

N I E S K O Ń C Z O N O Ś Ć

Kacper Błachut, klasa Vc
Szkoła Podstawowa nr 5 im. Konfederacji Tatrzańskiej,
34-400 Nowy Targ, ul. Orkana 17

Dziękuję

Pani mgr inż. Małgorzacie Zawistowskiej-Grzybek – za inspirację

Koleżankom i Kolegom z klasy – za wypełnienie ankiety

Tacie – za pomoc

Mamie – za cierpliwość

Spis treści

1. Informacja nauczyciela	str. 4
2. Wstęp – dlaczego nieskończoność	str. 5
3. Historia pojęcia	str. 7
4. Rodzaje nieskończoności	str. 16
5. Arytmetyka nieskończoności	str. 19
6. Nieskończone szeregi liczbowe	str. 21
7. Ankieta	str. 24
8. Dowcipy o nieskończoności	str. 26
9. Cytaty	str. 27
10. Zakończenie	str. 28
11. Źródła	str. 29

Nowy Targ, 20.02.2017r.

INFORMACJA NAUCZYCIELA

Kacper jest uczniem piątej klasy. Wszystkie jego prace pisemne z matematyki wykonywane są bezbłędnie. Zadania dodatkowe o podwyższonym stopniu trudności zawsze rozwiązuje wzorowo.

W ramach „Ligi Matematycznej” (praca z uczniem zdolnym) Kacper systematycznie rozwiązuje wszystkie zadania.

Brał udział w różnych konkursach matematycznych:

- jako uczeń klasy czwartej uczestniczył w Małopolskim Konkursie Matematycznym i poradził sobie z wieloma zadaniami lepiej niż szóstoklasiści (na etapie szkolnym osiągnął 70% wiadomości i zajął II miejsce wyprzedzając szóstoklasistów)
- w konkursach matematycznych „Kangur” zawsze zajmuje bardzo wysokie lokaty i osiąga bardzo dobre wyniki.

Kacper ciągle stawia sobie nowe wyzwania i wyszukuje problemy do rozwiązania. Lubi pracować samodzielnie. Ma wiele pomysłów własnych na rozwiązywanie zadań, nie zawsze są one stereotypowe, potrafi dojść do rozwiązania różnymi metodami.

Pracę przedstawioną na konkurs wykonał samodzielnie, wykorzystując duże wiadomości i umiejętności które posiada. Opierał się na literaturze dołączonej do pracy.

Margonata Zawisłowska - Grybeł

Wstęp

Matematyką interesuję się odkąd pamiętam. Pierwsze oczywiście było zwykłe liczenie, potem dodawanie i odejmowanie, następnie mnożenie i dzielenie. Niby to oczywiste, dzieci właśnie w takiej kolejności uczą się liczb i działań na nich, ale ja to „zaliczyłem” jeszcze w przedszkolu. Moje zamięłowania rozwijał – jak tylko mógł – Tata. W czasie różnych wycieczek po górach (mieszkamy na Podhalu, więc do gór mamy naprawdę blisko) starał się odpowiadać na moje coraz to trudniejsze pytania. A to co to jest twierdzenie Pitagorasa, a to co to jest sinus i cosinus, a to jakie są jeszcze inne działania oprócz tych, które poznajemy w szkole (dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie) wiele innych. Część z odpowiedzi Taty zrozumiałem od razu, część wymagała kilku powtórzeń, a część nie rozumiem do tej pory ☹. Bardzo często – z braku kartki i długopisu (kto na wycieczki górskie bierze takie rzeczy) – wykorzystywaliśmy ułamany patyk i zaschnięte błoto, glinę czy śnieg. Tak było na przykład z funkcjami trygonometrycznymi. Pamiętam, że bardzo spodobało mi się działanie na liczbach o nazwie silnia (!). Jedyne (jakie znam) działanie jednoargumentowe.

Potem stało się coś dziwnego, zgłębianie zadań z matematyki przestało mnie cieszyć. O ile w klasach 1-4 rozwiązywałem zadania z zapałem, to teraz Rodzice musieli mi przypominać o zadaniach. Matematykę dalej lubię, ale – jakby to powiedzieć – znudziło mi się rozwiązywanie zadań (nawet jeżeli nie potrafię ich rozwiązać). Coś się stało (sam nie wiem co). Więc kiedy moja nauczycielka matematyki – Pani mgr inż. Małgorzata Zawistowska-Grzybek – zaproponowała mi, żebym wziął udział w Małopolskim Konkursie Prac Matematycznych organizowanych Centrum Młodzieży w Krakowie im. Dr. H. Jordana wraz z Krakowskim Młodzieżowym Towarzystwem Przyjaciół Nauk i Sztuk, nie byłem zachwycony. Ale gdy nauczycielka wytłumaczyła mi, że to nie jest rozwiązywanie zadań tylko pisanie pracy na wybrany przez siebie temat- szybko zmieniłem zdanie.

Zaczęło się wymyślanie tematu pracy. O czym by tu napisać?

– π , to musi być π – zawołałem. π to jedna z moich ulubionych liczb.

- *Praca o π już była!* – Tata ściągnął z sieci zestawienie prac z tematami z poprzednich lat i szybko sprowadził mnie na ziemię.

Szukałem dalej. To wcale nie jest takie proste. Jeżeli nie π to co? Zacząłem się zastanawiać. Tata kiedyś opowiadał mi o takim wzorze, gdzie występuje π . Jak to było? Mam:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

- *Kacper przecież oprócz tego, że umiesz nazwać elementy równania to nic na ten temat nie wiesz* – ostudził mój zapał Tata

To się nauczę! – nie dawałem za wygraną.

