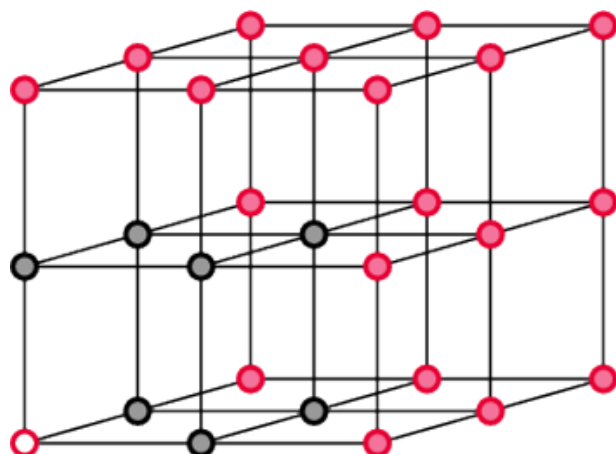


„LICZBY GEOMETRYCZNE”



**Krzysztof Kowalik
Kajetan Trzeźniewski
Klasa VI b**

Ogólnokształcąca Szkoła Muzyczna I stopnia w Krakowie

Opiekun: Joanna Zagórska

Spis treści:

1. Historia odkrycia liczb wielokątnych	str. 3
2. Liczby trójkątne	str. 4
3. Liczby kwadratowe	str. 6
4. Liczby pięciokątne	str. 8
5. Liczby sześciokątne koncentryczne	str. 10
6. Liczby piramidalne	str. 13
7. Wielościany	str. 16
8. Gra	str. 18
9. Zakończenie	str. 20
10. Źródła	str. 21
11. Opinia nauczyciela	str. 21

1. Historia odkrycia liczb wielokątnych.

Liczby geometryczne zostały poznane w starożytnej Grecji. Ich odkrywcami byli Pitagorejczycy, którzy wnieśli bardzo duży wkład w rozwój matematyki. Uważali oni, że liczby są niepodzielne i wyobrażali je sobie jako punkty, które tworzyły foremne figury geometrycznych. W ten sposób otrzymywali liczby trójkątne, czworokątne, pięciokątne (itd.) a nawet liczby piramidalne.

Wiedzę na temat liczb geometrycznych poszerzył Diofantos, który odkrył wiele prawidłowości rządzących tymi liczbami.

W późniejszych latach liczbami wielokątnymi zajmowali się inni sławni matematycy m.in. L. Euler, J. C. F. Gauss i A. Cauchy.



2. Liczby trójkątne

Liczba trójkątna, to liczba złożona z kulek (punktów), które muszą utworzyć trójkąt, przy czym każdy bok tego trójkąta musi mieć tą samą liczbę kulek (punktów). Trójkąty te tworzy się w następujący sposób: rysujemy jedną kulkę jako wierzchołek i poniżej rysujemy dwie kulki, potem trzy i w każdym kolejnym rzędzie o jedną więcej. Wygląda to tak:

o	$T_1 = 1$
o o	$T_2 = 3$
o o o	$T_3 = 6$
o o o o	$T_4 = 10$
.....	
n kulek	$T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$

Liczbę trójkątną oznaczamy literą T. Indeks dolny przy literze oznacza z ilu kulek zbudowany jest bok trójkąta.

Jak się można domyślić, piąta liczba trójkątna to 15.

Ale jak obliczyć np. 15 liczbę trójkątną?

Dodawanie do siebie kolejnych liczb byłoby czasochłonne.

Dlatego spróbujemy wyprowadzić wzór na obliczanie liczb trójkątnych.

Jeżeli trochę poprzekładamy kulki, to możemy utworzyć z nich trójkąt prostokątny. A jeżeli dołożymy do siebie dwa takie trójkąty to powstanie prostokąt o bokach n i $n+1$.



Połowa pola tego prostokąta to liczba T_n , czyli:

$$T_n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

Podobno wzór ten wymyślił młody Gauss, gdy nudził się na lekcji matematyki 😊.

Teraz już możemy wyliczyć $T_{15} = 15 \times 16 / 2 = 120$. Prawda, że proste?

Trójkąty można układać też na inne sposoby i badać zależności między nimi.

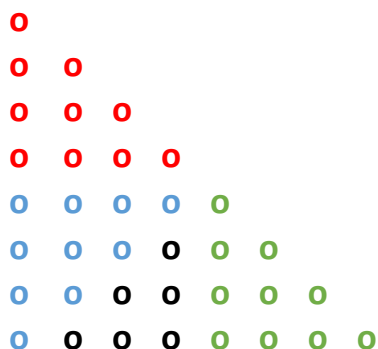
Spróbujmy zbudować kwadrat o boku n .



