$ i $b > 0$, gdzie a jest nazywana podstawą logarytmu, b jest liczbą logarytmowaną, a c jest wartością logarytmu.

Własności logarytmu: $\log_a 1 = 0$ (bo $a^0 = 1$); $\log_a a = 1$ (bo $a^1 = a$)

Najczęściej stosowane są logarytmy o podstawach 2, e (stała Eulera $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$) oraz

10. Oznaczamy je następująco:

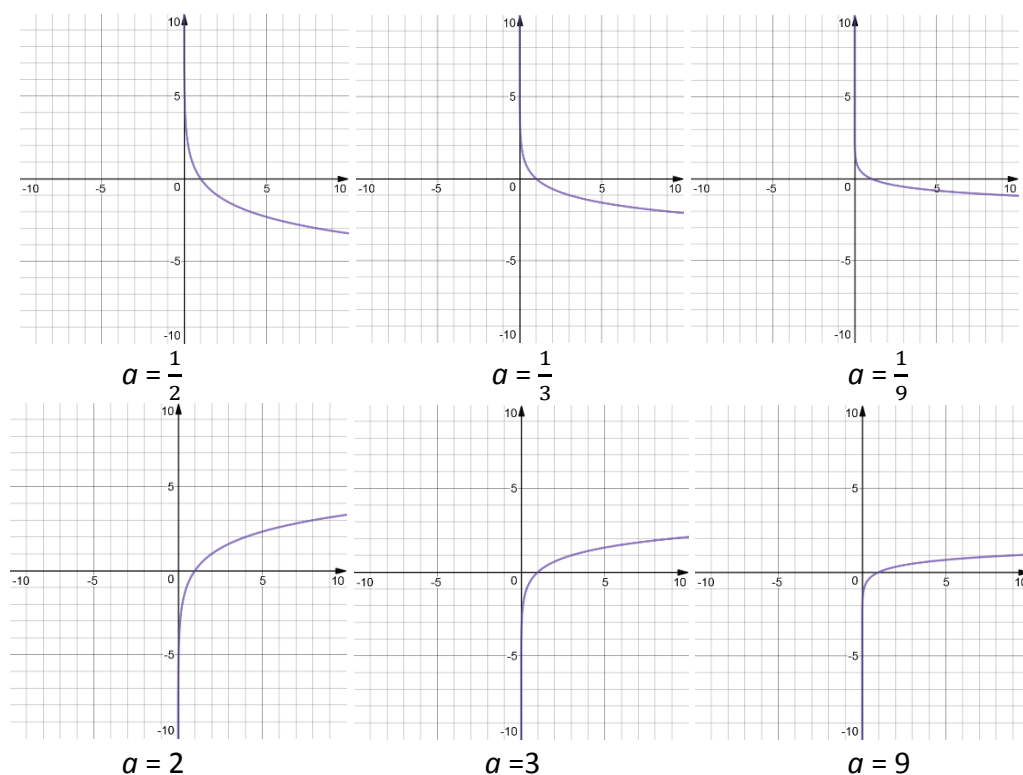
$\log_2 a = \text{lb } a$ (stosowany w informatyce);

$\log_e a = \ln a$ (naturalny);

$\log_{10} a = \lg a$ (dziesiętny).

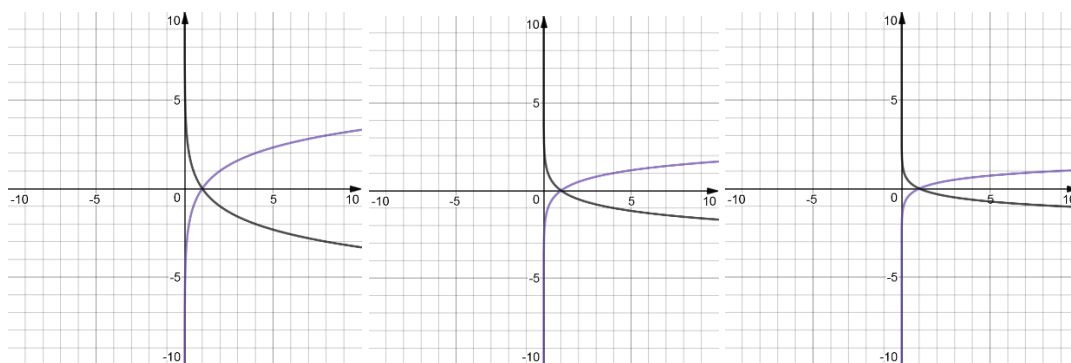
Patrząc na definicję logarytmu można w pewnym sensie powiedzieć, że jest to odwrotność potęgowania (liczba logarytmowana b to wynik podnoszenia do potęgi c -tej liczby a). Właściwości funkcji logarytmicznej są bardzo podobne do funkcji wykładniczej. Identycznie, jak tam parametr a musi być większy od zera oraz różny od 1 ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$). Jaka będzie dziedzina? Popatrzmy $f(x) = \log_a x$ oznacza to, że $x = a^{f(x)}$ (nie jest to zbyt poprawny zapis, ale do niniejszego rozważania wystarczy), czyli x jest wynikiem potęgowania liczby dodatniej, a z tego wynika, że samo x także będzie dodatnie (poruszamy się tylko i wyłącznie po zbiorze $\mathbb{R}^+$). Tak więc dziedziną funkcji logarytmicznej jest $\mathbb{R}^+$. Skoro logarytmy są podobne

do potęgowania, to pewnie także wykresy będą zależały (jak w funkcji wykładniczej) od parametru a . Zobaczmy:



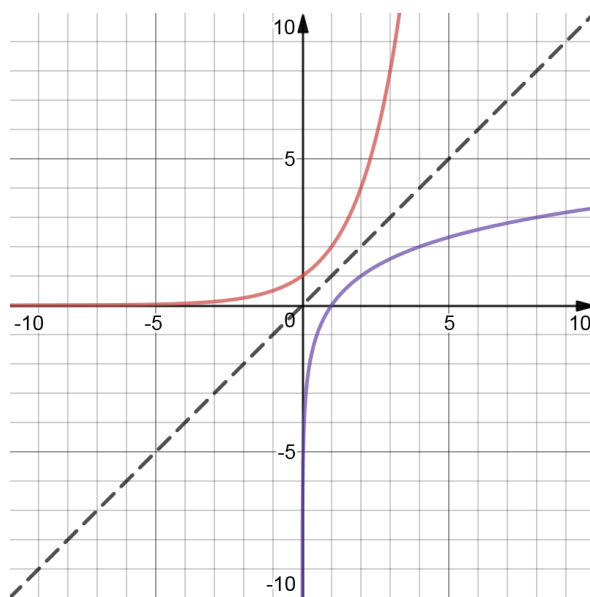
rys. 41

Znamy dziedzinę, a jak wynika z powyższych wykresów zbiorem wartości jest cały zbiór $\mathbb{R}$. Z funkcji wykładniczej pamiętamy, że jej wykres przecina oś Y w pkt $(0,1)$ tutaj zaś wykres przecina oś X w pkt $(1,0)$ (gdyż $\log_x 1 = 0$). A zatem funkcja ma jedno miejsce zerowe i zawsze będzie to punkt $(1,0)$. Z wykresu możemy także wywnioskować, że funkcja nie jest ani parzysta, ani nieparzysta. Co do monotoniczności to dla $a \in (1, \infty)$ jest rosnąca, a dla $a \in (0,1)$ malejąca. Teraz już z pełną premedytacją sprawdziłem zależność pomiędzy funkcjami $\log_a x$ oraz $\log_{\frac{1}{a}} x$ i odkryłem podobną (ale nie taką samą zależność), jak w funkcjach wykładniczych.



rys. 42

Wpadłem także na pomysł porównania wykresów funkcji logarytmicznej i wykładniczej o takim samym parametrze a . Wyszła bardzo ciekawa rzecz. Popatrzmy na wykres poniżej:



2^x oraz $\log_2 x$

rys. 43

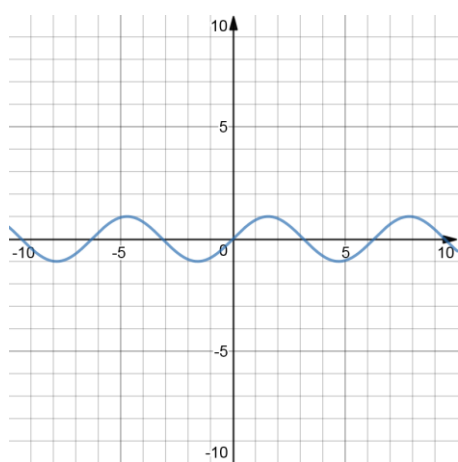
Wykresy obu funkcji są symetryczne wobec siebie względem linii wyznaczonej przez funkcję $y=x$. Takie funkcje zwane są funkcjami odwrotnymi.

h) Funkcje trygonometryczne $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$, $f(x) = \operatorname{tg}(x)$, $f(x) = \operatorname{ctg}(x)$

Sinusem kąta alfa w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej naprzeciw kąta do przeciwprostokątnej, cosinusem zaś stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta do przeciwprostokątnej. Tangens zaś to stosunek przyprostokątnej przeciwległej do kąta do drugiej przyprostokątnej, cotangens to stosunek odwrotny.

Tyle definicje, nas interesować będą bardziej wykresy tych funkcji oraz, co możemy wyczytać ich właściwościach.

Weźmy na początek funkcję sinus:



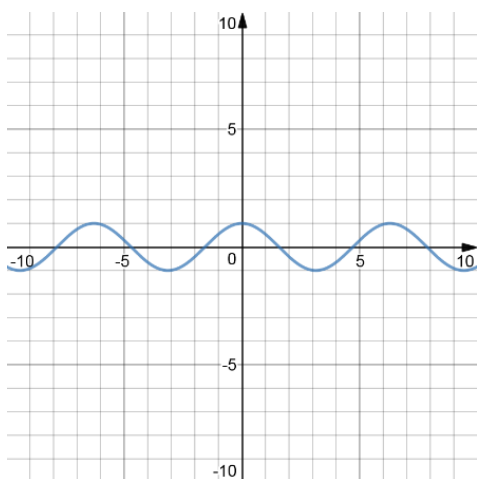
rys. 44

$$f(x) = \sin(x)$$

Widzimy, że dziedziną funkcji jest cały zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, zaś zbiorem wartości jest przedział $[-1, 1]$. Miejsc zerowych jest całe mnóstwo (a właściwie nieskończenie wiele). To samo tyczy się ekstremów. Funkcja sinus (jak wszystkie inne funkcje trygonometryczne) ma właściwość, o której jeszcze nie pisałem. Otóż jest to funkcja okresowa. Co to oznacza? Jej wykres co jakiś ściśle określony czas (okres) się powtarza. A w zapisie analitycznym wygląda to tak: $f(x) = f(x+T)$. Okresem funkcji sinus jest 2π (w radianach), bądź 360° (w stopniach).

