Wokół twierdzenia Morse'a - Hedlunda

Gabriela Pietras kl. VII

Publiczna Szkoła Podstawowa im. Gen. Władysława Andersa w Leszczynie
Leszczyna 132
32 – 733 Trzciana
tel.: 14 6136036
e – mail: pietrasgabriela6@gmail.com

Opiekun: mgr Martha Łącka
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie

Kraków 2018

Spis treści

I. Wstęp

Jednym z tematów, które bardzo mnie interesują, jest pokrywanie szachownic prostokątami o określonych wymiarach. Do tej pory rozważałam problematykę tylko i wyłącznie skończonych szachownic. Po wnikliwej analizie różnych zadań czy to z literatury, czy też mojego autorstwa, zaczęłam się zastanawiać, jak wyglądałoby kolorowanie szachownic nieskończenie długich i nieskończenie szerokich. Postanowiłam więc zgłębić tajniki nieskończonych szachownic.

Przedstawione w pracy rozumowania dotyczą nieskończonych szachownic jednowymiarowych okresowych i nieokresowych oraz szachownic dwuwymiarowych. Na podstawie twierdzenia Morse'a – Hedlunda, ciągów Sturma oraz hipotezy Nivata starałam się pokazać, jak bardzo zróżnicowana jest funkcja złożoności P_η. Kolorując ciągi sprawdzałam, ile różnych prostokątów o danej długości można zobaczyć w takim ciągu. Twierdzenie Morse'a – Hedlunda dotyczy okresowych szachownic jednowymiarowych nieskończenie długich. Szachownica jest okresowa (istnieje takie k, że wybrany wzór szachownicy powtarza się, jak przesuniemy ją o k) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie n, że widzimy co najwyżej n różnych prostokątów o długości n. Hipoteza Nivata związana jest natomiast z szachownicami dwuwymiarowymi. Bardzo interesujący jest fakt, że hipoteza Nivata pochodzi z 1997 roku, a jednak w dalszym ciągu jeszcze nikt nie był w stanie jej udowodnić ani obalić. Znane są jedynie jej wyniki częściowe. Ciągi Sturma, którymi również się zajmowałam, związane są z szachownicami nieokresowymi.

W pracy starałam się samodzielnie sprawdzić, jakie wartości może przyjmować funkcja złożoności ciągów. Kolorowałam szachownice na różne sposoby i sprawdzałam, kiedy można stwierdzić, że jest ona okresowa bądź nieokresowa. Aby tego dokonać korzystałam z twierdzenia Morse'a – Hedlunda.

II. Rozdział wprowadzający

W celu rozważania problematyki podjętej w pracy, niezbędne jest wyjaśnienie oznaczeń używanych w dalszych jej rozdziałach:

η jest to dwustronnie nieskończony ciąg (w pracy nazywany też szachownicą) nad alfabetem skończonym. η można interpretować jako nieskończoną szachownicę pokolorowaną na skończenie wiele kolorów.

$P_\eta(n)$ jest to liczba możliwych konfiguracji w η nad zbiorem $\{0, 1, 2, \ldots, n - 1\}$. Oznacza to liczbę różnych prostokątów długości n, która jest w η.

$P_{\eta,2}(n)$ to liczba możliwych konfiguracji nad zbiorem $\{0, 2, 4, \ldots, 2(n - 1)\}$.

$P_{\eta,k}(n)$ to liczba możliwych konfiguracji nad zbiorem $\{0, k, 2k, 3k, \ldots, k(n - 1)\}$.

Funkcje P_η, $P_{\eta,k}$ nazywamy funkcjami złożoności. Im większe są wartości funkcji złożoności, tym bardziej skomplikowany jest ciąg. Jeżeli dopuścilibyśmy do rozważania ciągi nad alfabetem nieskończonym, to przykładowo P_η dla szachownicy z każdym polem innego koloru byłaby nieskończona, jednak η nie byłaby skomplikowanym ciągiem. Dlatego w pracy skupiam się tylko na ciągach nad alfabetem skończonym.

$R_\eta(n,k)$ jest to liczba możliwych konfiguracji nad zbiorem $\{(0, 0), (0, 1), \ldots, (0, k - 1), (1, 0), \ldots, (1, k - 1), (2, 0), \ldots, (2, k - 1), \ldots, (n - 1, 0), \ldots, (n - 1, k - 1)\}$, czyli liczba różnych prostokątów o wymiarach n x k na płaszczyźnie.

W tej pracy przez „ciąg" rozumiemy dwustronnie nieskończony ciąg nad alfabetem skończonym. W ostatnim rozdziale pracy rozważane są „uogólnione ciągi", tj. ciągi dwuwymiarowe.

Przez A oznaczony został zbiór skończony, a przez $A^{\mathbb{N}}$, oznaczony został zbiór wszystkich ciągów dwustronnie nieskończonych o wyrazach w A.

III. Twierdzenie Morse'a – Hedlunda

Rozdział ten poświęcony jest twierdzeniu Morse'a – Hedlunda oraz jego dowodowi.

Twierdzenie Morse'a - Hedlunda

Następujące warunki są równoważne:

1) η jest ciągiem okresowym;
2) istnieje takie n_0, że $P_\eta(n_0) \leq n_0$;
3) istnieje takie M, że dla każdego n należącego do zbioru liczb naturalnych, $P_\eta(n) \leq M$.

Dowód twierdzenia Morse'a – Hedlunda:

1)=>3)

$P_\eta(n)$ jest ograniczona przez okres ciągu η. Wystarczy przyjąć, że M to okres ciągu η. Wtedy $P_\eta(n) \leq M$

np. dla dwukolorowej szachownicy o okresie 2:

$P_\eta(1) = 2$ = okres ciągu η

$P_\eta(2) = 2$ = okres ciągu η

$P_\eta(3) = 2$ = okres ciągu η

$P_\eta(4) = 2$ = okres ciągu η

$P_\eta(n) = 2$ = okres ciągu η

Gdy przyjmiemy, że M to okres ciągu η, to wówczas $P_\eta(n) = M$, czyli jest to szczególny przypadek $P_\eta(n) \leq M$

3)=>2)

Można przyjąć $n_0 = M$.

Wówczas $P_\eta(n_0) \leq n_0 = M$.

2)=>1)

Mamy dwa przypadki:

1° $P_\eta(1) = 1$

2° $P_\eta(1) \geq 2$

1° Gdy $P_\eta(1) = 1$, to szachownica jest jednokolorowa, a zatem okresowa (o okresie 1)

2° $P_\eta(1) \geq 2$

Po pierwsze zauważmy, że $P_\eta(n) \leq P_\eta(n+1)$, ponieważ każdy prostokąt długości n możemy przedłużyć w co najmniej jeden sposób.

Zakładamy, że istnieje takie n_0, dla którego $P_\eta(n_0) \leq n_0$.

Jeżeli przyporządkujemy liczbom naturalnym od 1 do n_0 liczby naturalne od 2 do n_0, to co najmniej jednej liczbie zostaną przyporządkowane co najmniej dwie liczby, gdyż liczb od 1 do n_0 jest n_0, a liczb od 2 do n_0 jest $n_0 - 1$.

Innymi słowy, istnieją takie k i y, że $k \neq y$, ale $P_\eta(k) = P_\eta(y)$.

Zatem: $P_\eta(k) \leq P_\eta(k+1) \leq P_\eta(y)$.

Czyli: $P_\eta(k) = P_\eta(k+1)$.

Wykażemy teraz, że wiedząc jak pokolorowany jest fragment szachownicy o długości k, możemy stwierdzić, w jakim kolorze jest następujące po nim pole (nawet nie znając miejsca, z którego ten fragment został wycięty).

Rozważmy następujący fragment:

k

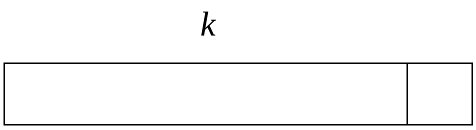
A	B

Załóżmy, że część oznaczoną przez B można pokolorować na co najmniej dwa sposoby. Zauważmy, że liczba słów długości $k+1$ nie zaczynających się od słowa A wynosi co najmniej $P_\eta(k) - 1$. Zatem $P_\eta(k) - 1 + 2 \leq P_\eta(k+1)$.

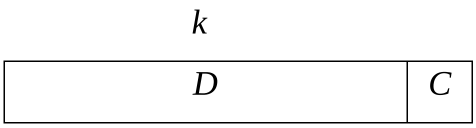
Czyli $P_\eta(k) < P_\eta(k+1)$, co prowadzi do sprzeczności.

Ponieważ słów długości k jest skończenie wiele, a szachownica jest nieskończona, istnieje takie słowo D długości k, które wystąpi w szachownicy co najmniej dwa razy.