Pole takiego kwadratu zbudowane jest z 1 trójkąta o boku n i 1 trójkąta o boku $n - 1$. Można to zapisać następującym wzorem:

$$n^2 = T_n + T_{n-1}$$

Teraz spróbujmy ułożyć trójkąt o boku $2n$



Jak widzimy ten trójkąt jest zbudowany z 3 trójkątów o boku n i 1 trójkąta o boku $n - 1$. Można to zapisać następującym wzorem.

$$T_{2n} = 3T_n + T_{n-1}$$

Takich figur i zależności można budować o wiele więcej. I tak to robili średniowieczni matematycy.

Możemy zastosować je w praktyczny sposób, na przykład do wyliczenia ilości klocków lego potrzebnych do zbudowania piramidy o podstawie z n -klocków. Wystarczy znać prawidłowości i już nie trzeba się głowić, czy uda się dojść do szczytu.

3. Liczby kwadratowe

Liczby kwadratowe to liczby, które można graficznie przedstawić w postaci kwadratu. Na przykład liczba 4 to 4 kulki. Gdy umieścimy je odpowiednio to tworzą kwadrat (o boku 2):

o o
o o

Aby uzyskać następną liczbę kwadratową musimy dołożyć taką liczbę kulek, aby zbudować kwadrat o boku jedną kulkę większym (w tym przypadku o boku 3):

o o o
o o o
o o o

Powstała liczba kwadratowa to 9. Jest to kwadrat liczby 3.

Kolejna liczba kwadratowa to 16 czyli kwadrat liczby 4.

o o o o
o o o o
o o o o
o o o o

Wynika z tego, że liczby kwadratowe to druga potęga kolejnych liczb naturalnych:

$$k_1 = 1 \times 1 = 1$$

$$k_2 = 2 \times 2 = 4$$

$$k_3 = 3 \times 3 = 9$$

$$k_4 = 4 \times 4 = 16$$

$$k_5 = 5 \times 5 = 25$$

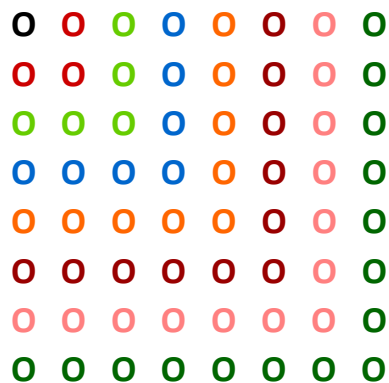
Tak wygląda wzór, za pomocą którego możemy znaleźć kolejne liczby kwadratowe:

$$k_n = n^2 \quad \text{gdzie: } k - \text{liczba kwadratowa,}$$

n- numer liczby

na przykład $k_{21} = 21^2 = 441$

Istnieje też druga metoda na znalezienie liczb kwadratowych - to dodawanie do siebie kolejnych partii kulek. W każdej kolejnej partii dodajemy o dwie kulki więcej niż w poprzedniej.



$$k_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)$$

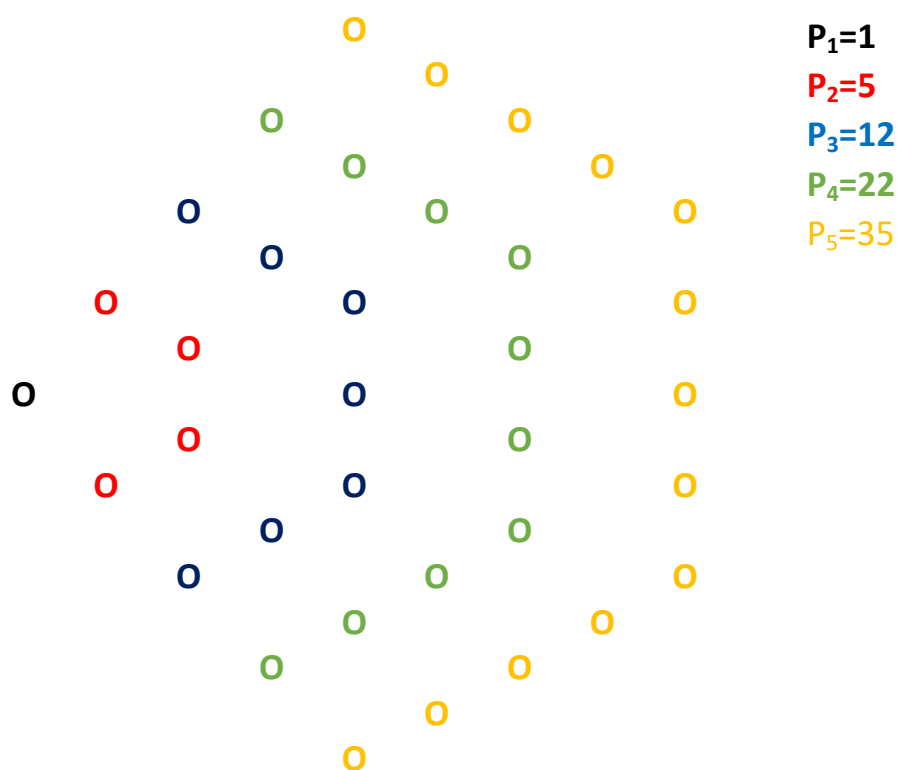
Liczby kwadratowe możemy wykorzystywać w praktyczny sposób, na przykład do zaplanowania jak optymalnie ułożyć owoce w zgrzewkach papierowych, czy jajka na kwadratowych paletach.