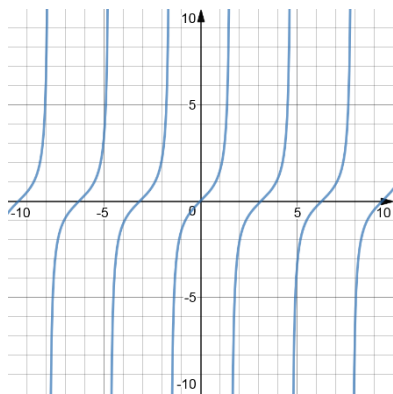
$\sin(\pi) = 0$ oraz $\sin(k\pi) = 0$, dla każdego k całkowitego. Tak więc miejsca zerowe funkcji sinus to $x_0 = -k\pi$. $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ oraz $\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1$; $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ oraz $\sin(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1$, dla każdego k całkowitego. Tak więc maksima lokalne funkcji sinus to $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, a minima lokalne $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Funkcja sinus jest monotoniczna okresami tzn. jest rosnąca w przedziałach $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, a malejąca $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$. Jak wynika z rysunku jest to funkcja nieparzysta i oczywiście nie może być różnowartościowa (z samej definicji okresowości).

$$f(x) = \cos(x)$$



rys. 45

Podobnie jak w poprzedniej funkcji dziedziną jest cały zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, zaś zbiorem wartości jest przedział $[-1, 1]$. Ekstrema? Tak jak w funkcji sinus, tylko przesunięte o $\frac{\pi}{2}$, to samo z miejscami zerowymi. Cosinus jest również funkcją okresową, o okresie 2π (360°). Jeżeli nałożymy oba wykresy na siebie to zobaczymy, że są one względem siebie przesunięte o dokładnie $\frac{\pi}{2}$. Stąd wszystkie następne własności bezpośrednio wynikają. Miejsca zerowe to $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Minima lokalne $\pi + 2k\pi$, maksima $2k\pi$. Funkcja jest malejąca w przedziałach: $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$ a rosnąca w przedziałach: $(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$. Oczywiście nie jest różnowartościowa.

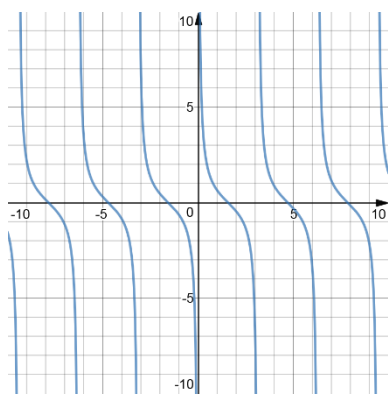


rys. 46

$$f(x) = tg(x)$$

Jak widać z wykresu jest to również funkcja okresowa o okresie π . Dziedzina to zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, zbiór wartości to $\mathbb{R}$. Miejsca zerowe $x_0 = k\pi$. Ekstremów brak. W całej dziedzinie jest rosnąca. Jako funkcja okresowa nie jest różnowartościowa. Jest nieparzysta.

$$f(x) = ctg(x)$$



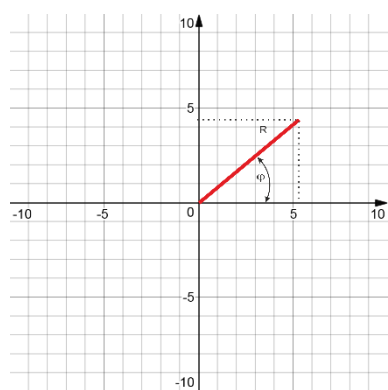
rys. 47

Jest to funkcja odwrotna do funkcji tangens. Dziedzina to zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$, zbiór wartości to $\mathbb{R}$. Miejsca zerowe $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Ekstremów brak. W całej dziedzinie jest malejąca. Nie jest różnowartościowa, i podobnie jak poprzedniczka jest nieparzysta.

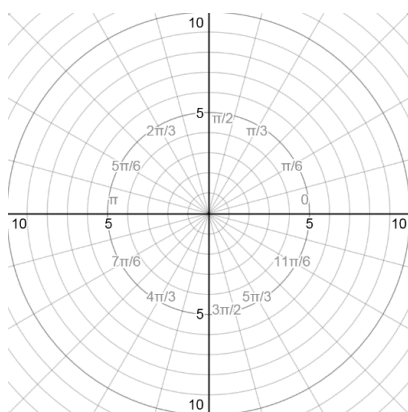
Układ biegunowy

Przy przeglądaniu materiałów, gdy przygotowywałem się do pracy, natknąłem się na określenie polarnego układu współrzędnych, inaczej zwanym układem biegunowym. Zanotowałem sobie, żeby później sprawdzić, co to jest. A gdy odkryłem, że w moim kochanym Desmosie można układ kartezjański zamienić właśnie na biegunowy – wtedy „zaczęła się jazda”.

Zacznijmy od początku. Co to jest właściwie układ polarny? Otóż w najbardziej znanym układzie współrzędnych – kartezjańskim – na płaszczyźnie kreślimy dwie proste prostopadłe. Następnie skalujemy je (prościej – dzielimy je na równe odcinki stanowiące jednostki). I teraz, aby określić współrzędne punktu na płaszczyźnie wystarczy pociągnąć przez dany punkt dwie proste równoległe do osi (jedna do osi X, druga do osi Y). Punkty przecięcia się tych prostych z osiami oznaczamy jako współrzędne punktu w przestrzeni. Czy jest to jedyny sposób na jednoznaczne wskazanie współrzędnych na płaszczyźnie? Okazuje się, że nie.



rys. 48



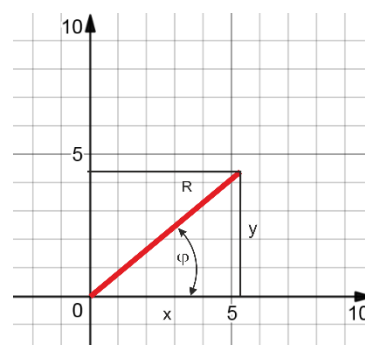
rys. 49

Zauważmy, że zamiast wskazywać punkt poprzez jego współrzędne (x, y) możemy go określić poprzez odległość od początku układu współrzędnych (promień wodzący R) oraz kąt jaki odcinek (wektor) łączący punkt z początkiem układu współrzędnych (kąt φ). I tak zamiast pary liczb (x, y) do określenia położenia mamy parę: kąt i liczbę (φ, R) . Początek układu współrzędnych nazywany jest biegunem. Zazwyczaj zamiast rysować „kratki”, jak na rysunku obok (i wszystkich innych dotyczących kartezjańskiego układu współrzędnych) na wykresach w układzie biegunowym rysujemy okręgi, jak na rysunku powyżej.

Teraz już widać, dlaczego układ ten nazywany jest układem biegunowym. Wystarczy popatrzeć z góry na globus, aby zobaczyć podobieństwo.

Jakie są zależności pomiędzy układem kartezjańskim, a biegunowym?

Popatrzmy na rysunek po prawej. Z zależności trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym widzimy, że $\sin(\varphi) = \frac{y}{R}$, a $\cos(\varphi) = \frac{x}{R}$ czyli $x = R \cos(\varphi)$, $y = R \sin(\varphi)$, a w drugą stronę: z twierdzenia Pitagorasa $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ oraz $\tan(\varphi) = \frac{y}{x}$



rys. 50

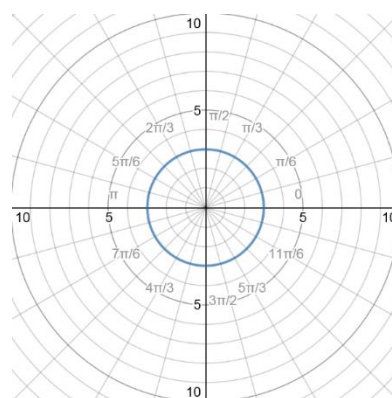
W trakcie moich zabaw z układem biegunowym w Desmosie zauważyłem, że zmiana dziedziny (wartości, jakie może przyjąć φ) ma wpływ na wykres funkcji. Desmos standardowo jako dziedzinę podaje przedział $(0, n\pi)$, gdzie n jest naturalne. Czasami jest to $(0, 2\pi)$, innym razem $(0, \pi)$. Jeżeli pozwolimy, aby φ przyjmowało wartości spoza zakresu $(0, 2\pi)$ układ biegunowy przestaje być jednoznaczny (gdyż współrzędne np. $(r, 2\pi)$ oraz $(r, 4\pi)$ wskazują dokładnie ten sam punkt. Do tego, aby można było przedstawiać wykresy funkcji, które mogą przyjmować ujemne argumenty należy przyjąć, że R może być ujemne. Dla ujemnych wartości R przyjmujemy, że punkt leży po przeciwnej stronie bieguna (czyli $(r, \varphi) = (-r, \varphi + \pi)$). Jeżeli natomiast przyjmujemy, że kąt φ jest kątem „skierowanym” to możemy także wykorzystywać ujemne wartości φ .

Poniżej przedstawię, jak wykresy funkcji elementarnych (omówionych wcześniej w tej pracy) wyglądają w układzie biegunowym. Jeżeli chodzi o właściwości funkcji i ich odzwierciedlenie w wykresach w układzie biegunowym, to sprawa jest już bardziej skomplikowana niż w układzie kartezjańskim. Pod koniec rozdziału spróbuję przedstawić właściwości parzystości/nieparzystości funkcji na wykresach w układzie polarnym. Jak czytać takie wykresy pokażę na przykładzie funkcji wymiernej $R = \frac{1}{\varphi}$. Zamieszczam także kilka „pięknych wykresów”, które znalazłem podczas moich „wędrowek po materiałach”, a także kilka do których sam dotarłem podczas zabaw z Desmosem.

Wszystkie wykresy są generowane dla φ z zakresu $(0, n\pi)$.

a) Funkcja stała $R = a$

Wykresem funkcji stałej w układzie biegunowym jest okrąg. Zauważmy, że okrąg w układzie kartezjańskim nie spełnia warunków funkcji natomiast w układzie biegunowym już tak. Nie zmieniliśmy definicji funkcji, tylko inaczej przedstawiamy jej wykres.