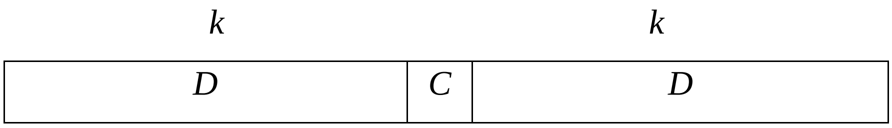
Z powyższego rozumowania wynika, że wiemy jak pokolorować część szachownicy pomiędzy dwoma wystąpieniami słowa *D*.



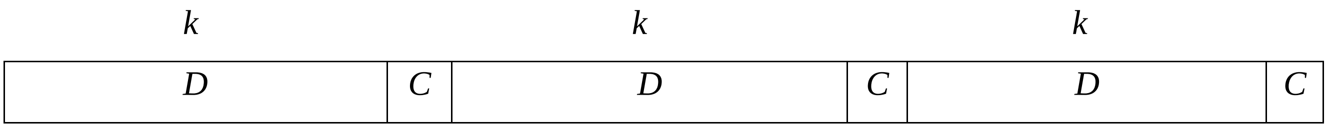
Oznaczmy tę część przez *C*.



Po *C* możemy dorysować jeszcze jeden prostokąt długości *k*. Będzie to słowo *D*.



Po drugim wystąpieniu słowa D możemy dorysować *C* i tak w nieskończoność, zatem szachownica jest okresowa (słowo *DC* będzie się powtarzać okresowo).



…

IV. Uogólnienie twierdzenia Morse'a – Hedlunda

Celem tego rozdziału jest uogólnienie twierdzenia Morse'a – Hedlunda. Dla liczby naturalnej k zdefiniujmy $P_{\eta,k}(n)$ jako liczbę możliwych konfiguracji nad zbiorem $\{0, k, 2k, \ldots, k(n-1)\}$. Zauważmy, że dla każdego n zachodzi $P_\eta(n) = P_{\eta,1}(n)$. Dla tego przypadku już zostało udowodnione twierdzenie Morse'a – Hedlunda.

Gdy k=2, to $P_{\eta,2}(n)$ oznacza liczbę możliwych konfiguracji nad zbiorem $\{0, 2, 4, \ldots, 2(n-1)\}$.

Udowodnijmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1

Następujące warunki są równoważne:

1. η jest ciągiem okresowym;
2. istnieje takie n_0, że $P_{\eta,2}(n_0) \leq n_0/2$;
3. istnieje takie M, że dla każdego n należącego do zbioru liczb naturalnych, $P_{\eta,2}(n) \leq M$.

Dowód Twierdzenia 1:

1)=>3)

$P_{\eta,2}(n)$ jest ograniczona przez okres ciągu η. Wystarczy przyjąć, że M to okres ciągu η. Wtedy $P_{\eta,2}(n) \leq M$.

Przykładowo dla dwukolorowej szachownicy, gdzie $M = 2$:

$P_{\eta,2}(1) = 2 =$ okres ciągu η

$P_{\eta,2}(2) = 2 =$ okres ciągu η

$P_{\eta,2}(3) = 2 =$ okres ciągu η

$P_{\eta,2}(4) = 2 =$ okres ciągu η

$P_{\eta,2}(n) = 2 =$ okres ciągu η

Gdy przyjmiemy, że M to okres ciągu η, to wówczas $P_{\eta,2}(n) = M$, czyli jest to szczególny przypadek $P_{\eta}(n) \leq M$.

3)=>2)

Można przyjąć $n_0 = 2M$

Wówczas $P_{\eta,2}(n_0) \leq n_0/2 = M$

2)=>1)

Rozważmy ciągi:

$\eta_{\text{ parzyste}} = \ldots, \eta(-2), \eta(0), \eta(2), \eta(4), \ldots$

$\eta_{\text{ nieparzyste}} = \ldots, \eta(-1), \eta(1), \eta(3), \eta(5), \ldots$

Zauważmy, że dla każdego n

$P_{\eta\text{ parz.}}(n) \leq P_{\eta,2}(n)$,

$P_{\eta\text{ nieparz.}}(n) \leq P_{\eta,2}(n)$.

Zatem

$P_{\eta\text{ parz.}}(n_0) \leq n_0$ i $P_{\eta\text{ nieparz.}}(n_0) \leq n_0$.

Z twierdzenia Morse'a – Hedlunda wynika więc, że:

$P_{\eta\text{ parz.}}$ i $P_{\eta\text{ nie parz.}}$ są ciągami okresowymi.

Niech P_1 oznacza okres $\eta_{\text{ parz.}}$ i P_2 oznacza okres $\eta_{\text{ nieparz.}}$

Wówczas dla każdego n należącego do zbioru liczb naturalnych:

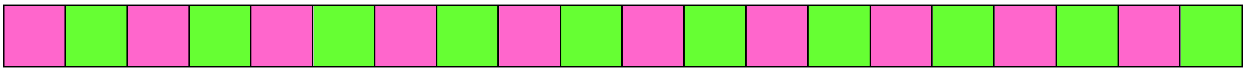
$\eta(n+2P_1P_2) = \eta(n)$, a więc η jest ciągiem okresowym.

V. Przykłady

Na podstawie twierdzenia Morse'a – Hedlunda wykażemy, że dana szachownica jest okresowa lub nieokresowa. Aby tego dokonać, będziemy podstawiać kolejne argumenty (zwiększać długość prostokątów) do funkcji złożoności ciągów.

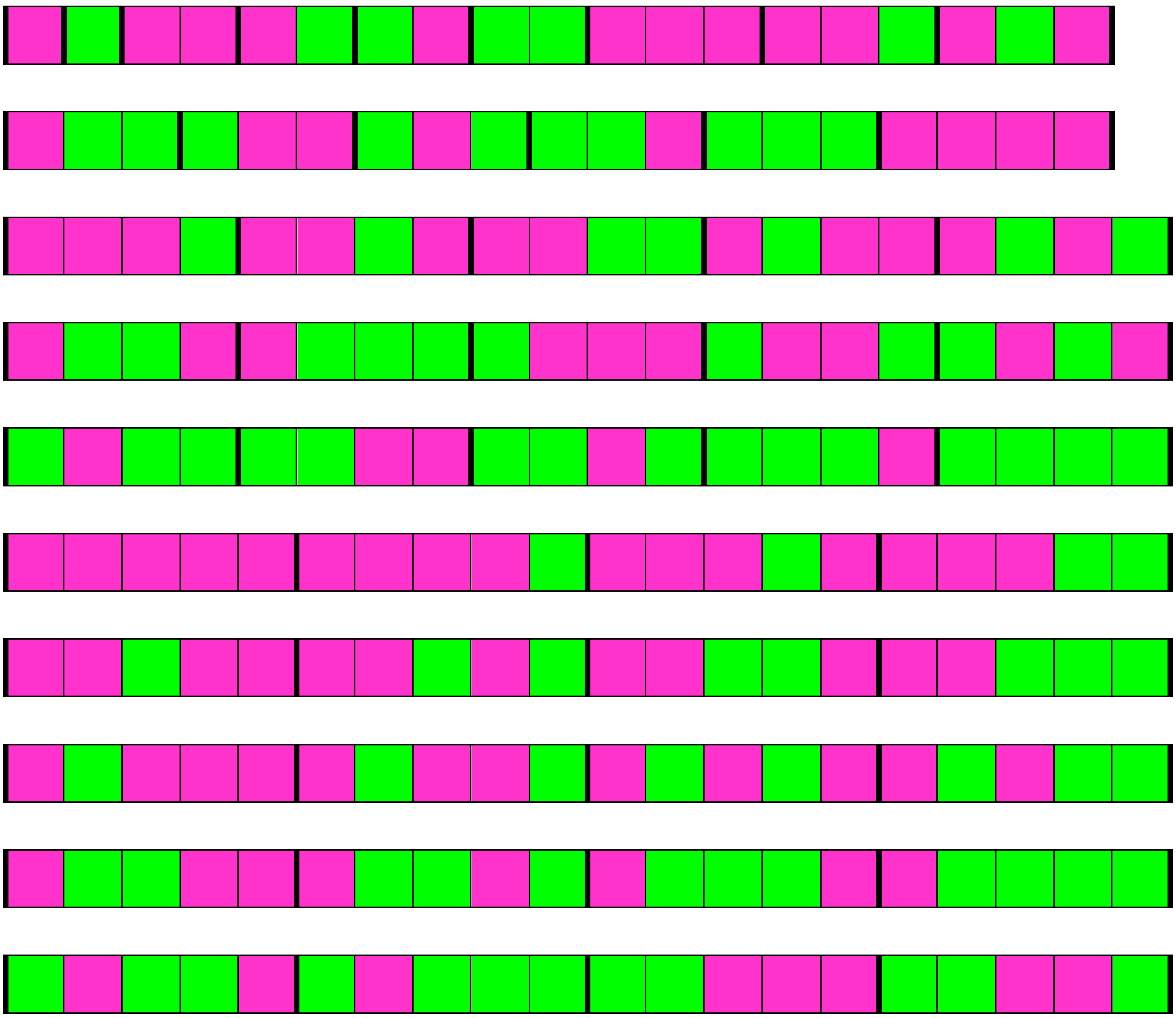
Pokolorujmy szachownicę na dwa sposoby dwoma kolorami, jak na Rys. 1 i Rys. 2.