Można również pomagać sobie przy planowaniu układania płytek na posadzce.

4. Liczby pięciokątne

Liczby pięciokątne tworzone są na podobnej zasadzie co liczby trójkątne, czy liczby kwadratowe, poprzez dodawanie do siebie kolejnych partii kulek, przy czym w każdej partii dodajemy o 3 kulki więcej niż w poprzedniej partii.

Poniżej przedstawiam sposób tworzenia liczb pięciokątnych



$$P_5 = 1 + 4 + 7 + 10 + 13$$

Jak widzimy każda kolejna partia kulek składa się z 3 boków, każdy o tej samej liczbie kulek. Ponieważ dwie kulki stanowią wierzchołki i są wspólne dla dwóch boków należy je odjąć, żeby wyliczyć liczbę kulek w n-tej partii. Stąd mamy wzór:

$$P_n = 1 + 4 + 7 + 10 + \dots + (3n - 2)$$

Liczbę pięciokątną można wyliczyć również ze skomplikowanego wzoru:

$$P_n = [n \times (n - 1) \times (5 - 2)/2] + n$$

Przykładowo przedstawiamy wyliczenie dla piątej liczby pięciokątnej:

$$P_5 = 5 \times (5-1) \times (5-2) / 2 + 5 = 5 \times 4 \times 3 / 2 + 5 = 60/2 + 5 = 30 + 5 = 35$$

Wzór ten można zastosować do obliczenia każdej liczby wielokątnej, należy jedynie 5 zastąpić odpowiednią liczbą kątów.

$$k_n = n \times (n - 1) \times (k - 2)/2 + n$$

gdzie:

k – to liczba kątów wielokąta

n – to kolejna liczba wielokątna

Dla przykładu: czwarta liczba sześciokątna wynosi:

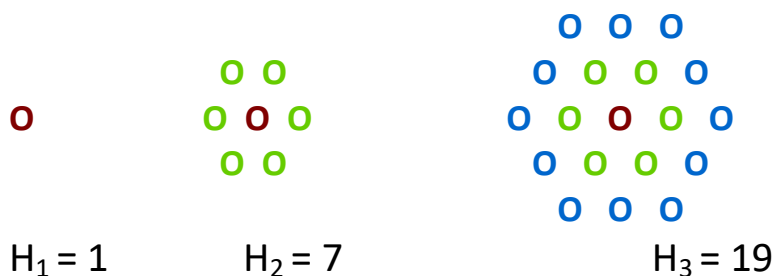
$$S_4 = 4 \times (4-1) \times (6-2)/2 + 4 = 4 \times 3 \times 4/2 + 4 = 12 \times 4/2 + 4 = 48/2 + 4 = 24 + 4 = 28$$

Wzór na liczbę wielokątną można również zapisać w następujący sposób:

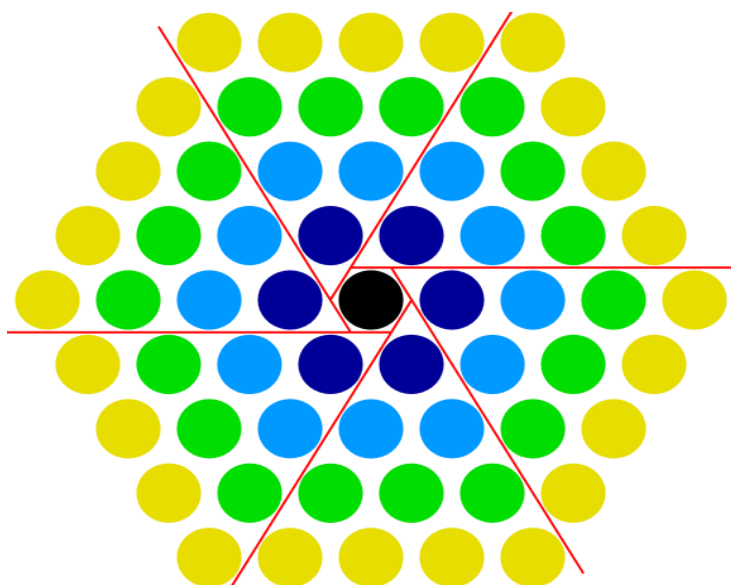
$$k_n = n \times \frac{(k - 2) \times (n - 1) + 2}{2}$$

5. Liczby sześciokątne koncentryczne

Liczby sześciokątne, to liczby tworzone według następującego wzorca: na początek malujemy jeden punkt w środku, a w każdym kolejnym ruchu domalowujemy dookoła kolejne kropki tak, by tworzyły one sześciokąt.