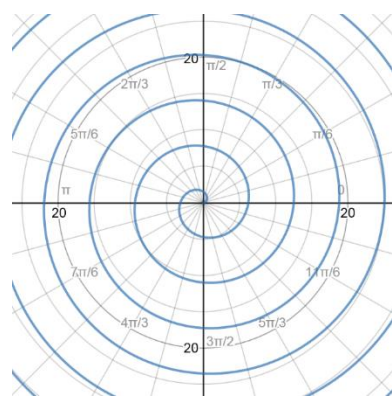


rys. 51

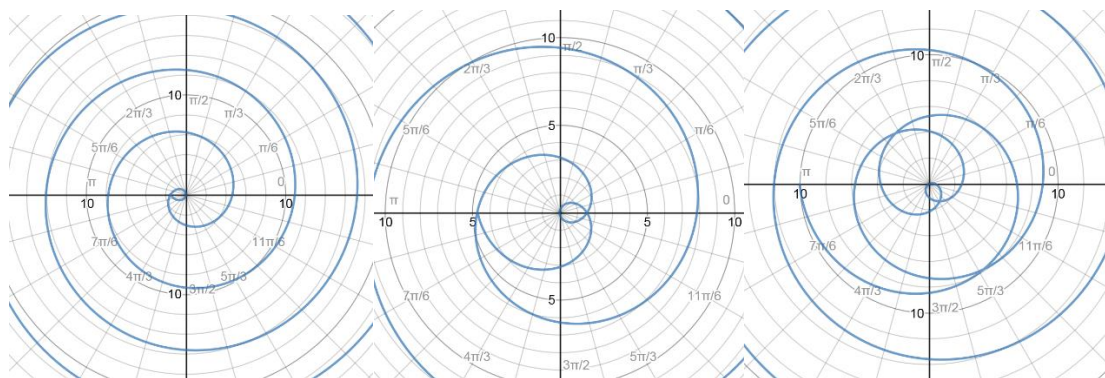
b) Funkcja liniowa $R = a\varphi + b$

Obok wykres funkcji $R = \varphi$ ($a=1, b=0$)

Wykresem tej funkcji jest krzywa zwana spiralą Archimedesesa. Zmienna a odpowiada za „gęstość” spirali. Jeżeli a jest zerem to mamy funkcję stałą $R = b$ i wykres jest okręgiem. Natomiast jeżeli od zera zwiększamy (zmniejszamy) a spirala staje się coraz rzadsza. Natomiast parametr b odpowiada za przesunięcie „środką spirali”. Poniżej przedstawiam kilka przykładowych wykresów.



rys. 52



$$R = \varphi - 1.6$$

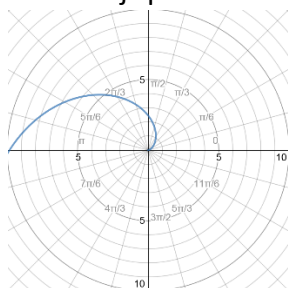
$$R = \varphi - 4.7$$

$$R = \varphi - 10$$

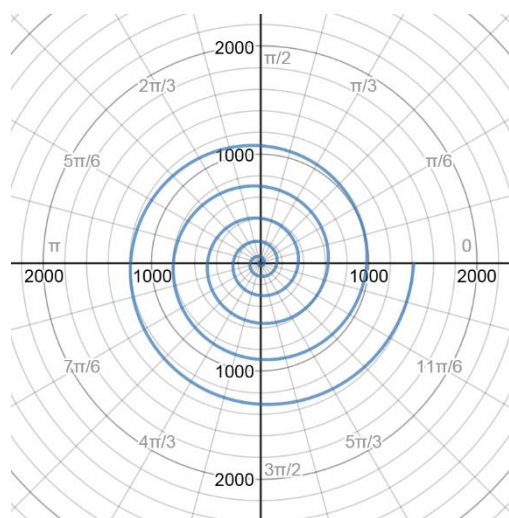
rys. 53

c) Funkcja kwadratowa $R = a\varphi^2 + b\varphi + c$

Obok wykres funkcji $R = a\varphi^2$. Aby zobaczyć w pełni ten wykres musimy bardzo drastycznie zwiększyć skalę. Przy skali użytej w poprzednich wykresach nie zobaczymy w pełni krzywej kreślonej przez funkcję, a tylko jej początek.



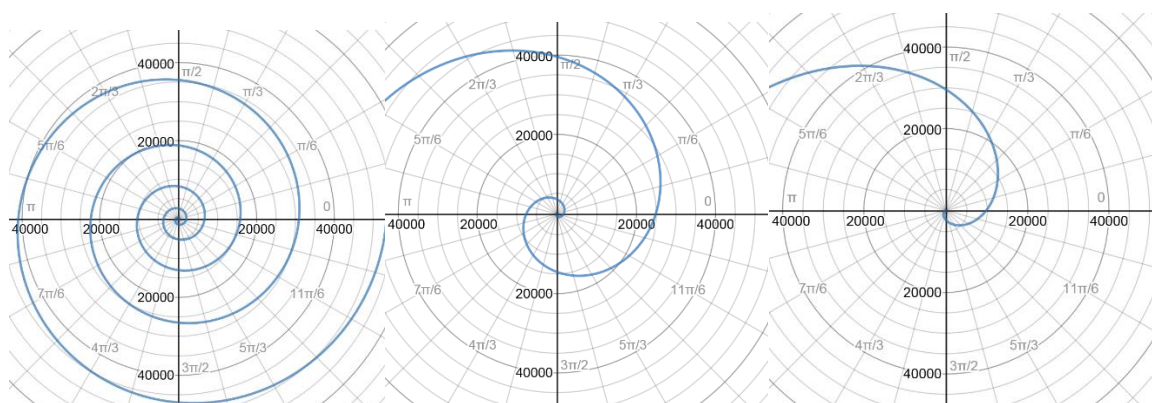
rys. 54



rys. 55

d) Funkcja wielomianowa $R = a_n\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \dots + a_1\varphi + a_0$

Zauważyłem, że przy układzie biegunowym nie ma tak zasadniczej różnicy w wykresach dla najwyższej potęgi parzystej i nieparzystej jak w układzie kartezjańskim. Czy to będzie wykres funkcji $R = \varphi^{2n}$ czy też $R = \varphi^{2n+1}$ dalej będzie to spirala (mniej lub bardziej „gęsta”)



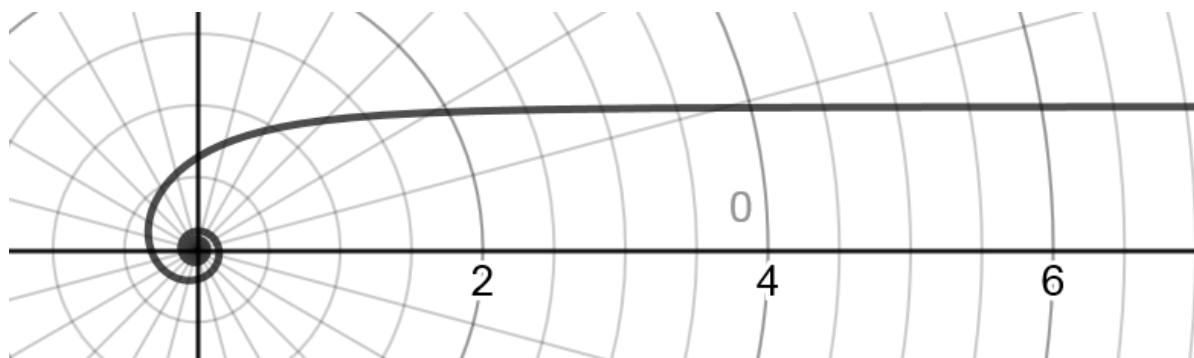
$$R = \varphi^3$$

$$R = \varphi^4$$

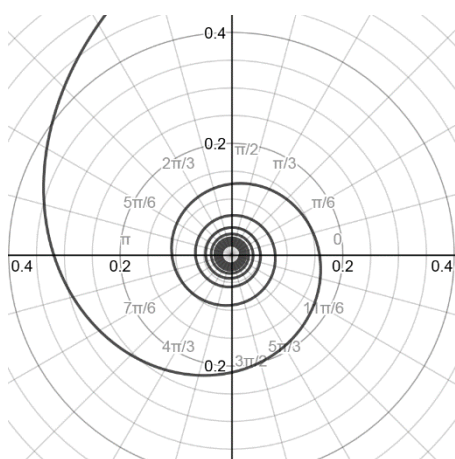
$$R = \varphi^5$$

rys. 56

e) Funkcja wymierna $R = \frac{1}{\varphi}$



rys. 57

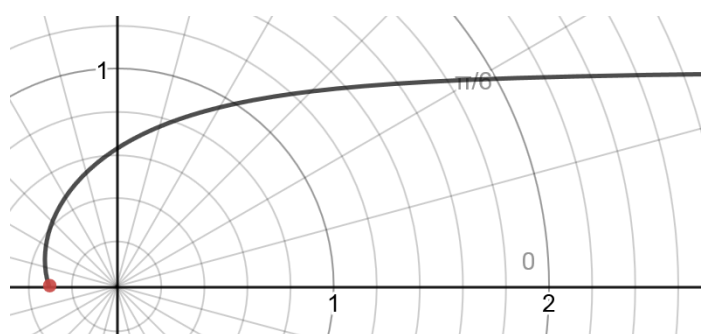


rys. 58

Wykres wydaje się trochę inny. Im bliżej środka tym bardziej rysunek przypomina wcześniejsze spirale. Natomiast gęsto upakowana w okolicach zera, natomiast tym im dalej wykres zaczyna przypominać prostą. Dlaczego tak się dzieje?

Przeanalizujmy to.