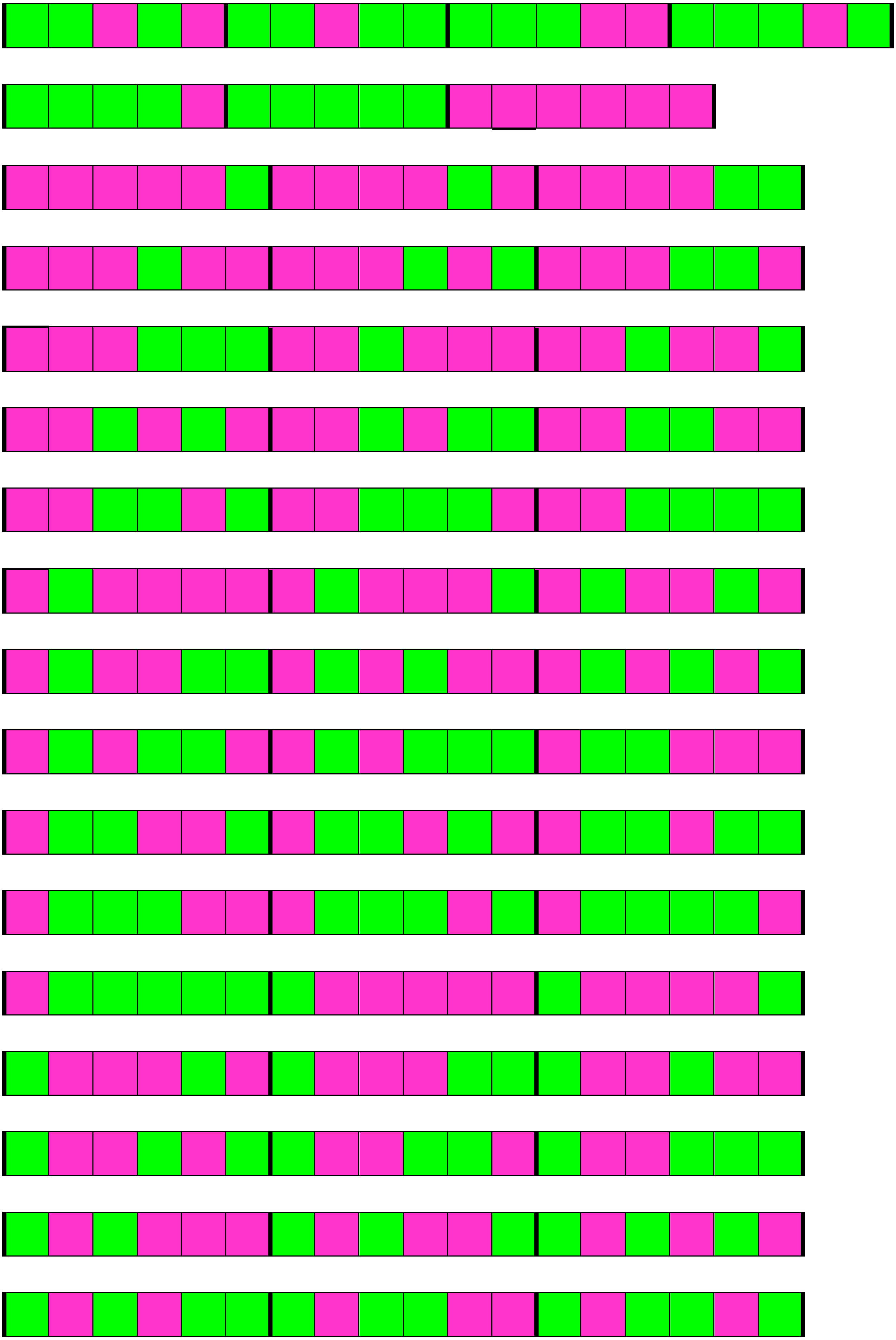
I – szachownica okresowa

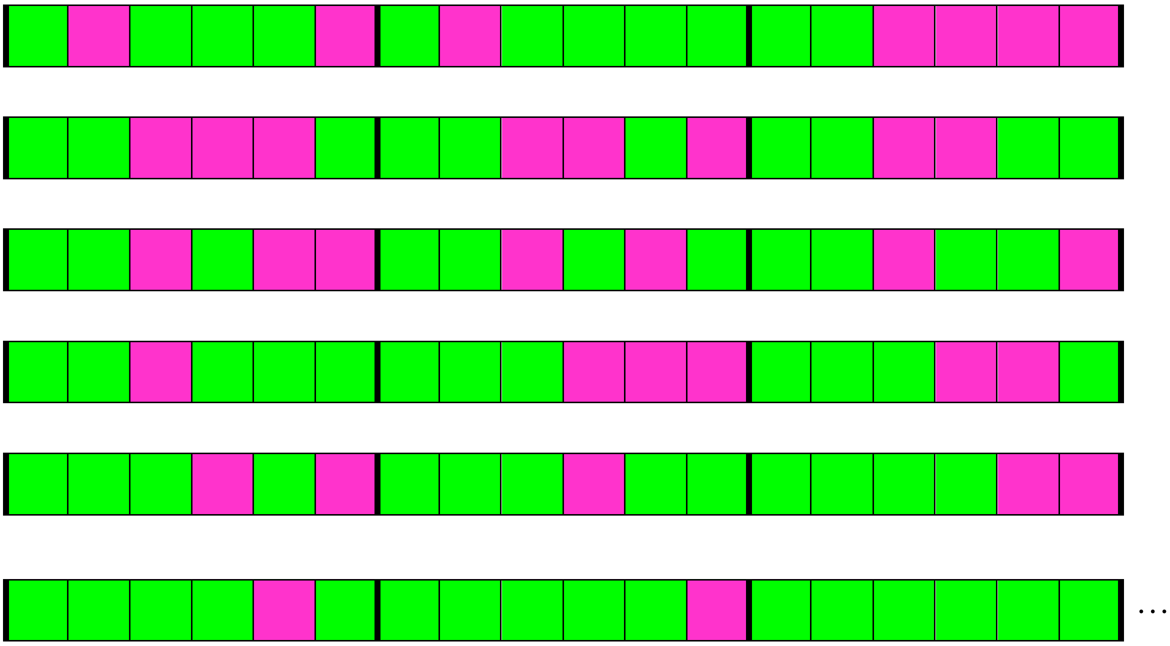


Rys. 1

II – szachownica nieokresowa







Rys. 2

I $P_{\eta,2}(1) = 2 > 1/2$

II $P_{\eta,2}(1) = 2 > 1/2$

I $P_{\eta,2}(2) = 2 > 2/2$

II $P_{\eta,2}(2) = 4 > 2/2$

I $P_{\eta,2}(3) = 2 > 3/2$

II $P_{\eta,2}(3) = 8 > 3/2$

I $P_{\eta,2}(4) = 2 = 4/2$

II $P_{\eta,2}(4) = 16 > 4/2$

I $P_{\eta,2}(5) = 2 < 5/2$

II $P_{\eta,2}(5) = 32 > 5/2$

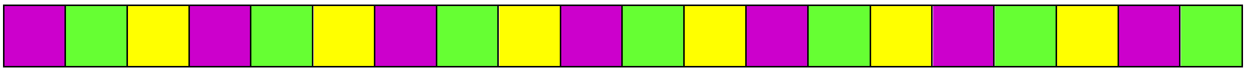
I $P_{\eta,2}(n) = 2 \leq n/2$, dla $n \geq 4$

II $P_{\eta,2}(n) = 2^n > n/2$, dla $n \geq 1$

Z uogólnionego twierdzenia Morse'a – Hedlunda wynika zatem, że szachownica przedstawiona na Rys. 1 jest okresowa, natomiast szachownica przedstawiona na Rys. 2 nie jest okresowa, ponieważ dla każdego n zachodzi $2^n > n/2$.