Oto wzór na kolejne liczby sześciokątne:



W centrum zawsze jest 1 kropka, a naokoło 6 identycznych segmentów, więc piszemy:

$$H_n = 1 + 6 \times [1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)]$$

Dla dużych liczb korzystanie z tego wzoru byłoby czasochłonne. Dla uproszczenia możemy użyć wcześniej prezentowanego wzoru na obliczanie liczb trójkątnych:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Jak widzimy na rysunku liczba sześciokątna składa się z jednej kulki w centrum i 6 identycznych liczb trójkątnych o boku $n-1$.

$$H_n = 1 + 6 \times T_{n-1} = 1 + 6 \times \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = 1 + 6 \times \frac{n(n-1)}{2}$$

Po przekształceniach otrzymujemy prosty wzór:

$$H_n = 1 + 6 \times \frac{n(n-1)}{2}$$

Tak więc:

$$H_1 = 1$$

$$H_2 = 7$$

$$H_3 = 19$$

$$H_4 = 37$$

$$H_5 = 61$$

$$H_6 = 91$$

$$H_7 = 127$$

$$H_8 = 169$$

$$H_9 = 217$$

$$H_{10} = 271$$

Ciekawostką jest, iż cyfry jedności w liczbach sześciokątnych powtarzają się według następującego schematu:

1-7-9-7-1-1-7-9-7-1...

Z kolei suma kolejnych liczb sześciokątnych od H_1 do H_n , to n^3 .

Na przykład:

dla $n = 3$:

$$1+7+19 = 3^3 = 27$$

dla $n = 5$:

$$1+7+19+37+61 = 5^3 = 125$$

Skoro suma kolejnych liczb sześciokątnych to n^3 , to znaczy, że różnica pomiędzy sześcianami dwóch kolejnych liczb naturalnych jest liczbą sześciokątną, na przykład:

dla liczb 1 i 2:

$$1^3 = 1$$

$$2^3 = 8$$

$$8 - 1 = 7 = H_2$$

dla liczb 4 i 5:

$$4^3 = 64$$

$$5^3 = 125$$

$$125 - 64 = 61 = H_2$$

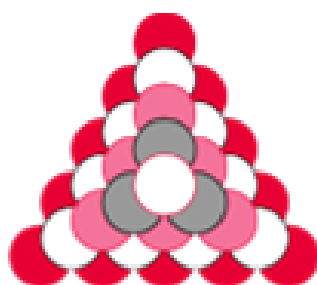
Znajomość liczb sześciokątnych można wykorzystać podczas pakowania walcowatych lub okrągłych w przekroju przedmiotów do pojemnika o podstawie koła. Na przykład kielbasek wejdzie do puszki 7 lub 19. Jeśli włożymy np. 12 to nie wykorzystamy całego miejsca.

Podobnie budując wiązki kabli najlepiej jest, aby ich ilość również była liczbą sześciokątną.

6. Liczby piramidalne

Liczby piramidalne, to liczby opisujące ilość kulek, z których można ułożyć piramidkę. Przedstawmy najmniejsze (>1) liczby piramidalne:

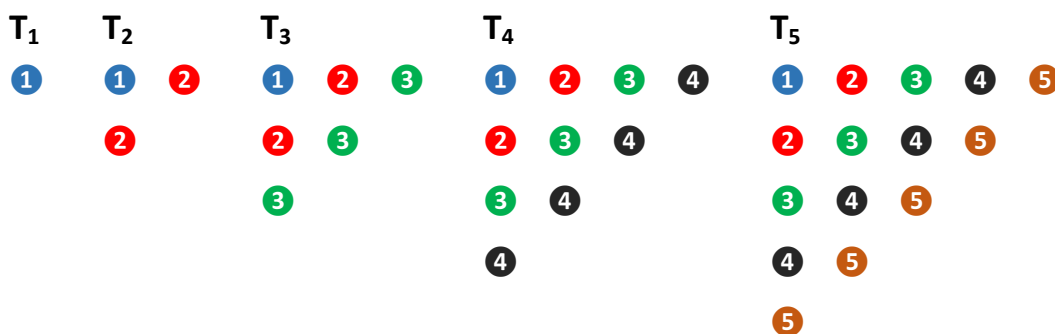
Trójkątna liczba piramidalna – składa się z trójkątnej podstawy zbudowanej z trzech kulek i z czwartej umieszczonej na środku podstawy. Aby zbudować kolejną piramidę, należy dołożyć podstawę zbudowaną z pięciu kulek. Zauważmy, że kolejne zwiększające się podstawy to liczby trójkątne. Wartość liczby piramidalnej można wyliczyć dodając do siebie kolejne liczby trójkątne:



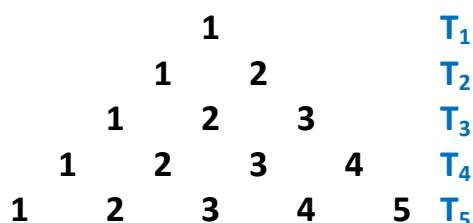
$$S_n = T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n \quad \text{gdzie: } n - \text{numer liczby,}$$

T_n – liczba trójkątna
 S_n – liczba piramidalna o podstawie trójkątnej

Jeżeli przyjrzymy się kolejnym podstawom to można zauważyć, że każda kolejna podstawa jest o n kulek większa:



Liczbę piramidalną o podstawie trójkąta można zapisać w również w takiej postaci:



Na tej podstawie można wyprowadzić jeszcze jeden wzór na liczbę piramidalną:

$$S_n = 1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \dots + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 1$$

W Wikipedii znaleźliśmy jeszcze wzór:

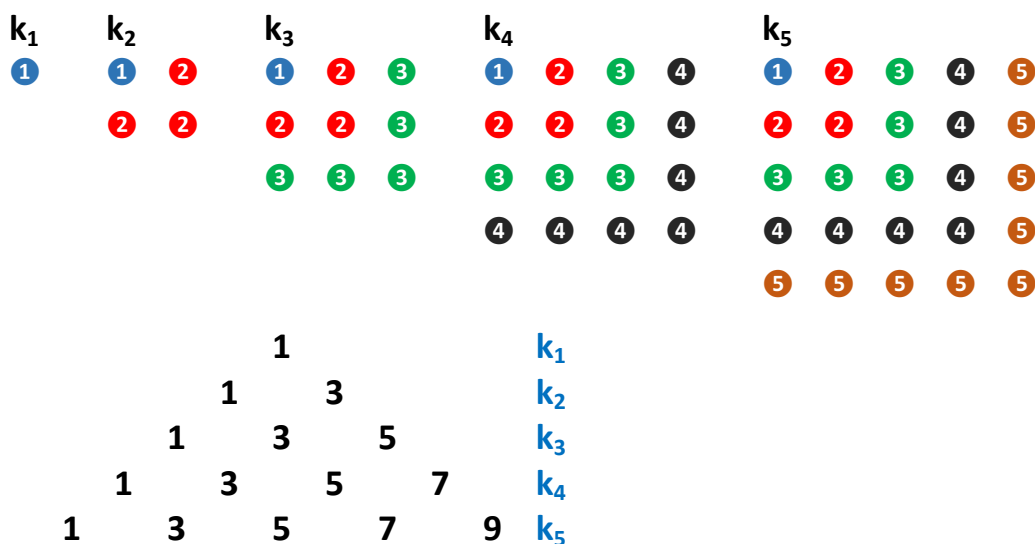
$$S_n = \frac{n \times (n+1) \times (n+2)}{6}$$

Czworokątna liczba piramidalna – ma czworokątną podstawę zbudowaną z 4 kulek i z piątej kulki leżącej na środku podstawy. Aby zbudować kolejną piramidę, należy dołożyć podstawę kwadratową zbudowaną z 9 kulek.

Każda kolejna piramida będzie miała jako podstawę kwadrat o boku o 1 kulkę dłuższym niż poprzednia piramida. Wynika z tego, że będą to kolejne liczby kwadratowe.



Liczby piramidalne o podstawie kwadratu można przedstawić w podobny sposób jak liczby piramidalne o podstawie trójkąta, przy czym w przypadku tych liczb, każdy kolejny rząd podstawy będzie się zwiększał o dwie kulki:



Na tej podstawie możemy wyprowadzić wzór na liczbę piramidalną o podstawie kwadratu:

$$K_n = k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n$$

lub

$$K_n = 1*n + 3*(n-1) + 5*(n-2) + \dots + (n-2)*2 + n*1$$

lub wzór z Wikipedii:

$$K_n = \frac{(n^2+n) \times (2n+1)}{6}$$

Możliwe do zbudowania są jeszcze piramidy o podstawie pięciokąta – to pięciokątne liczby piramidalne.