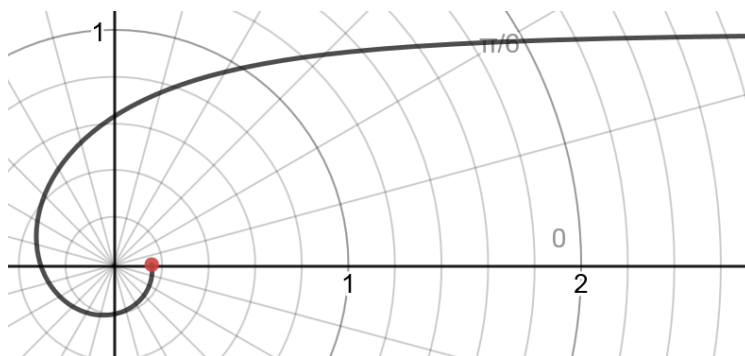
Jeżeli weźmiemy φ z zakresu $(0, \pi)$, to otrzymujemy wykres jak niżej:



rys. 59

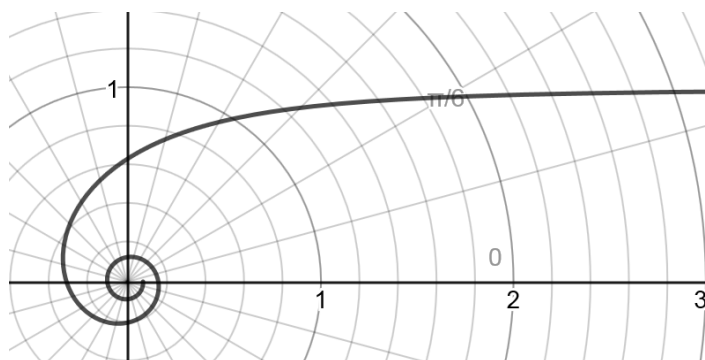
Nie możemy go czytać tak jak wykresu w układzie kartezjańskim (argumenty czytane od lewa do prawa). Tutaj argumentem jest kąt φ , a wskazują go linie, które można nazwać południkami, które „okrążają” początek układu współrzędnych. Jak w takim razie czytać powyższy rysunek? Otóż zaczynając od argumentu φ bliskiemu 0, otrzymujemy R dążące do nieskończoności. I jest to część wykresu, która ucieka nam w prawo. Natomiast drugi koniec zakresu (czyli π) oznaczony jest na rysunku kropką. Jest on na linii poziomej ($\pi = 180^\circ$)

w punkcie oddalonym (R) od środka o $\frac{1}{\pi}$. Wykres zajmuje dwie pierwsze „ćwiartki” układu, czyli od kąta 0 do π . Zatem w przypadku takiego zakresu wykres ten czytamy jakby od prawa do lewa. Powiększmy zakres φ do $(0, 2\pi)$ i zobaczymy jak zmieni się nam wykres.



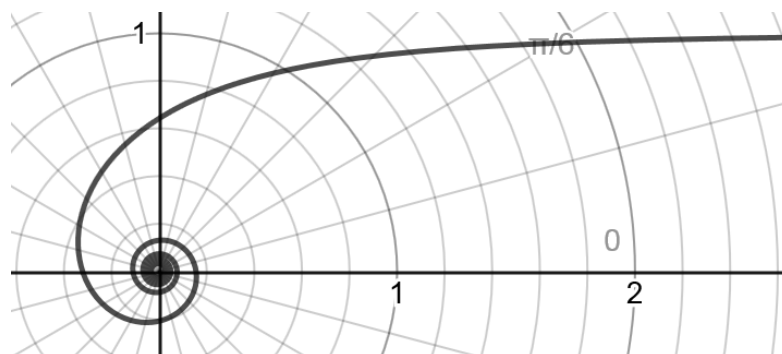
rys. 60

Zobaczymy, że krzywa wykresu została przedłużona do dwóch kolejnych ćwiartek i zaczyna nam się „zawijać” wokół początku układu współrzędnych. Krzywa kończy się na linii kąta 2π (co jest równoznaczne z 0). Co się stanie kiedy rozszerzymy zakres φ do $(0, 4\pi)$? Zobaczymy:



rys. 61

Krzywa tworząca wykres zaczyna nam się „zawijać” wokół początku układu. Dlaczego? Zauważmy, że dla argumentu φ z przedziałów $(0, \frac{\pi}{2})$ oraz $(2\pi, 2\pi + \frac{\pi}{2})$ wartości funkcji R leżą w tych samych ćwiartkach (1 ćwiartka). Podobnie jest dla innych ćwiartek. Ogólnie można powiedzieć, że w układzie biegunowym (gdzie widać jakby tylko *cały okrąg*, $[0, 2\pi]$) wszystkie argumenty powyżej/poniżej tego zakresu powtarzają się. Tak więc zwiększając zakres np. do $(0, 12\pi)$, otrzymamy bardziej zacieśnioną w środku spiralę.



rys. 62

f) Funkcja sinus $R=\sin(\varphi)$ i cosinus $R=\cos(\varphi)$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

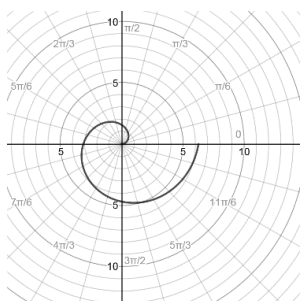
$$1 = \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = \left(\frac{y}{R}\right)^2 + \left(\frac{x}{R}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{R^2} = 1 \quad / \text{ mnożymy przez } R^2$$

I wreszcie otrzymujemy $x^2 + y^2 = R^2$ (a przecież jest to równanie opisujące okrąg)

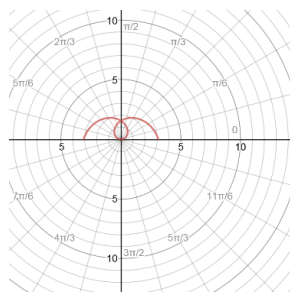
str. 38

g) Parzystość/nieparzystość funkcji, a jej wykres w układzie biegunowym

Jak już pisałem, w trakcie przygotowań do tego rozdziału (moje zabawy z Desmosem) zauważyłem, że zmiana dziedziny funkcji zmienia jej wykres - czasami zasadniczo. Wszystkie wyżej zamieszczone rysunki zakładają, że φ jest dodatnie (np. z zakresu $(0, 2\pi)$). A co się stanie jeżeli φ będzie mogło przyjmować wartości ujemne (np. z zakresu $(-\pi, \pi)$). Zobaczmy $R = \varphi$.



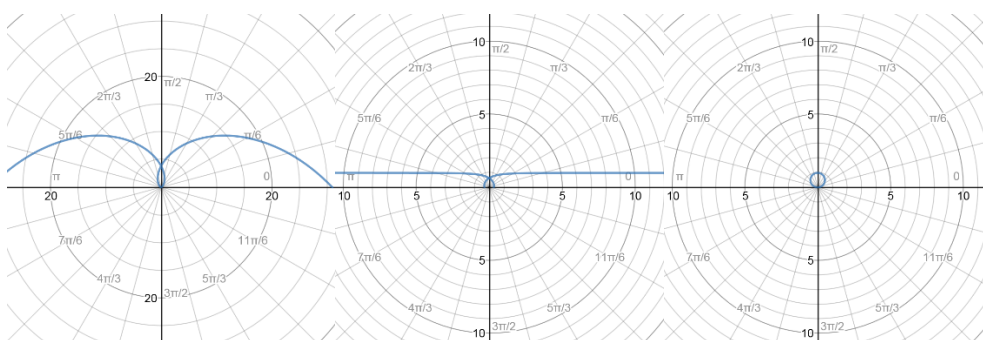
$$\varphi \in (0, 2\pi)$$



$$\varphi \in (-\pi, \pi)$$

rys. 65

Wiemy, że jest to funkcja liniowa bez współczynnika b i jako taka jest funkcją nieparzystą (tzn. $f(-x) = -f(x)$). Zobaczmy na wykres (ten po prawej) - jest on symetryczny względem prostej prostopadłej do osi biegunowej. Poniżej przedstawię wykresy funkcji nieparzystych:



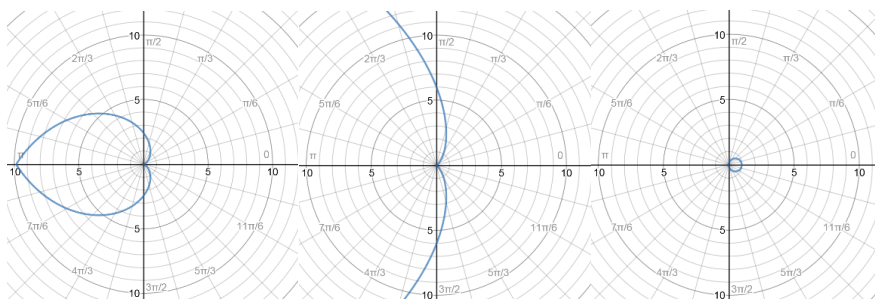
$$\varphi^3$$

$$\frac{1}{\varphi}$$

$$\sin(\varphi)$$

rys. 66

Te wykresy są także symetryczne względem prostej prostopadłej do osi biegunowej. A jak to wygląda dla funkcji, które wiemy, że są parzyste:



$$\varphi^2$$

$$\varphi^4$$

$$\cos(\varphi)$$

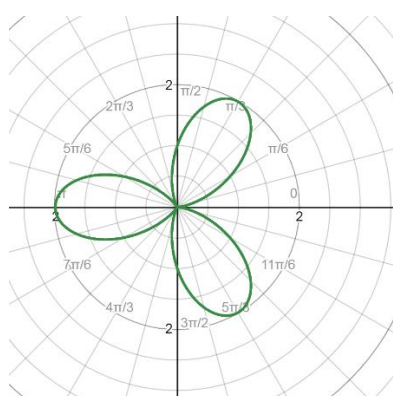
rys. 67

Widać, że jeżeli funkcja jest parzysta, to jej wykres w układzie biegunowym jest symetryczny względem osi biegunowej.

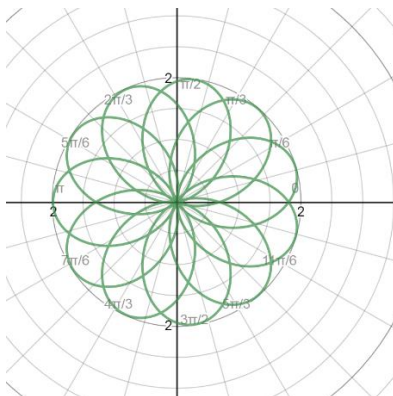
Ciekawe wykresy w układzie biegunowym

W trakcie pracy nad układem polarnym w Desmosie wielokrotnie spotykałam się z bardzo „ciekawymi” wykresami. Poniżej przedstawiam takie wykresy. Przy omawianiu różnych wykresów w układzie biegunowym, zamieściłem już różnego rodzaju „spirale”. Tutaj chciałbym pokazać coś bardziej ekscytującego. Większość poniższych wykresów oparta jest o funkcje trygonometryczne, gdyż chociażby z racji swojej okresowości generują – wręcz wspaniałe – „figury”. Desmos umożliwia tworzenie funkcji sparametryzowanych tzn. takich, gdzie w równaniu oprócz zmiennej x występują parametry, które można zmieniać (np. $\sin\left(\frac{1}{x} + 2n\pi\right)$). Aplikacja umożliwia płynną zmianę parametrów i od razu widać, jak zmienia się jej wykres. W ten sposób można tworzyć fascynujące filmiki. Niestety praca na papierze nie umożliwia zamieszczania ruchomych obrazów (na razie 😊). Dlatego czasami, aby choć w prosty sposób pokazać zmiany takich wykresów będę zamieszczał sekwencje wykresów.