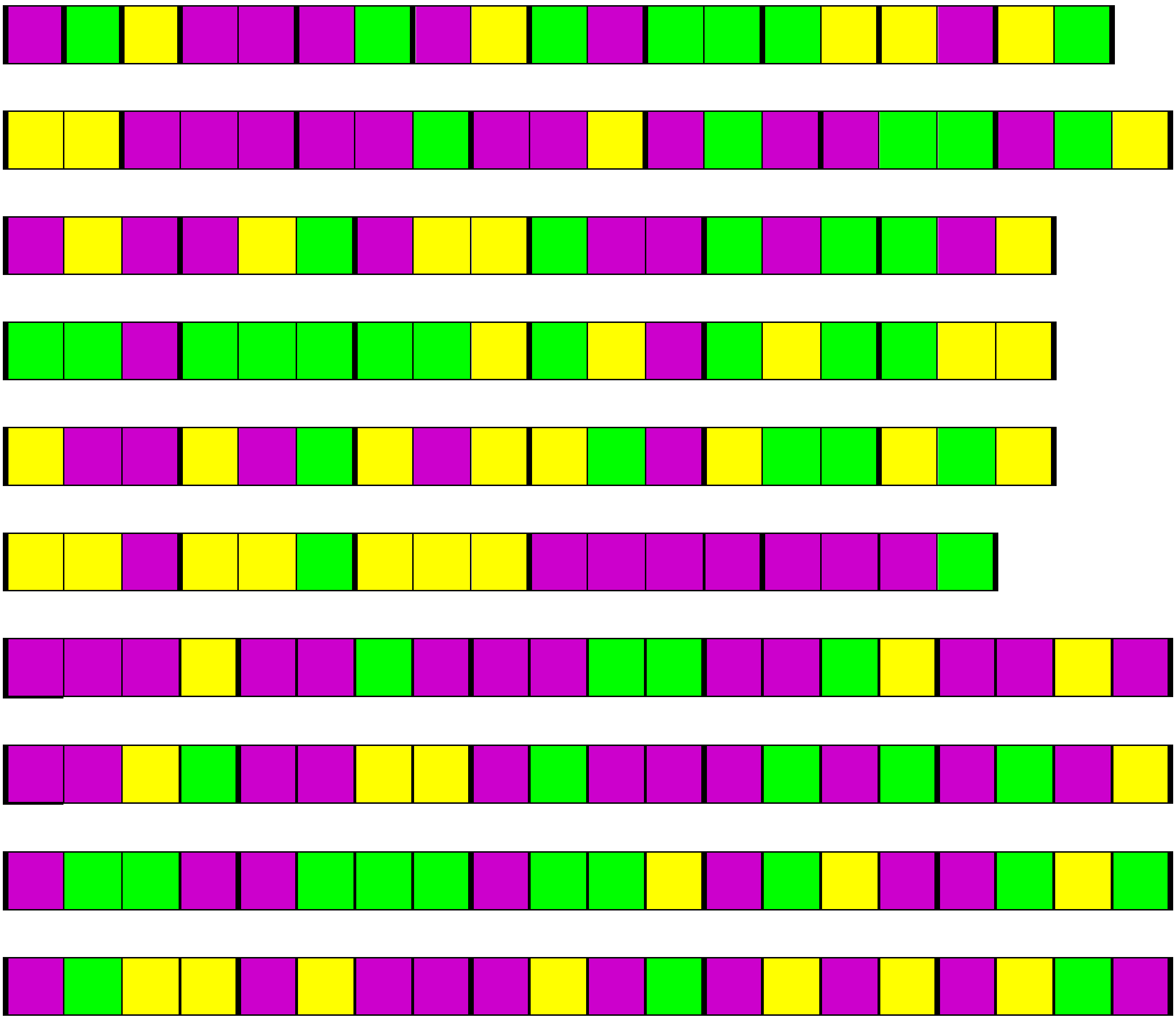
Pokolorujmy szachownicę na dwa sposoby trzema kolorami, jak na Rys. 3 i Rys. 4.

III – szachownica okresowa



Rys. 3

IV – szachownica nieokresowa



Rys. 4

III $P_{\eta,2}(1) = 3 > 1/2$

IV $P_{\eta,2}(1) = 3 > 1/2$

III $P_{\eta,2}(2) = 3 > 2/2$

IV $P_{\eta,2}(2) = 9 > 2/2$

III $P_{\eta,2}(3) = 3 > 3/2$

IV $P_{\eta,2}(3) = 27 > 3/2$

III $P_{\eta,2}(4) = 3 > 4/2$

IV $P_{\eta,2}(4) = 81 > 4/2$

III $P_{\eta,2}(5) = 3 > 5/2$

IV $P_{\eta,2}(5) = 243 > 5/2$

III $P_{\eta,2}(6) = 3 = 6/2$

IV $P_{\eta,2}(6) = 729 > 6/2$

III $P_{\eta,2}(7) = 3 < 7/2$

IV $P_{\eta,2}(7) = 2187 > 7/2$

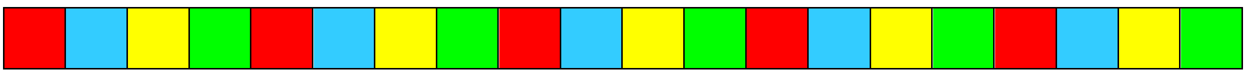
III $P_{\eta,2}(n) = 3 \leq n/2$, dla $n \geq 6$

IV $P_{\eta,2}(n) = 3^n > n/2$, dla $n \geq 1$

Z uogólnionego twierdzenia Morse'a – Hedlunda wynika zatem, że szachownica przedstawiona na Rys. 3 jest okresowa, natomiast szachownica przedstawiona na Rys. 4 nie jest okresowa, ponieważ dla każdego n zachodzi $3^n > n/2$.

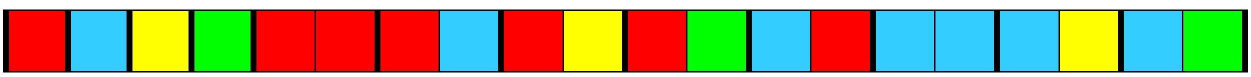
Pokolorujmy szachownicę na dwa sposoby czterema kolorami, jak na Rys. 5 i Rys. 6.