Najmniejsza z nich, jak łatwo zgadnąć, składa się z sześciu kulek. Aby uzyskać kolejne, dokładamy podstawy zbudowane z kolejnych liczb pięciokątnych.



Dla liczb piramidalnych o podstawie pięciokąta możemy w podobny sposób wyprowadzać wzory.

W Wikipedii można znaleźć ogólny wzór na wyliczanie p-kątnej liczby piramidalnej:

$$P_n = \frac{n \times (n + 1) \times [(p - 2) \times (n - 1) + 3]}{6}$$

gdzie: P – kolejna liczba piramidalna o podstawie p-kątnej;

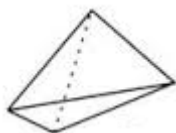
p – liczba kątów w podstawie piramidy

n – kolejna liczba

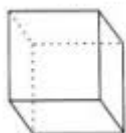
Wiedzę o liczbach piramidalnych i ich obliczaniu możemy wykorzystać tworząc budowle z klocków lego lub kulek magnesowych. Może wiedzę o tych liczbach posiadali już Egipcjanie budując piramidy??

7. Wielościany

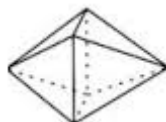
Istnieje wiele wielokątów foremnych na płaszczyźnie, ale w przestrzeni jest ich jedynie pięć.



czworościan
dwudziestościan



sześcian



ośmiościan



dwunastościan

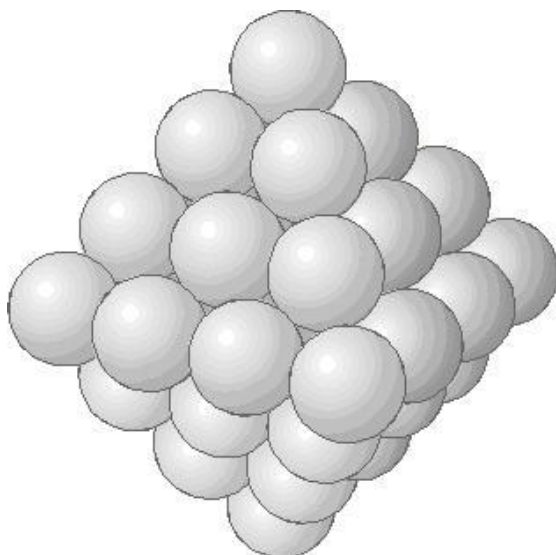
Jest ich tylko pięć, ale trudno jest dla nich określić ciąg kolejnych liczb. Z czworościanem, sześciannem i ośmiościanem można sobie poradzić ale z dwudziestościanem, czy nawet dwunastościanem jest już sporo problemów.

Jak można zauważyć czworościan jest jednocześnie liczbą piramidalną o podstawie trójkątnej i został omówiony w rozdziale wcześniejszym

Najprostszym do obliczania ciągiem jest sześcian, który jest zbudowany z liczb kwadratowych i jego ciąg możemy wyliczyć łatwo z wzoru:

$$S_n = n^3$$

Ciekawą liczbą wielościennej jest też ośmiościan - powstaje on z dwóch połączonych piramid – piramidy te są jednocześnie liczbami piramidalnymi o podstawie kwadratu K_n i K_{n-1}



Mając tą wiedzę, możemy wyprowadzić wzór na n -tą liczbę ośmiościenną:

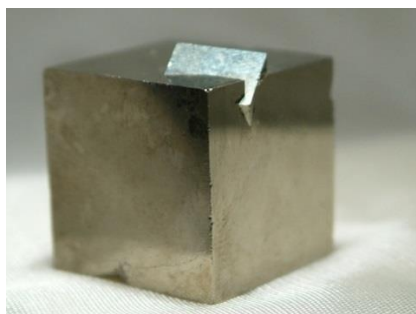
$$O_n = K_n + K_{n-1}$$

czyli:

$$O_n = n(2n^2 + 1)/3$$

Między liczbami przestrzennymi a liczbami wielokątnymi istnieje zależność. Liczby przestrzenne są zbudowane z figur, których ściany są wielokątami foremnymi, a jak już wiemy wielokąty foremne tworzą liczby wielokątne.