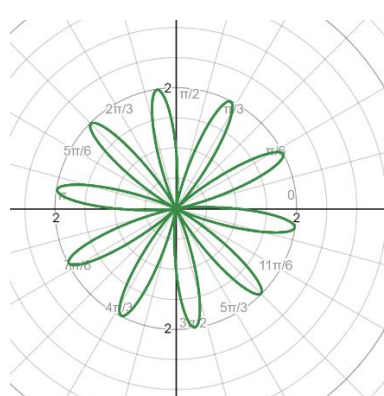
$$r = \sin\left(a\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) + 1$$



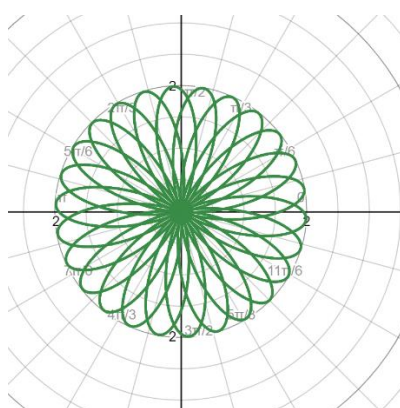
$a = 3$



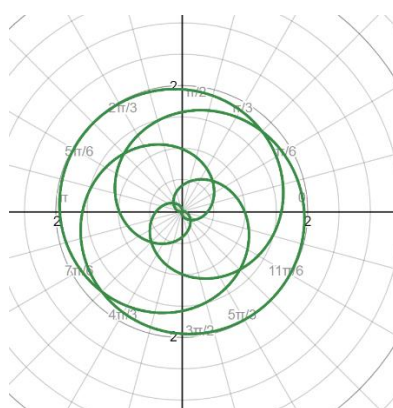
$a = 2.2$



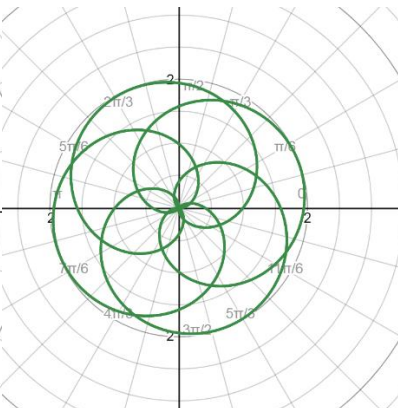
$a = 10$



$a = 5.2$



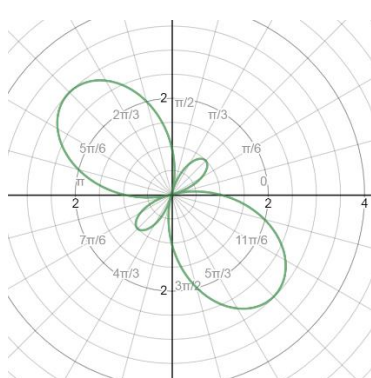
$a = 0.4$



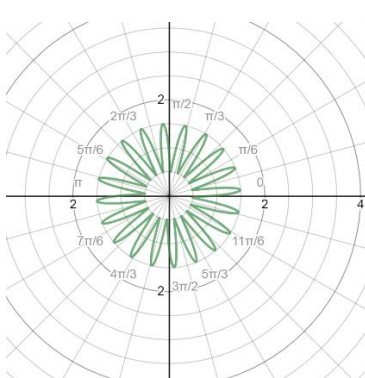
$a = 0.8$

rys. 68

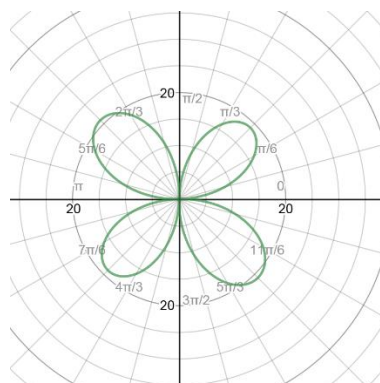
$$r = b \sin\left(a\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) + 1$$



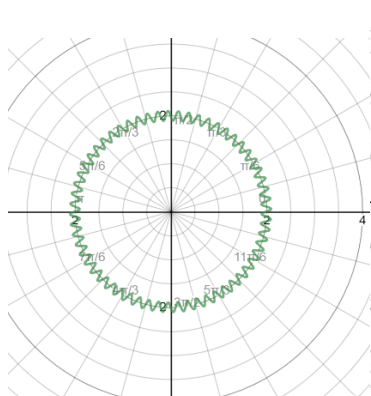
$$a = 2, b = 2$$



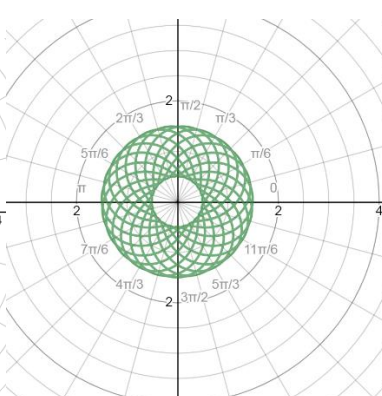
$$a = 20, b = \frac{1}{2}$$



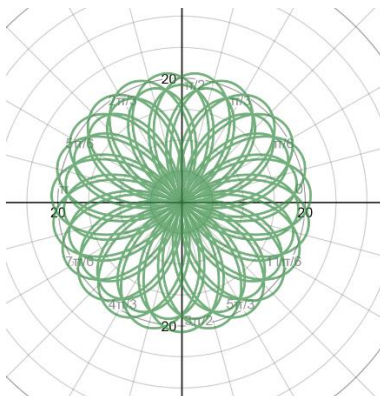
$$a = 2, b = 20$$



$$a = 60, b = \frac{1}{10}$$



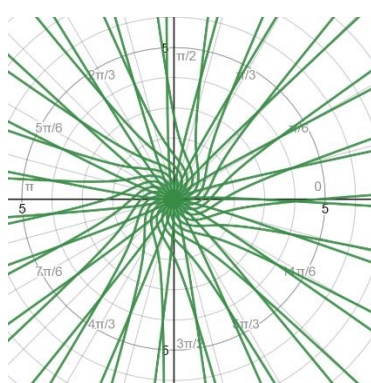
$$a = \frac{23}{12}, b = \frac{1}{2}$$



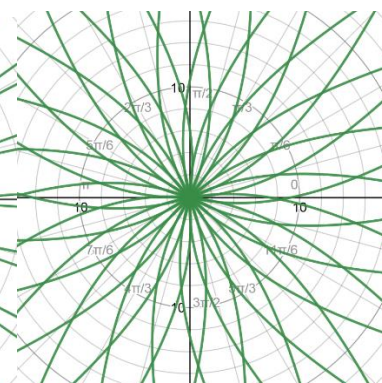
$$a = \frac{23}{12}, b = 20$$

rys. 69

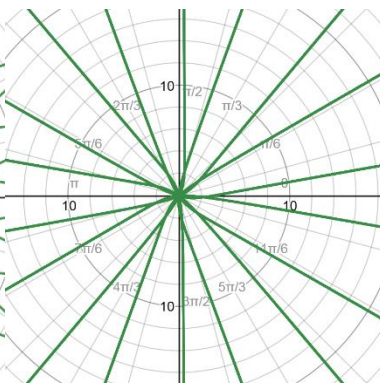
$$r = b \tan\left(a\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) + 1$$