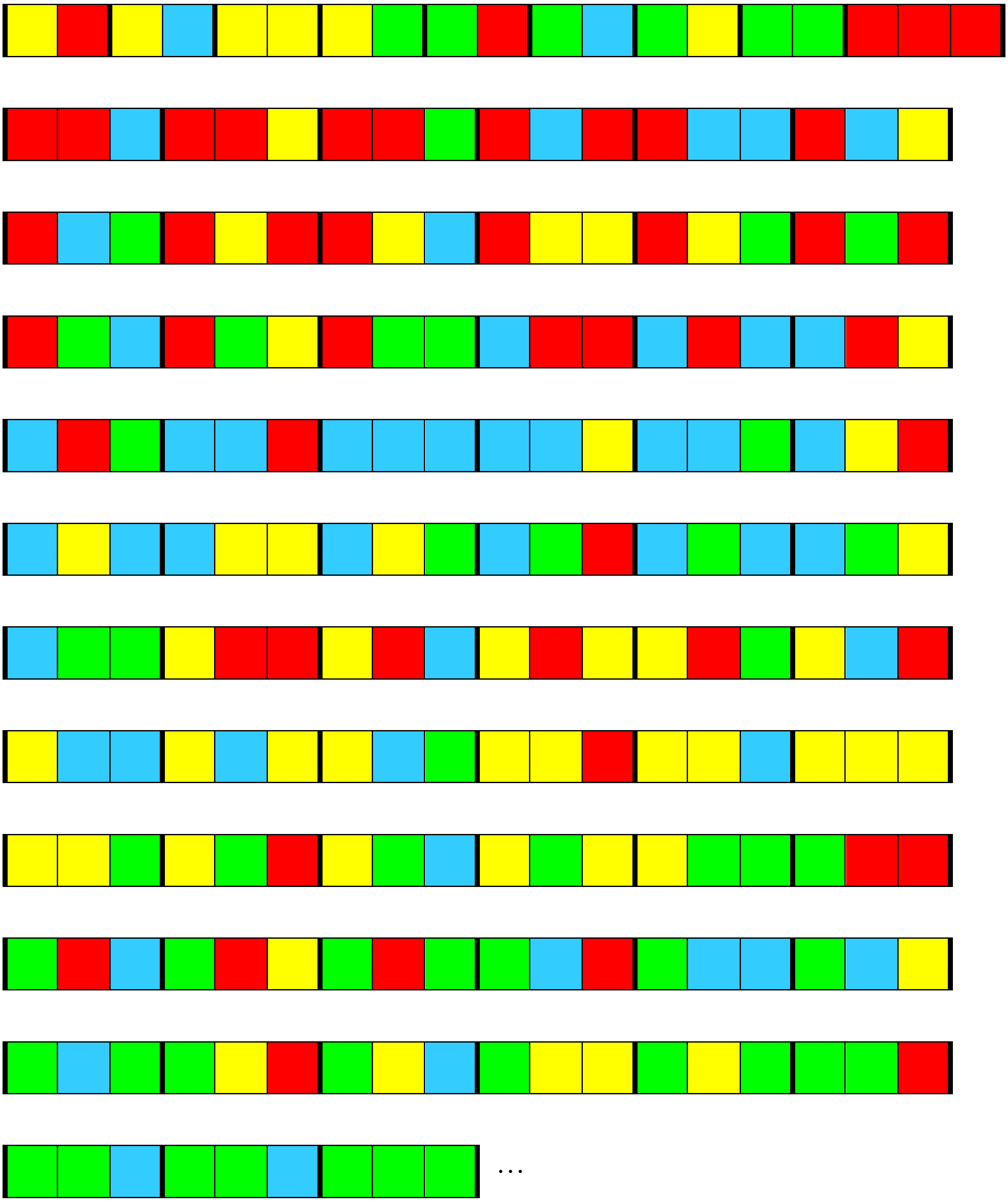
V – szachownica okresowa



Rys. 5

VI – szachownica nieokresowa





Rys. 6

V $P_{\eta,2}(1) = 4 > 1/2$

VI $P_{\eta,2}(1) = 4 > 1/2$

V $P_{\eta,2}(2) = 4 > 2/2$

VI $P_{\eta,2}(2) = 16 > 2/2$

V $P_{\eta,2}(3) = 4 > 3/2$

VI $P_{\eta,2}(3) = 64 > 3/2$

V $P_{\eta,2}(4) = 4 > 4/2$

VI $P_{\eta,2}(4) = 156 > 4/2$

V $P_{\eta,2}(5) = 4 > 5/2$

VI $P_{\eta,2}(5) = 1024 > 5/2$

V $P_{\eta,2}(6) = 4 > 6/2$

VI $P_{\eta,2}(6) = 4096 > 6/2$

V $P_{\eta,2}(7) = 4 > 7/2$

VI $P_{\eta,2}(7) = 16384 > 7/2$

V $P_{\eta,2}(8) = 4 = 8/2$

VI $P_{\eta,2}(8) = 65536 > 8/2$

V $P_{\eta,2}(9) = 4 < 9/2$

VI $P_{\eta,2}(9) = 262144 > 9/2$

V $P_{\eta,2}(n) = 4 \leq n/2$, dla $n \geq 8$

VI $P_{\eta,2}(n) = 4^n > n/2$, dla $n \geq 1$.

Z uogólnionego twierdzenia Morse'a – Hedlunda wynika zatem, że szachownica przedstawiona na Rys. 5 jest okresowa, natomiast szachownica przedstawiona na Rys. 6 nie jest okresowa, ponieważ dla każdego n zachodzi $4^n > n/2$.

VI. Uogólnienie twierdzenia Morse'a – Hedlunda – część druga

Na początku tego rozdziału zdefiniowaliśmy $P_{\eta,k}(n)$ jako liczbę możliwych konfiguracji nad zbiorem $\{0, k, 2k, 3k, \ldots, k(n - 1)\}$.

Udowodnijmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2

Następujące warunki są równoważne:

1) η jest ciągiem okresowym;
2) istnieje takie n_0, że $P_{\eta,k}(n_0) \leq n_0/k$;
3) istnieje takie M, że dla każdego n należącego do zbioru liczb naturalnych, $P_{\eta,k}(n) \leq M$.

Dowód Twierdzenia 2:

1)=>3)

$P_{\eta,k}(n)$ jest ograniczona przez okres ciągu η. Wystarczy przyjąć, że M to okres ciągu η. Wówczas $P_{\eta,k}(n) \leq M$.

3)=>2)

Można przyjąć $n_0 = Mk$

Wówczas $P_{\eta,k}(n_0) \leq n_0/k = M$.

2)=>1)

Zdefiniujmy:

$\eta_{r0} = \ldots, \eta(-k), \eta(0), \eta(k), \ldots$

$\eta_{r1} = \ldots, \eta(1-k), \eta(1), \eta(k+1), \ldots$

$\eta_{r2} = \ldots, \eta(2-k), \eta(2), \eta(k+2), \ldots$

$\eta_{r3} = \ldots, \eta(3-k), \eta(3), \eta(k+3), \ldots$

$\eta_{r4} = \ldots, \eta(4-k), \eta(4), \eta(k+4), \ldots$

$\eta_{r5} = \ldots, \eta(5-k), \eta(5), \eta(k+5), \ldots$

…

$\eta_{r(k\text{-}1)} = \ldots, \eta(-1), \eta(k-1), \eta(2k-1), \ldots$

Zauważmy, że dla każdego n:

$P_{\eta r0}(n) \leq P_{\eta,k}(kn)$,

$P_{\eta r1}(n) \leq P_{\eta,k}(kn)$,

…

$P_{\eta r(k-1)}(n) \leq P_{\eta,k}(kn)$.

Zatem

$P_{\eta r0}(n_0) \leq kn_0/k = n_0$,

$P_{\eta r1}(n_0) \leq kn_0/k = n_0$,

…

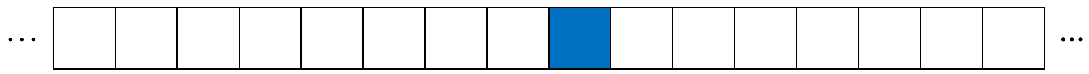
$P_{\eta r(k-1)}(n_0) \leq kn_0/k = n_0$.

Z twierdzenia Morse'a – Hedlunda wynika więc, że $P_{\eta r0}$, $P_{\eta r1}$, …, $P_{\eta r(k-1)}$ są ciągami okresowymi. Niech P_0 oznacza okres η_{r0}, P_1 oznacza okres η_{r1}, …, $P_{(k-1)}$ oznacza okres $\eta_{r(k-1)}$. Wówczas dla każdego n należącego do liczb naturalnych: $\eta(n + kP_0P_1 \ldots P_{(k-1)}) = \eta(n)$, a więc η jest ciągiem okresowym.

VII. Ciągi Sturma

Ciąg η należący do $A^{\mathbb{N}}$ nazywamy ciągiem Sturma, jeżeli dla każdego n zachodzi, $P_\eta(n) = n+1$.
Ciągi Sturma nie są okresowe (są to ciągi nieokresowe o minimalnej możliwej złożoności).

Niech $\eta = \ldots0001000\ldots$ (Rys. 7)



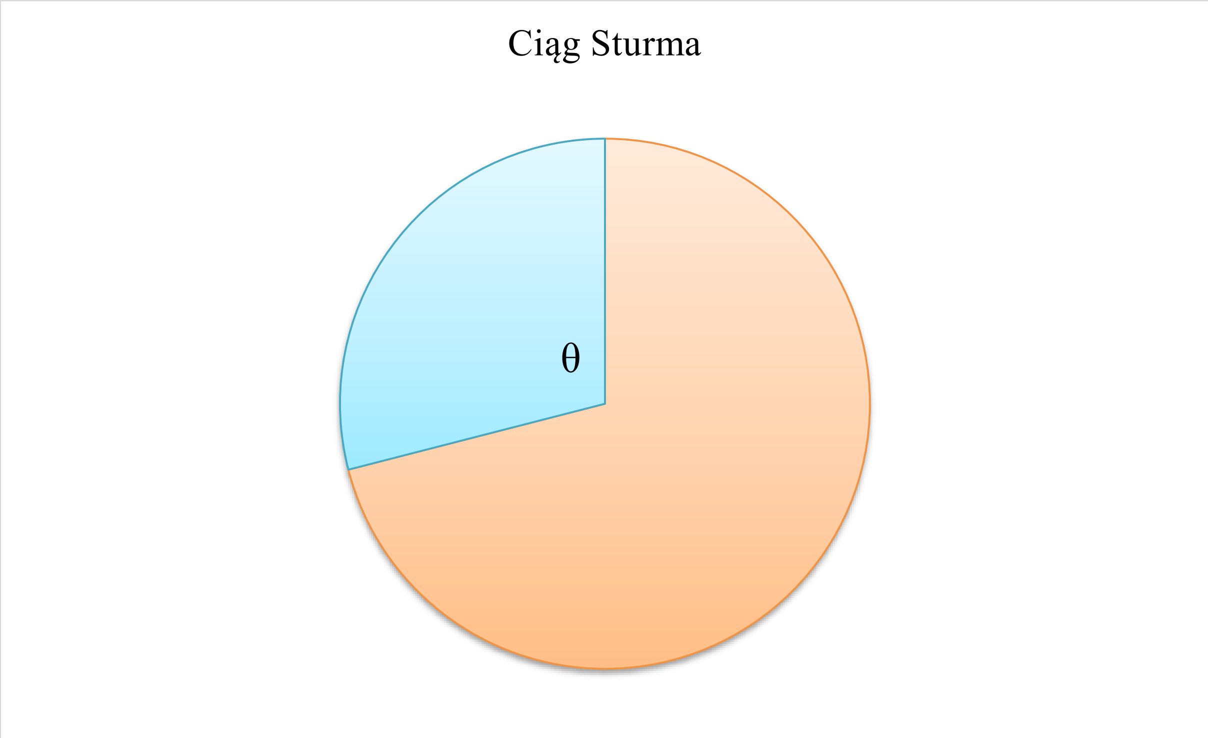
Rys. 7

Wówczas dla każdego n zachodzi, $P_\eta(n) = n+1$, ale jeżeli rozpatrzymy tylko „prawą" stronę η, to otrzymamy (jednostronny) ciąg okresowy. Dlatego przyjmujemy następującą definicję:
ciąg dwustronnie nieskończony nazywany jest *ciągiem Sturma*, jeżeli każde jego jednostronnie nieskończone podsłowo jest ciągiem Sturma.