Ciekawostką jest, że wielościany nie tylko występują w matematyce ale także w przyrodzie kiedy różne substancje krystalizując się przybierają kształty np.:



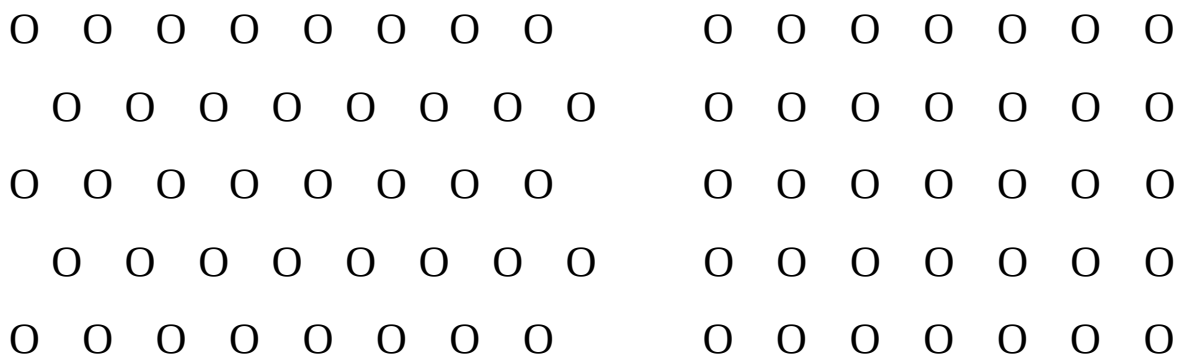
Piryt



8. Gra

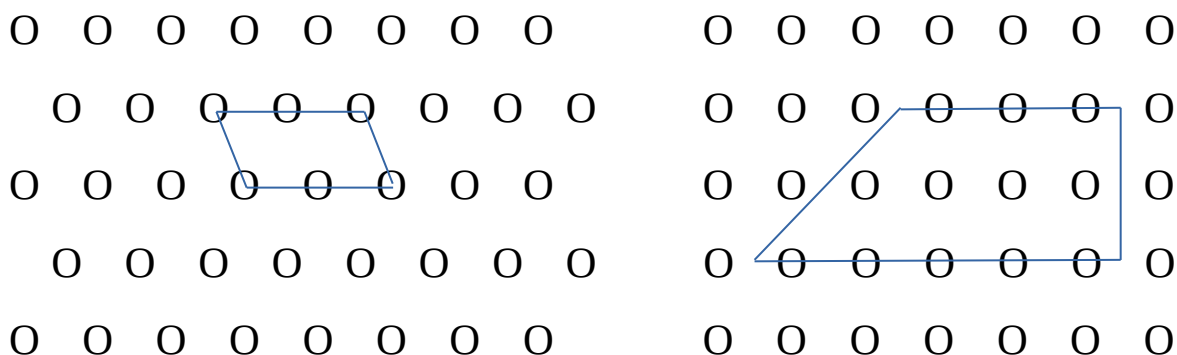
Postanowiliśmy wymyślić grę związaną z liczbami geometrycznymi. Polega ona na tym, że na narysowanej poniżej planszy należy narysować podany na czystej kartce rysunek w taki sposób, aby jego powierzchnię stanowiły tylko liczby geometryczne (pomijając liczbę jeden).

Są dwa rodzaje plansz:

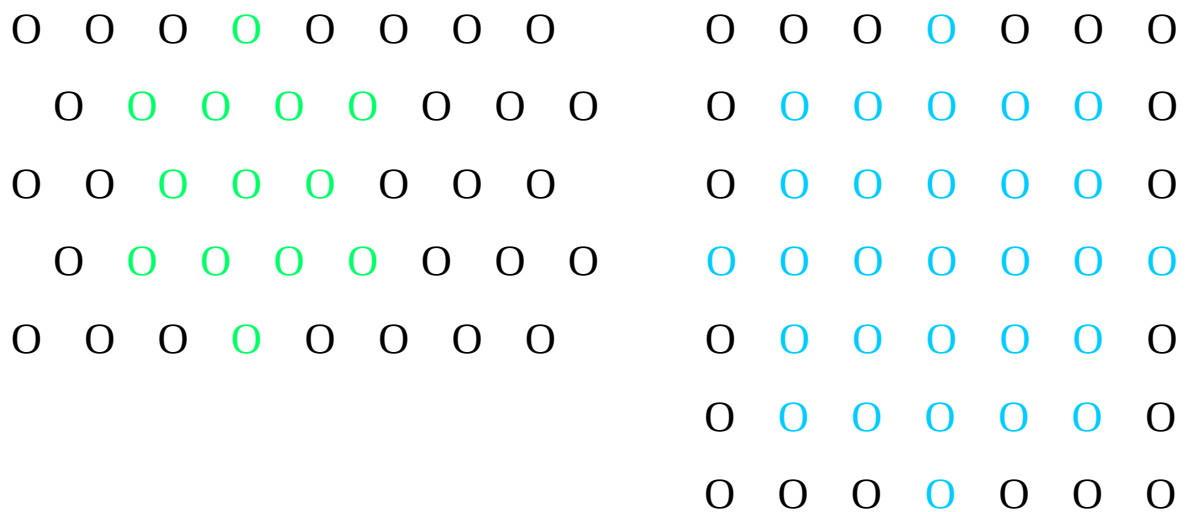


Na planszy należy łączyć ze sobą kolejne kropki. Jeśli w dobrej kolejności połączymy odpowiednie punkty powstanie obrazek.