$$a = \frac{23}{12}, b = \frac{1}{2}$$



$$a = \frac{23}{12}, b = 20$$

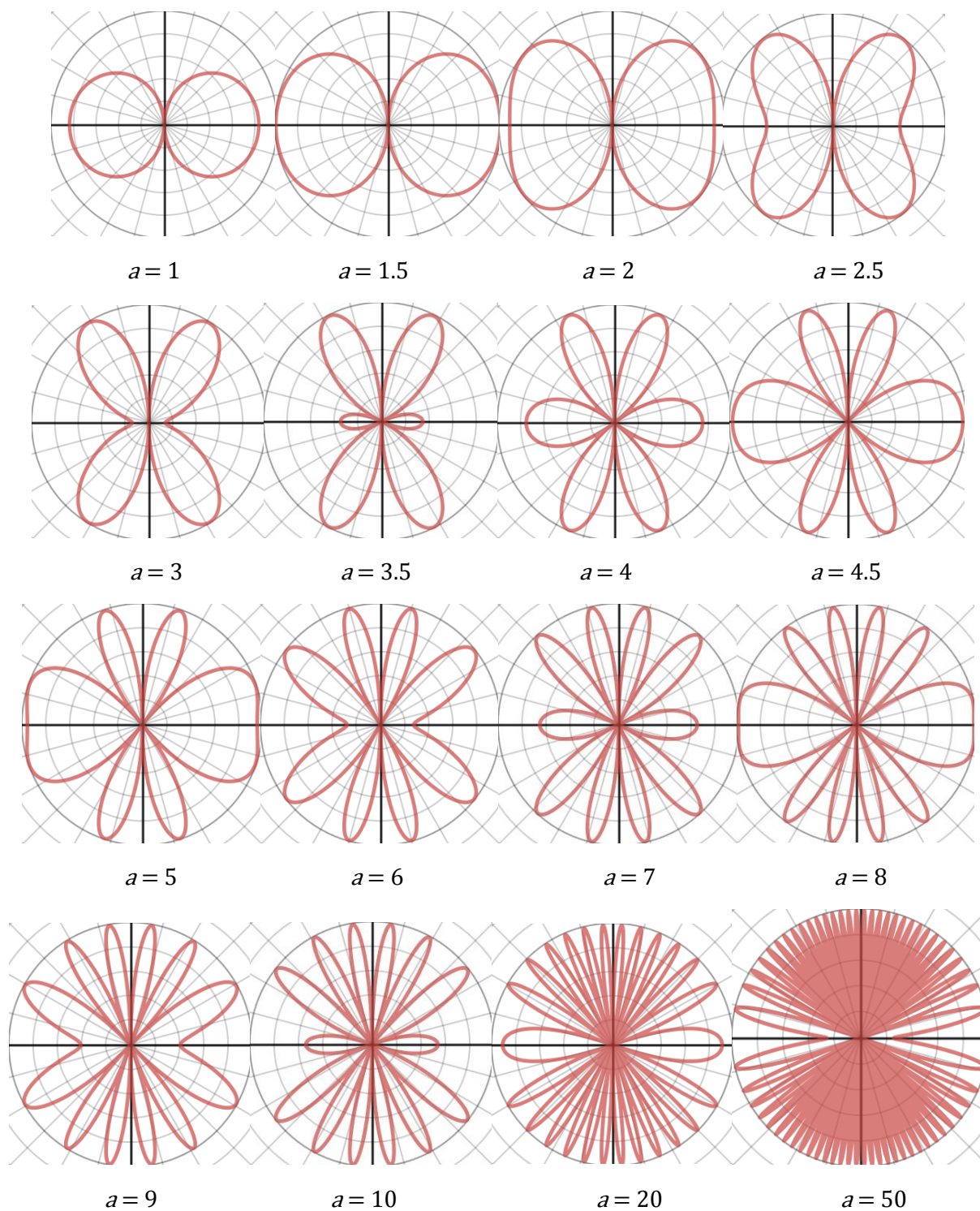


$$a = \frac{9}{2}, b = 2$$

rys. 70

A teraz przejdźmy do obiecanych sekwencji wykresów

$$r = \sin(a |\cos(\varphi)|)$$

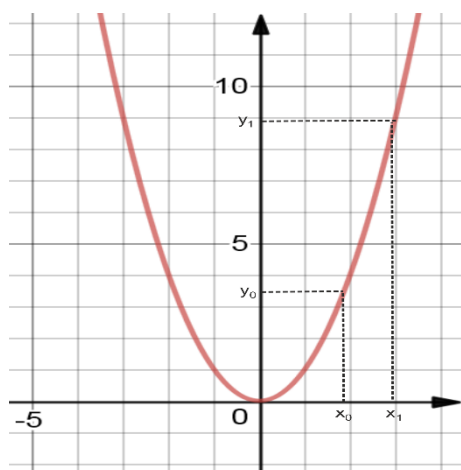


rys. 71

Pochodna

W trakcie zbierania materiałów na temat funkcji i ich właściwości, wykresów funkcji, różnych układów współrzędnych bardzo często przewijał się termin pochodnej funkcji. Zresztą jak pisałem we wstępie moja przygoda z funkcjami zaczęła się właśnie od znalezienia terminu pochodna. Dlatego, mimo że praca się już rozrosła ponad moje początkowe zamiary postanowiłem przynajmniej trochę zapoznać się z tym pojęciem.

Co to właściwie jest pochodna? Aby dobrze zdefiniować ten termin należy zacząć od **ilorazu różnicowego**. Zobaczmy na rysunek poniżej.



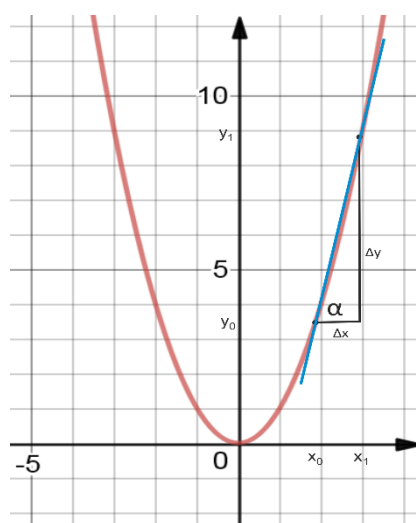
rys. 72

Mamy wykres funkcji (tutaj akurat parabola funkcji kwadratowej $f(x) = x^2$). Zaznaczone mamy dwa punkty (x_0, y_0) oraz (x_1, y_1) . Na osiach zaznaczyłem odpowiednio, na X: punkty x_0 oraz x_1 ; na Y: y_0 i y_1 . Teraz możemy oznaczyć przez $\Delta x = x_1 - x_0$ oraz $\Delta y = y_1 - y_0$, czyli Δx to przyrost argumentów, a Δy to przyrost wartości funkcji.

Uzbrojeni w takie oznaczenia możemy zdefiniować iloraz różnicowy jako stosunek przyrostu argumentów do przyrostu wartości $\frac{\Delta x}{\Delta y}$.

Zauważmy, że iloraz różnicowy to nic innego jak tangens kąta α (kąt jaki tworzy linia przechodząca przez obydwa punkty z osią X).

A co będzie, jeżeli Δx będziemy zmniejszali i zmniejszali prawie do zera (ale nie dokładnie do zera Δx jest w liczniku więc musi być różne do zera). Oczywiście przy zmianie Δx zmienia się także Δy , a co za tym idzie zmienia się cały iloraz różnicowy i kąt α . Można użyć jeszcze innych oznaczeń: $x_1 = x_0 + h$, $y = f(x)$ i wtedy iloraz różnicowy przyjmie postać $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Zauważmy, że jeżeli (na poprzednim rysunku) x_1 będzie nam dążył do x_0 to powstanie nam prosta, która nie będzie przecinać nam wykresu, a będzie do niego *styczna*. Można więc powiedzieć, że pochodna funkcji w punkcie to liczba przedstawiająca „pochyłość” stycznej.



rys. 73

Jakbyśmy nie oznaczali ilorazu różnicowego, to przy zmniejszaniu Δx (h) do zera otrzymamy pochodną:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Jest to pochodna w punkcie (gdyż obliczamy pochodną w punkcie (x_0, y_0)). Aby lepiej zrozumieć te symbole spróbujmy obliczyć jakąś pochodną w punkcie na podstawie powyższej definicji. Weźmy funkcję kwadratową $f(x) = x^2$ i obliczmy jej pochodną w punkcie $x_0 = 1$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2-(1)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1^2+2h+h^2-1^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h+h^2}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 + h \text{ skoro } h \text{ dąży do zera to całość będzie równa } 2. \text{ A więc pochodna funkcji}$$

$f(x) = x^2$ w punkcie $x_0 = 1$ wynosi 2 oznaczamy to tak: $f'(x_0) = 2$. Symbol prim przy funkcji oznacza właśnie pochodną, a oznaczenie x_0 , że wyliczamy ją w punkcie x_0 . Czy zawsze pochodna w punkcie funkcji kwadratowej będzie wynosiła 2? Sprawdźmy dla jakiegoś innego punktu x_0 .

$$\text{Weźmy teraz } x_0 = 2 \text{ i sprawdźmy jak wyżej. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2-(2)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4+4h+h^2-4}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h+h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 4 + h = 4. \text{ A więc w różnych punktach pochodna funkcji}$$

kwadratowej ma różną wartość. Zauważmy, że pochodna w punkcie to zawsze będzie liczba. A czy możemy obliczyć równanie na pochodną funkcji kwadratowej w dowolnym punkcie.

$$\text{Zobaczmy: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x. \text{ A więc pochodną funkcji kwadratowej w dowolnym punkcie } x \text{ jest } 2x.$$

zapisujemy to tak: $f(x) = x^2, f'(x) = 2x$. A co to jest $2x$? Przecież to też jest funkcja! Tak pochodną funkcji jest inna funkcja. Tak więc zdefiniowaliśmy właśnie pojęcie pochodnej:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ dla dowolnego } x.$$

Zadałem sobie pytanie: czy funkcja zawsze ma pochodną? Otóż odpowiedź jest prosta, jeżeli chodzi o pochodną w punkcie, bo np. $f(x) = |x|$ nie ma pochodnej w punkcie $x_0 = 0$. Dlaczego? Obliczmy z definicji:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x_0+h|-|x_0|}{h} \text{ teraz mamy dwie sytuacje:}$$

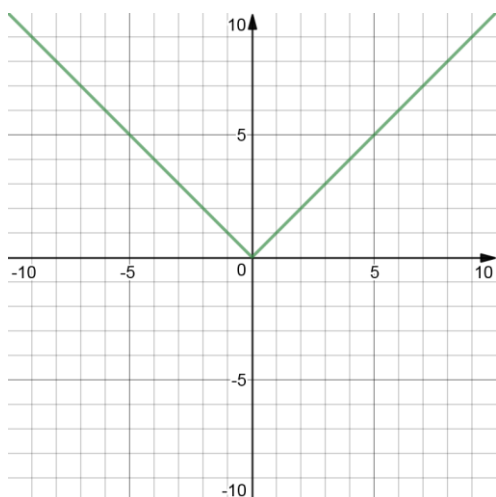
$$h > 0 \text{ (zbliżamy się do } x_0 = 0 \text{ z prawej strony) wtedy } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x_0+h|-|x_0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0+h-x_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$h < 0 \text{ (zbliżamy się do } x_0 = 0 \text{ z lewej strony) wtedy } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x_0+h|-|x_0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x_0+h)-(-x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-x_0-h+x_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1$$

Zatem w punkcie $x_0 = 0$ funkcja $f(x) = |x|$ w zależności od h pochodna wyliczona z definicji ma różne wartości. Mówimy wtedy, że w tym punkcie funkcja nie ma pochodnej. Jaka jest graficzna interpretacja takiej sytuacji? Zobaczmy:

Po lewej stronie mamy wykres $f(x) = |x|$. Okazuje się, że gdy funkcja ma w jakimś punkcie „ostry dziubek” na wykresie (tak jak tu dla argumentu 0), to w tym punkcie nie ma pochodnej. Wcześniej pisałem, że pochodna tworzy nam styczną do wykresu. A właśnie w takim „szpicu” nie można określić stycznej.



rys. 74

A czy istnieją takie funkcje, które nie mają pochodnej w żadnym punkcie? Okazuje się, że także na to pytanie odpowiedź jest twierdząca. Bez wdawania się w szczegóły powiem, że np. funkcji Weierstrassa jest funkcją bez pochodnej (graficznie jest zbudowana z samych „dziubków”).

Aby ułatwić obliczania pochodnych różnych funkcji matematycy wyprowadzili kilkanaście wzorów. Oto niektóre z nich

$$f(x) = a$$

$$f'(x) = 0$$

$$f(x) = ax$$

$$f'(x) = a$$

$$f(x) = x^n$$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f'(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \cos(x)$$

$$f'(x) = -\sin(x)$$

$$f(x) = a^x$$

$$f'(x) = a^x \ln a$$

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Oprócz powyższych wzorów udowodniono także pewne własności pochodnej.