Poniżej przedstawiamy konstrukcję ciągu Sturma. Wybieramy dwa łuki na okręgu. Niech pierwszy z nich ma kolor niebieski, a drugi łuk niech ma kolor pomarańczowy (Rys. 8). Kąt środkowy oparty na niebieskim łuku to θ. Wybieramy pewien punkt na niebieskim łuku. Następnie zaznaczamy pierwszy wyraz ciągu jako 1, ponieważ wybrany punkt leży na niebieskim łuku. Potem wykonujemy następujący ciąg czynności nieskończenie wiele razy:

- przesuwamy wybrany przez nas punkt w dowolną stronę (gdy wykonujemy podaną czynność po raz pierwszy, to mamy prawo wyboru kierunku, jednak za drugim razem przesuwamy punkt w tę stronę, co poprzednim razem) o kąt środkowy θ,
- jeśli punkt znalazł się na niebieskim łuku, to dopisujemy 1 do ciągu, a jeśli punkt znalazł się na pomarańczowym łuku, to dopisujemy 0 do ciągu.

Powstały ciąg jest okresowy lub nieokresowy, w zależności od miary wybranego kąta θ. W [5] jest jednak udowodnione, że jeżeli $\frac{\theta}{2\pi}$ jest niewymierna, to otrzymany w ten sposób ciąg jest nieokresowy i ma funkcję złożoności o żądanych wartościach.



Rys.8

Źródło: *Complex Systems*, edytowane przez E. Goles, S. Martinez, Wyd. Springer – Science+Business Media, B.V., 2001, ISBN 978-94-010-3817-1, str. 11-12

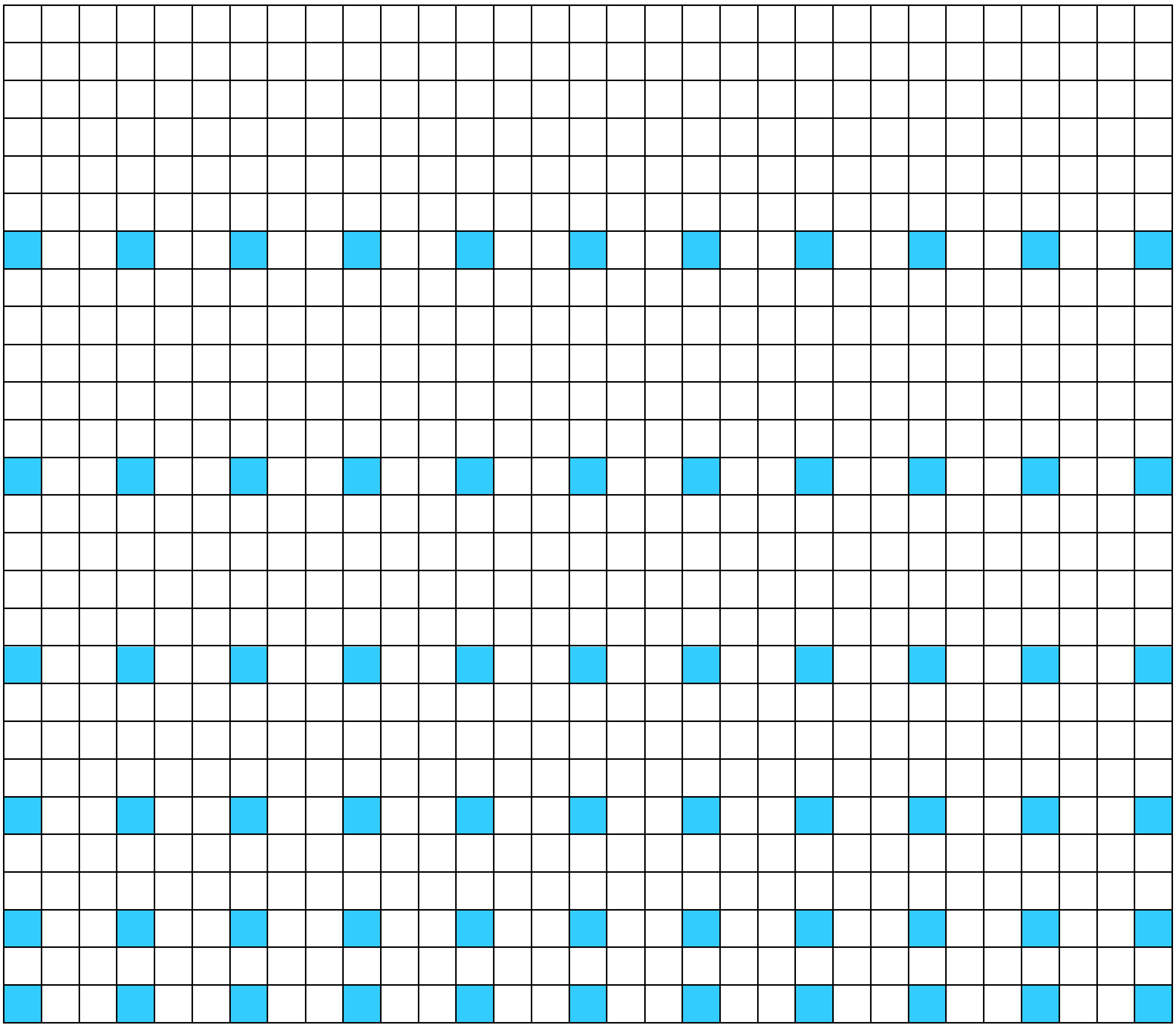
VIII. Ciągi nad $\mathbb{Z}^2$

Wyróżniamy dwa rodzaje okresowości nad $\mathbb{Z}^2$:

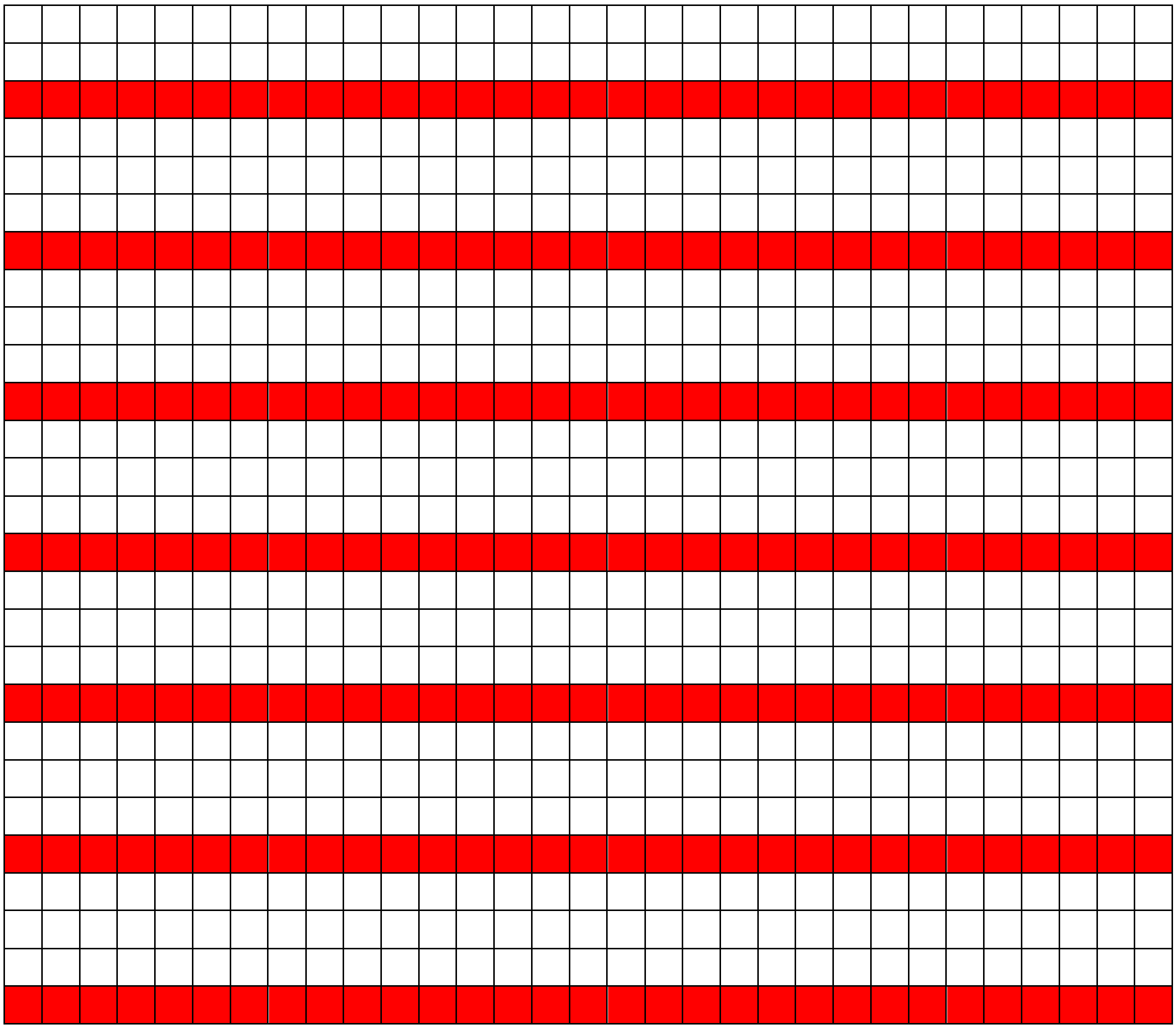
A. istnieją takie m, n, że dla każdego k, l zachodzi $\eta(k,l) = \eta(k+m, l+n)$
B. istnieje takie m, że dla każdego k, l zachodzi $\eta(k,l) = \eta(k+m, l)$
C. istnieje takie n, że dla każdego k, l zachodzi $\eta(k,l) = \eta(k, l+n)$