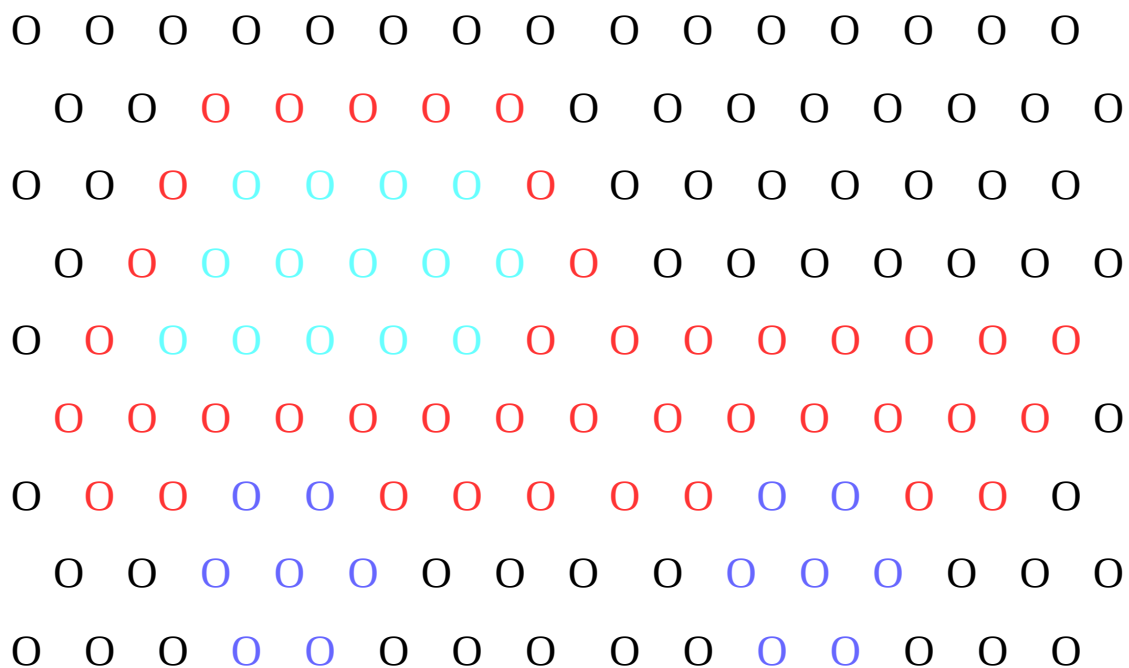
Na pierwszym poziomie trudności trzeba rysować różne figury geometryczne np. równoległobok albo trapez prostokątny, np.:



Na drugim poziomie należy przerysowywać różne proste kształty np. gwiazda.



Na ostatnim, trzecim poziomie trudności trzeba rysować bardziej skomplikowane przedmioty np. auto.



9. Zakończenie

W naszej pracy pokazaliśmy, jak ciekawy jest świat liczb, chociaż to dopiero początek odkrywania jego tajemnic. Poznawanie liczb wielokątnych i badanie zależności między tymi liczbami to doskonała zabawa i trening dla głowy.

Liczby geometryczne są mało znane, jednak ich wiedza o nich nieraz może się przydać w życiu codziennym, nawet kiedy bawisz się klockami lego.

Ciekawe, czy po przeczytaniu naszego referatu będziesz potrafił rozwiązać zadanie matematyczne:

Jaś zbudował z 55 pitek piramidę. Posiadała ona 5 pięter. Oblicz z ilu pitek zbudowana była podstawa i w jakim była kształcie!!!

10. Źródła:

1. http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/teoria_liczb/2011/08/30/Geometryczne_liczby/;
2. http://towarzystwo.edu.pl/assets/prace_matematyczne/2016_GimnSWRodziny_RZak.pdf;
3. <http://www.liczba.cba.pl/wielokatne.html>;
4. <http://www.tischner-wodzislaw.pl/images/mediaInamat/liczbywielokatne.pdf>;
5. <http://encyklopedia.pwn.pl/haslo/liczby-piramidalne;3932373.html>;
6. <http://matfiz24.pl/dzialania-liczbach/liczby-trojkatne-i-wielokatne>.

11. Opinia nauczyciela:

Kajetan i Krzysztof to uczniowie mający wiele zainteresowań, uzdolnieni muzycznie. Na lekcjach matematyki cechują się dużą pomysłowością i dociekliwością w rozwiązywaniu problemów.

Temat referatu zainteresował ich, bo jak stwierdzili, zaintrygowało ich połączenie arytmetyki z geometrią.

Joanna Zagórska