Możemy na przykład stałą wyciągać przed pochodną

$$(af(x))' = af'(x) \text{ np. } (4x^4)' = 4(x^4)' = 4 * 4x^3 = 16x^3$$

Jeżeli weźmiemy dwie funkcje np. $f(x)$ oraz $g(x)$ to pochodna sumy funkcji jest sumą pochodnych

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \text{ np. } (x^2 + x)' = (x^2)' + (x)' = 2x + 1$$

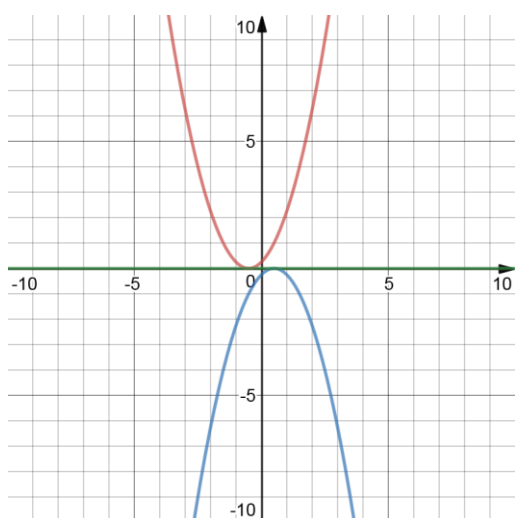
Z mnożeniem i dzieleniem funkcji sprawa nie jest już tak banalnie prosta. Przy mnożeniu dwóch funkcji wzór przyjmuje postać:

$$(f(x) * g(x))' = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x) \text{ np. } (x \ln x)' = (x)' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

A z dzieleniem jest jeszcze gorzej:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \text{ tu może już nie daję przykładu ☹}$$

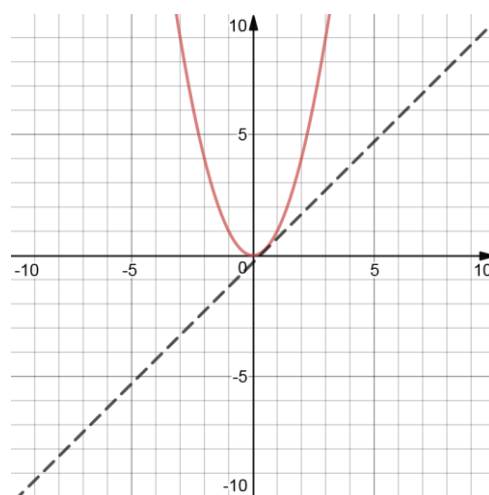
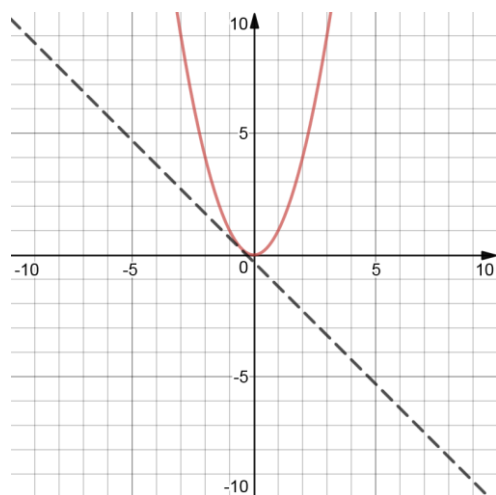
Pochodna, a ekstrema funkcji



rys. 75

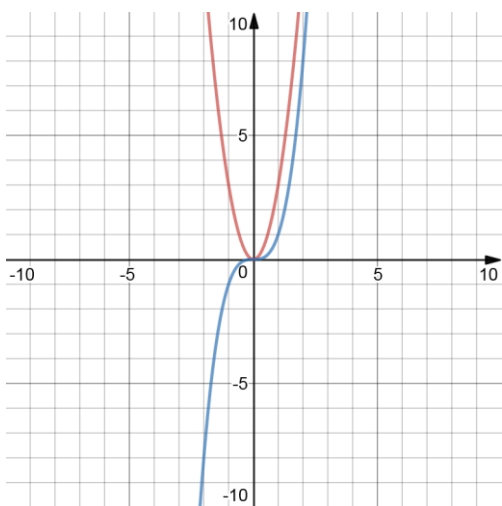
Jak pisałem wcześniej przy określaniu minimów i maksimów funkcji bardzo przydatna jest pochodna. Otóż, jeżeli w jakimś punkcie x_0 funkcja osiąga ekstremum to to jej pochodna w tym punkcie jest równa zero $f'(x_0) = 0$ (ale nie na odwrót). Graficzne wyjaśnienie tej tezy jest bardzo proste. Pochodna w punkcie x_0 , w interpretacji graficznej, to nachylenie stycznej do wykresu w tym punkcie. Jeżeli więc funkcja w jakimś punkcie osiąga ekstremum (minimum lub maksimum) to styczna musi być pozioma, a więc pochyłość będzie wynosić zero.

Ale nie wiemy jeszcze jakie to jest ekstremum (minimum czy maksimum). Zauważmy, że przy maksimum kąt nachylenia przechodzi nam z „ostrego” (0 do $\frac{\pi}{2}$) na „rozwarty” ($\frac{\pi}{2}$ do π). Tangens kąta ostrego jest dodatni, a rozwartego ujemny. Tak więc jeżeli w punkcie x_0 pochodna zmienia znak z ujemnego na dodatni (jak na rysunkach poniżej) to funkcja będzie miała minimum.



rys. 76

Natomiast, gdy pochodna w punkcie x_0 zmienia znak z dodatniego na ujemny, to funkcja ma maksimum. A dlaczego pisałem, że nie można wnioskować odwrotnie, tzn. z „zerowej pochodnej” wnioskować ekstremum? Zobaczmy na następny rysunek. Jest to wykres funkcji $f(x) = x^3$ oraz jej pochodnej $f'(x) = 3x^2$

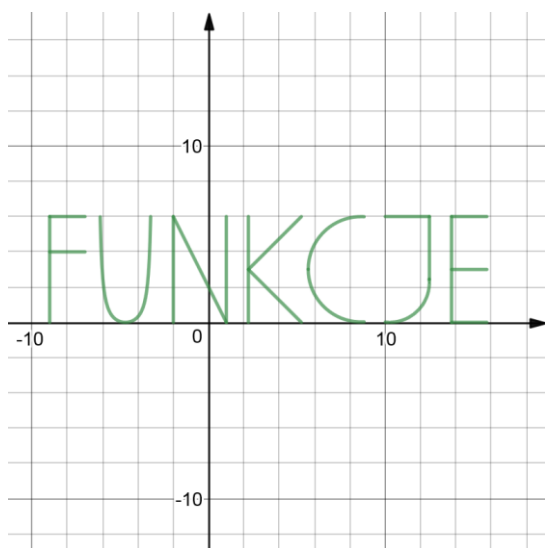


rys. 77

Dla $x_0 = 0$ pochodna $f'(x_0) = 0$, ale funkcja nie osiąga w tym punkcie ekstremum. A co dzieje się z wykresem pochodnej ($3x^2$). Zobaczmy – pochodna **nie zmienia znaku** po przejściu przez punkt x_0 . Tak więc do określenia ekstremów konieczne jest zbadanie czy pochodna funkcji w punkcie x_0 jest równa zero oraz czy w tym punkcie pochodna „zmienia znak”.

O pochodnej można jeszcze wiele napisać, ale może na tym już zakończę. Temat ten staje się coraz bardziej skomplikowany, a mnie zaczyna już brakować czasu 😊

Napis **FUNKCJE** jako wykres równań



rys. 78

W trakcie moich zabaw z Desmosem zauważyłem, że za pomocą wykresów można tworzyć grafiki. Jest nawet cała strona internetowa poświęcona różnym obrazom. Nie mam aspiracji graficznych, dlatego skupiłem się na tworzeniu napisów. Chodziło mi oczywiście o napis FUNKCJE. I tu klops! Linie pionowe (np. w literze F) nie są wykresami żadnych funkcji. Dlatego odszedłem od wykresów funkcji, a zająłem się wykresami równań, które nie są już tak restrykcyjnie zdefiniowane. Np. $x=0$ nie jest funkcją, ale równaniem już tak.

Pierwszą trudnością, na którą natrafiłem było ograniczanie wykresów, aby linie tworzące napis (np. pozioma linia w literze F) nie podążały do nieskończoności. Można oczywiście sztucznie ograniczyć dziedzinę, ale co to za zabawa! Spróbowałem inaczej. Zastanawiałem się jak można ograniczyć dziedzinę wprost z równania. Oczywiście jeżeli w równaniu występuje ułamek to mianownik nie może być równy zero. Ale to nie za wiele mi dało. Co jeszcze? Pierwiastek! To co jest pod pierwiastkiem nie może być mniejsze od zera (oczywiście jeżeli poruszamy się w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$). I jeszcze jedno: wartość bezwzględna! Testując różne równania doszedłem do dwóch takich, które ograniczają mi wykresy w pionie bądź poziomie:

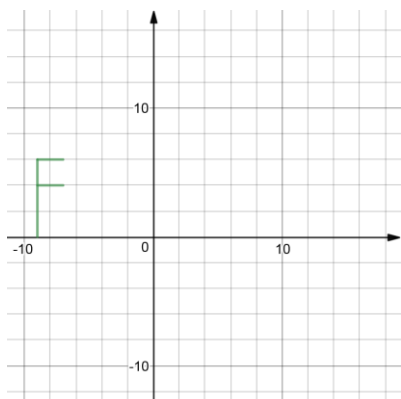
$$\sqrt{\frac{|y-a|-b|}{b-|y-a|}} + c - x = 0$$

ogranicza w pionie

$$\sqrt{\frac{|x-a|-b|}{b-|x-a|}} + c - y = 0$$

ogranicza w poziomie

Potem poszło już jak z płatka. No nie do końca, bo z literą J miałem jeszcze kłopoty. A literę U zrobiłem zupełnie przez przypadek. Próbowałem różne funkcje trygonometryczne (przecież U wygląda jak część sinusoidy) i pomyłkowo wpisałem $\frac{1}{\sin x}$ zamiast $\sin x$.