Jeżeli η spełnia własność B lub C, będziemy mówić, że η jest *okresowa*, a jeżeli η spełnia własność A, to wówczas η jest *zupełnie okresowa*.

Na Rys. 9 został przedstawiony przykładowy ciąg okresowy, a na Rys. 10 został przedstawiony ciąg zupełnie okresowy.



Rys. 9



Rys. 10

Jeżeli η jest zupełnie okresowa, to jest okresowa. Istnieją ciągi okresowe, które nie są zupełnie okresowe.

$R_\eta(n, k)$ jest to liczba możliwych konfiguracji nad zbiorem $\{(0, 0), (0, 1), \ldots, (0, k - 1), (1, 0), \ldots, (1, k - 1), (2, 0), \ldots, (2, k - 1), \ldots, (n - 1, 0), \ldots, (n - 1, k - 1)\}$, czyli liczba różnych prostokątów o wymiarach n x k na płaszczyźnie.

Twierdzenie 3

η jest zupełnie okresowa wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja złożoności R_η jest ograniczona.

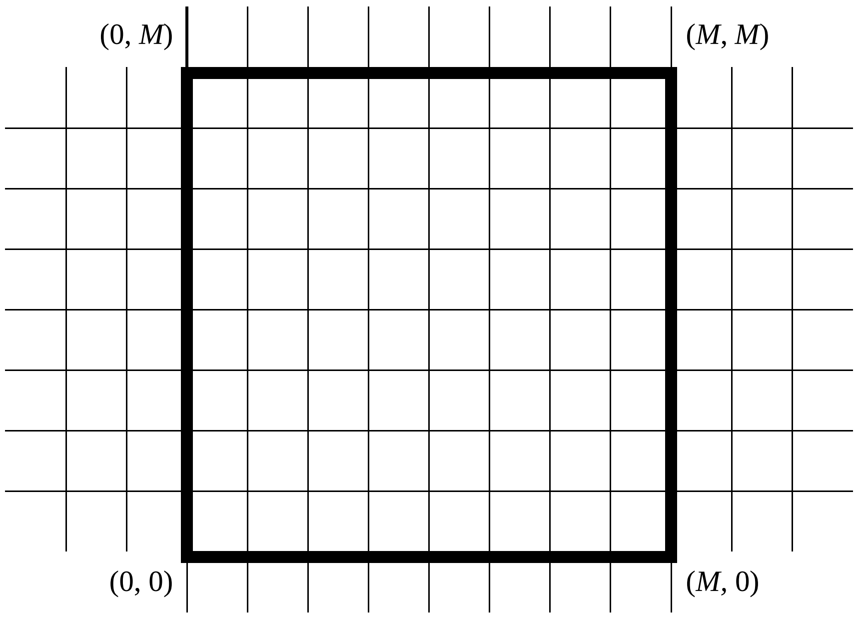
Dowód Twierdzenia 3

Jeżeli η jest zupełnie okresowa, to funkcja złożoności R_η jest ograniczona.

Załóżmy, że η jest zupełnie okresowa. Zauważmy, że jeżeli η jest zupełnie okresowa, to jest okresowa w wierszach i w kolumnach. Niech wspólnym okresem wszystkich wierszy będzie M, a wspólnym okresem wszystkich kolumn będzie N, wówczas $R_\eta \leq MN$, czyli R_η jest ograniczona.

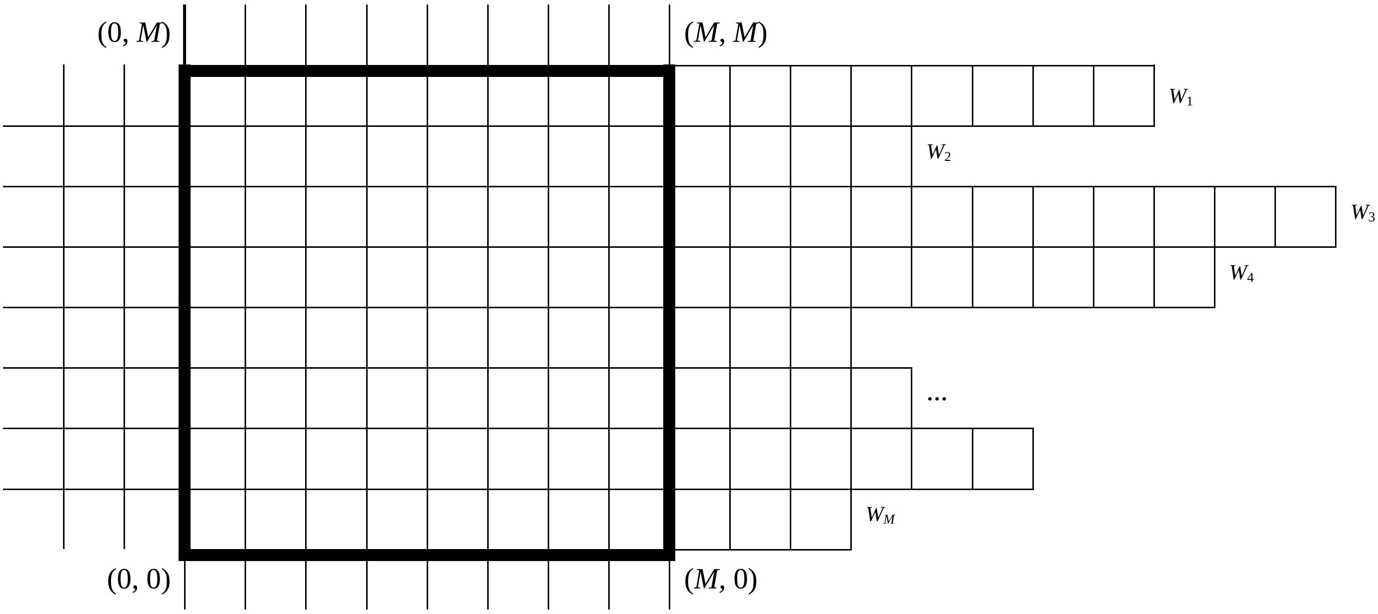
Jeżeli funkcja złożoności R_η jest ograniczona, to η jest zupełnie okresowa.

Załóżmy, że funkcja złożoności R_η jest ograniczona. Zatem funkcja złożoności w każdym wierszu jest ograniczona. Na mocy twierdzenia Morse'a – Hedlunda każdy wiersz jest okresowy. Mamy dany kwadrat o boku M w η (Rys. 11).