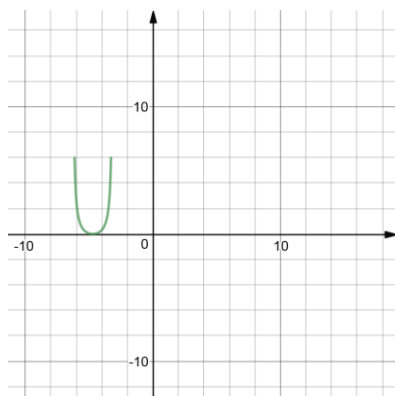


rys. 79

$$\sqrt{\frac{|y-3|-3|}{3-|y-3|}} - 10 - x = 0$$

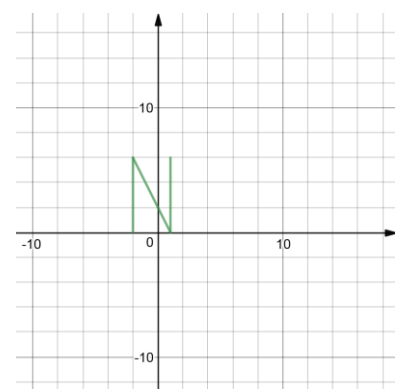
$$\sqrt{\frac{|x+8|-1|}{1-|x+8|}} + 5 - y = 0$$

$$\sqrt{\frac{|x+8|-1|}{1-|x+8|}} + 3 - y = 0$$



rys. 80

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{||x + 4.71225| - 1.42725|}{1.42725 - |x + 4.71225|}}\right)}{\sin x} - (y + 1) = 0$$

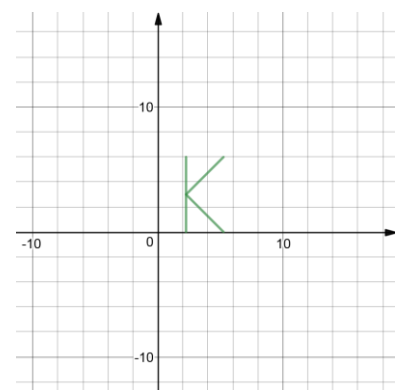


rys. 81

$$\left(\sqrt{\frac{||y - 3| - 3|}{3 - |y - 3|}}\right) - 3 - x = 0$$

$$\left(\sqrt{\frac{||y - 3| - 3|}{3 - |y - 3|}}\right) - x = 0$$

$$-\frac{y}{2} \left(\sqrt{\frac{||y - 3| - 3|}{3 - |y - 3|}}\right) + 1 - x = 0$$

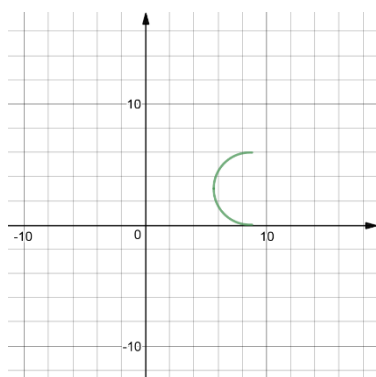


rys. 82

$$\left(\sqrt{\frac{||y - 3| - 3|}{3 - |y - 3|}}\right) + 1.25 - x = 0$$

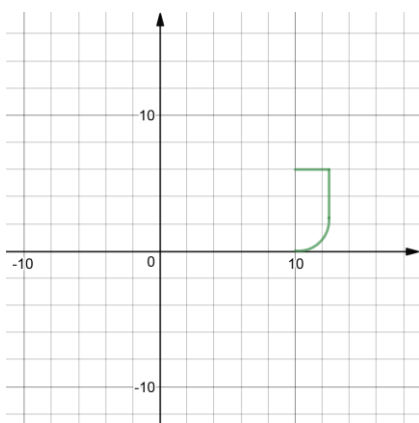
$$\left(\sqrt{\frac{||y - 4.5| - 1.5|}{1.5 - |y - 4.5|}}\right) - 0.75 - x = 0$$

$$-y \left(\sqrt{\frac{||y - 1.5| - 1.5|}{1.5 - |y - 1.5|}}\right) + 5.25 - x = 0$$



rys. 83

$$((y - 2.51)^2 + (x - 8.625)^2 - 6.16) * \left(\sqrt{\frac{||x - 4.4| - 4.4|}{4.4 - |x - 4.4|}}\right) - y = 0$$

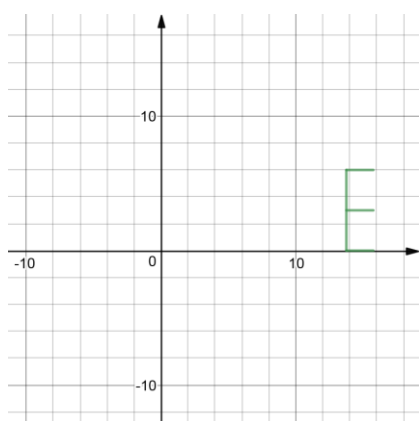


rys. 84

$$\left(\sqrt{\frac{||x - 11.25| - 1.25|}{1.25 - |x - 11.25|}} \right) + 5 - y = 0$$

$$\left(\sqrt{\frac{||y - 4.23| - 1.77|}{1.77 - |y - 4.23|}} \right) + 11.5 - x = 0$$

$$((x - 10.25)^2 + (y - 2.25)^2 - 5.05) * \left(\left(\sqrt{\frac{||y - 1.23| - 1.23|}{1.23 - |y - 1.23|}} \right) - x \right) * \left(\left(\sqrt{\frac{||x - 11.25| - 1.25|}{1.25 - |x - 11.25|}} \right) + 2 - y \right) = 0$$



rys. 85

$$\left(\sqrt{\frac{||y - 3| - 3|}{3 - |y - 3|}} \right) + 12.75 - x = 0$$

$$\left(\sqrt{\frac{||y - 14.75| - 1|}{1 - |y - 14.75|}} \right) - 1 - y = 0$$

$$\left(\sqrt{\frac{||y - 14.75| - 1|}{1 - |y - 14.75|}} \right) + 2 - y = 0$$

$$\left(\sqrt{\frac{||y - 14.75| - 1|}{1 - |y - 14.75|}} \right) + 5 - y = 0$$

Zakończenie

I na tym kończę moją pracę na temat funkcji. O ile na początku bardziej interesowały mnie własności funkcji i różne obliczenia, to w trakcie przygotowywania się do pracy zboczyłem w stronę wykresów. To naprawdę fascynujące, jak „nudne” proste i parabole w układzie kartezjańskim potrafią przekształcić się w piękne obrazy w układzie biegunowym. Tak więc moje przygotowania przebiegały dwutorowo: z jednej strony starałem się zgłębić definicję funkcji i jej własności, z drugiej „bawiłem się” Desmosem w poszukiwaniu coraz to ciekawszych wykresów. *Desmos Graphing Calculator* okazał się niezastąpiony. Rysuje on wykresy nie tylko funkcji, ale także równań, które nie spełniają definicji funkcji (np. wykres koła). A gdy odkryłem, że *Desmos* umożliwia przedstawianie wykresów w układzie polarnym, nie mogłem się wręcz oderwać od komputera. Czułem jednak, że zaniedbuję trochę teorię i z ciężkim sercem powróciłem do definicji i obliczeń.

Moja praca w żadnym razie nie jest jakimś kompendium na temat funkcji. Jest tylko skróconym opisem tego co mnie zainteresowało w tym temacie. Oczywiście z powodu ograniczeń objętości pracy nie ująłem w niej wielu rzeczy. Nie wspomniałem na przykład nic na temat ciągłości funkcji. A temat jest dość ważny (choćby w temacie pochodnej). O samej pochodnej też niewiele się zmieściło (a przecież od niej się wszystko zaczęło) – tylko jeden rozdział. Przy okazji zgłębiania tematu pochodnej napotkałem na ciekawy termin: limes - $\lim_{n \rightarrow \infty}$ - ten symbol pod słowem lim mnie zainteresował. Przecież to nieskończoność - do której mam sentyment ☺. Skrótowo także potraktowałem funkcje trygonometryczne (choć są bardzo ciekawe). Nie znalazło się też miejsce dla „ręcznego” rysowania funkcji wymiernej – temat dla mnie zbyt obszerny. Ciekawym tematem są też funkcje wielu zmiennych albo funkcje na liczbach zespolonych. Żałuję zwłaszcza tych ostatnich. Przeczytałem gdzieś, że pewne ich wykresy mają fantastyczne kształty, a część okazała się fraktalami. Gdybym miał wymieniać o czym nie napisałem w mojej pracy na temat funkcji, okazałoby się, że jest tego więcej niż tego co w pracy zawarłem. Ale tak to już jest (zauważyłem to w czasie pisania prac poprzednich), że trzeba coś wybrać, a inne rzeczy pominąć.

Na koniec dodam, że w rozwoju pojęcia funkcji duży wkład mają również polscy matematycy: Józef Marcinkiewicz, Wacław Franciszek Sierpiński, czy Kazimierz Zarankiewicz.

Źródła

1. www.matematyka.pl
2. www.pochodna.pl
3. matematyka.pisz.pl
4. www.naukowiec.org
5. www.matemaks.pl
6. pl.wikipedia.org
7. www.matematyka.wroc.pl
8. www.desmos.com/calculator

Spis treści

1. Dane kontaktowe	2
2. Wstęp	3
3. Informacja nauczyciela	5
4. Definicje	6
5. Własności funkcji	10
a) Miejsca zerowe	10
b) Monotoniczność	10
c) Różnowartościowość	12
d) Parzystość/Nieparzystość	12
e) Ekstrema (maksimum/minimum)	14
6. Rodzaje funkcji	15
a) Funkcja liniowa	15
b) Funkcja kwadratowa	17
c) Funkcja wielomianowa	22
d) Funkcja wymierna	22
e) Funkcja potęgowa	24
f) Funkcja wykładnicza	27
g) Funkcja logarytmiczna	29
h) Funkcje trygonometryczne	31
7. Układ biegunowy	33
a) Funkcja stała	34
b) Funkcja liniowa	34
c) Funkcja kwadratowa	35
d) Funkcja wielomianowa	35
e) Funkcja wymierna	36
f) Funkcja sinus i cosinus	38
g) Parzystość/nieparzystość	39
8. Ciekawe wykresy w układzie biegunowym	40
9. Pochodna	43
a) Pochodna, a ekstrema funkcji	46
10. Napis funkcje jako wykres równań	48
11. Zakończenie	51
12. Źródła	52