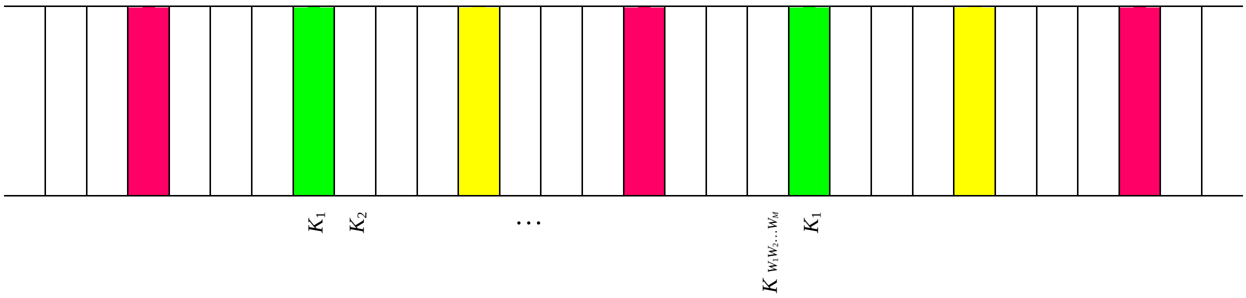
Rys. 11

Niech pierwszy wiersz będzie miał okres W_1, drugi wiersz będzie miał okres W_2, …, M – ty wiersz – okres W_M (Rys. 12).



Rys. 12

Wspólny okres wszystkich wierszy to $W_1W_2\ldots W_M$. Mamy dany ciąg, w którym kolumny są długości M. Z dowodu twierdzenia Morse'a – Hedlunda wynika, że każdą kolumnę długości M da się przedłużyć w jednoznaczny sposób (niepotrzebna jest do tego informacja, gdzie ta kolumna się znajduje). Niech pierwsza kolumna ma okres K_1, druga kolumna – okres K_2, …, $W_1W_2\ldots W_M$ – ta kolumna – okres $K_{W_1W_2\ldots W_M}$. Wiersze powtarzają się o okres $W_1W_2\ldots W_M$, więc kolumna nr $W_1W_2\ldots W_M+1$ będzie miała taki sam okres, jak kolumna nr 1, czyli K_1 (Rys. 13). Tak więc $K_1 * K_2 * \ldots * K_{W_1W_2\ldots W_M}$ jest wspólnym okresem wszystkich kolumn. Analogicznie można pokazać, że istnieje liczba W będąca okresem wszystkich wierszy. Zatem η jest zupełnie okresowa.



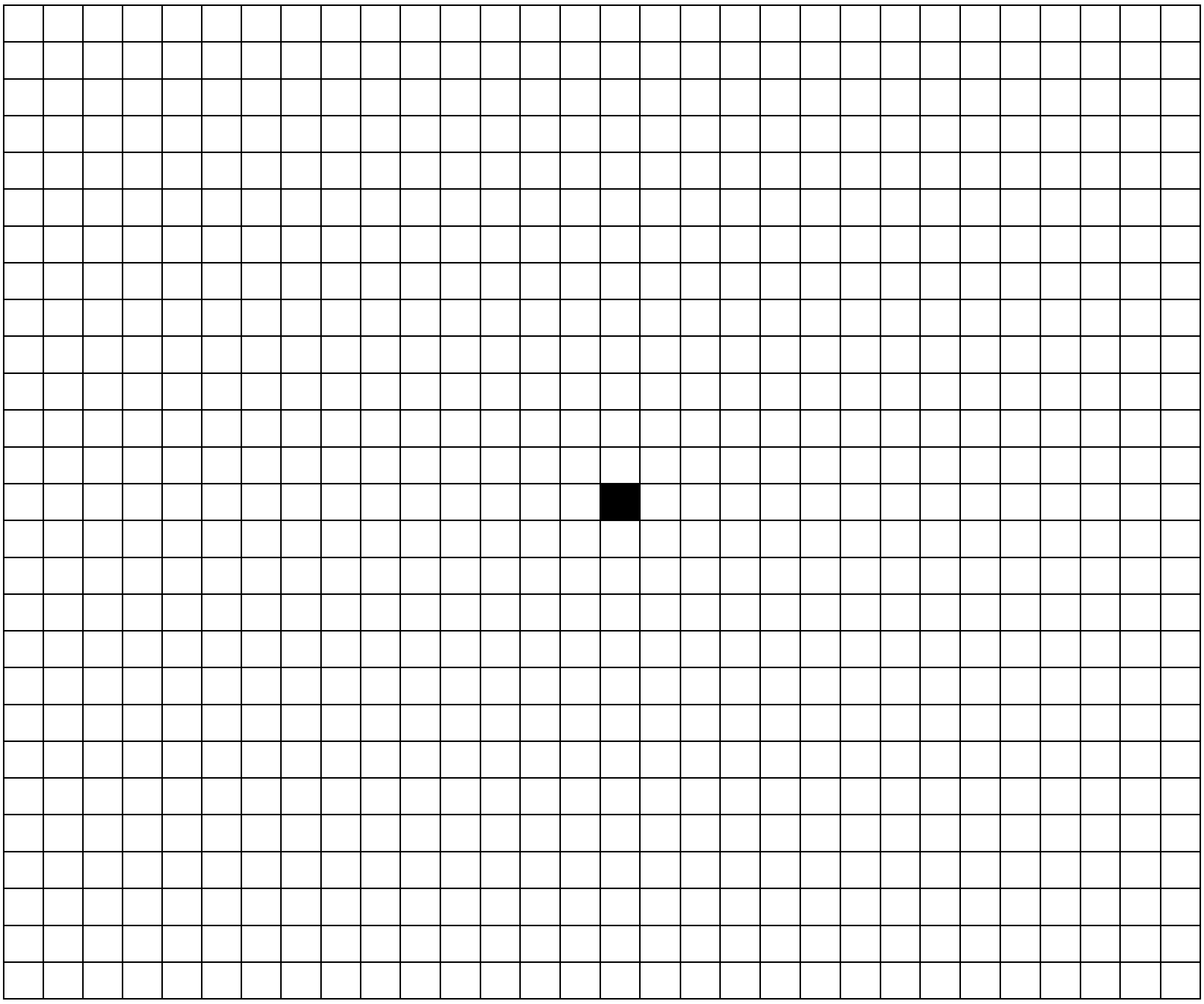
Rys. 13

IX. Hipoteza Nivata (1997 r.)

Hipoteza Nivata

Jeżeli istnieją takie n, k należące do liczb naturalnych, że $P_\eta(n, k) \leq nk$, to η jest okresowa.

Oszacowanie w hipotezie Nivata jest optymalne. Jeżeli zdefiniujemy η jako szachownicę, która na pozycji (0, 0) jest czarna, a wszystkie pozostałe pola ma białe, to η nie będzie okresowa, ale $R_\eta(n, k) = nk + 1$ dla każdego n, k (Rys. 14).



Rys. 14

Hipoteza Nivata nadal nie jest rozstrzygnięta, ale są znane pewne wyniki częściowe:

- W 2002 roku Sander i Tijdeman [1] pokazali, że jeżeli $R_\eta(2, n) \leq 2n$ lub $R_\eta(n, 2) \leq 2n$ dla pewnego n należącego do liczb naturalnych, to η jest okresowa.
- W 2003 roku Epifanio, Koskas i Mignosi [2] udowodnili, że jeżeli $R_\eta(n, k) \leq nk/144$ dla pewnych n, k należących do liczb naturalnych, to η jest okresowa.
- W 2004 roku Quas i Zamboni [3] wzmocnili powyższy wynik wykazując, że wystarczy założyć, że $R_\eta(n, k) \leq nk/16$ dla pewnych n, k należących do liczb naturalnych.
- Twierdzenie to zostało ponownie wzmocnione w 2012 roku przez Cyra i Krę [4], którzy dowiedli, że wystarczy założyć, że $R_\eta(n, k) \leq nk/2$ dla pewnych n, k należących do liczb naturalnych.

Bibliografia

1. J. W. Sander, R. Tijdeman, *The rectangle complexity of function on two-dimensional lattices.* Theoret. Comput. Sci. 270 (2002), no. 1-2, 857-863.
2. Ch. Epifanio, M. Koskas, F. Mignosi, Filippo, *On a conjecture on bidimensional words.* Theoret. Comput. Sci. 299 (2003), no. 1-3, 123-150.
3. A. Quas, L. Zamboni, *Periodicity and local complexity.* Theoret. Comput. Sci. 319 (2004), no. 1-3, 229-240.
4. C. Van, B. Kra, *Nonexpansive Z 2 – subdynamics and Nivat's conjecture.* Trans. Amer. Math. Soc. 367 (2015), no. 9, 6487-6537.
5. *Complex Systems*, edytowane przez E. Goles, S. Martinez, Wyd. Springer – Science+Business Media, B.V., 2001, ISBN 978-94-010-3817-1, str. 11-12
6. https://matheuscmss.wordpress.com/2013/01/27/nivat-conjecture-after-cyr-kra/ (dostęp: 21.10.2017 r.)