- *Niestety to chyba za trudne nawet dla ciebie* – stwierdził Tata – *takie rzeczy to chyba dopiero na studiach. To wymaga wiadomości z kilku dziedzin matematyki.*

Długo myślałem nad następnym tematem. Przewijało się na przykład: Szybkie liczenie w pamięci (temat chyba za prosty), fraktale (już było), automaty komórkowe, czyli np. gra Life (również było).

I tak męczyłem się prawie dwa miesiące.

- *Tato przecież to paradoks, jak tak dalej pójdzie to wymyślenie tematu zajmie mi więcej czasu niż samo napisanie pracy* – powiedziałem kiedyś zrezygnowany.

- *Tak to czasami bywa. W życiu pełno jest paradoksów, mniejszych czy większych* – odparł Tata
Coś zaczęło mi świtać w głowie. Miałem temat pracy na końcu języka ...

- *Mam! Tato, Mamo mam temat! Będę pisał o paradoksach i błędnych wyliczeniach!* – zawołałem -
Widziałem wiele filmików na YouTube, gdzie udowodniano np., że $0 = 1$, albo że

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -\frac{1}{12}$$

Rozkręcałem się coraz bardziej. - *To jest temat! Mam nawet już tytuł „Detektyw Math na tropie paradoksów i absurdów na YouTube”. Będę pokazywał, gdzie autorzy tych filmików popełniają błędy udowadniając, np. że $0 = 1$.*

Paradoksy i sofizmaty też już były – stwierdził po chwili Tata. – *Musisz wymyślić coś innego. Spróbuj wypisać wszystkie swoje propozycje, może znajdziesz jakiś punkt wspólny.*

Byłem załamany! Wszystko już było! Nic nie wymyślę. Muszę odpocząć kilka dni. Propozycji tematów było naprawdę dużo. Zobaczmy te najważniejsze, co może mieć wspólnego np. liczba π z sumą ciągu $1+2+3+4+5+ \dots$ i np. grą Życie? Moment, moment. Coś zaczęło mi świtać w głowie. π ma nieskończone rozwinięcie, a $1+2+3+ \dots$ to suma ciągu nieskończonego, a niektóre układy w grze w Życie nigdy się nie kończą. Czyli co ... Nigdy się nie kończą, czyli ... ciągną się w

N I E S K O Ń C Z O N O Ś Ć

Gdy zacząłem się przygotowywać do napisania pracy, zwróciłem uwagę, że w różnych pracach pojęcie nieskończoności traktowane jest w różny sposób. Kiedy czytałem o historii pojęcia często przeplatały się jakieś abstrakcyjne pojęcia nieskończoności aktualnej i potencjalnej – to niezbyt mnie pociągało. W większości prac nieskończoność była ściśle związana z tzw. teorią mnogości (co za nazwa!), czyli nauki o zbiorach – to również nie było zbyt interesujące. Już myślałem, że znowu będę musiał wymyślać nowy temat, kiedy w kilku opracowaniach znalazłem coś co mnie zainteresowało. Paradoksy i sofizmaty związane z tym pojęciem. Przede wszystkim porównywanie liczebności zbiorów (*Kto by pomyślał, że liczb naturalnych nie jest dwa razy więcej niż liczb parzystych – co więcej jest ich TYLE SAMO*). Ale też określanie sumy nieskończonych ciągów, na czele z moim ulubionym:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -\frac{1}{12}$$

Dlatego też w tej pracy skupiłem się przede wszystkim na tych dwóch zagadnieniach. Co nie znaczy, że nie będzie kompletnie nic o nauce o zbiorach (jeszcze raz ta teoria mnogości, eh). Pisząc o sumach ciągów nieskończonych specjalnie nie używam takich symboli jak $\sum_{n=1}^{\infty}$ czy też $\lim_{n \rightarrow \infty}$ dla mnie (przynajmniej na razie) są one mało intuicyjne.

Aby zobaczyć co na temat dużych liczb i nieskończoności mają do powiedzenia oprócz matematyków także zwykli ludzie (w tym wypadku moje koleżanki i koledzy z klasy, a także kilka osób

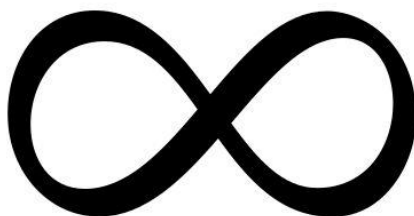
z klas równoległych) przeprowadziłem ankietę, której wyniki (dla mnie ciekawe) opisuję w jednym z ostatnich rozdziałów.

Historia Pojęcia

Kiedy pojawiło się pojęcie nieskończoności? Wieczność i nieskończoność fascynuje ludzi od zarania dziejów. Nieskończoność przez wieki była terminem bardziej filozoficznym niż matematycznym. Ale też od początku matematyki nieskończoność przewijała się w rozważaniach uczonych. W tamtych czasach ludzie obrazowali nieskończoność jako węża z ogonem w pysku, który pożera samego siebie i odradza się. Symbol ten nosił nazwę Uroboros.



Początkowo był on symbolem rzeki, jaka miała opływać Ziemię. Rzeka ta, nie miała mieć ani źródła, ani ujścia. Natomiast alchemicy traktowali Uroborosa jako symbol nieskończonego powtarzającego się cyklu przemiany materii. Dla nich był to również odpowiednik kamienia filozoficznego. Znak ten w postaci jaką znamy ją teraz (*lemniskata*)



został wprowadzony w XVII wieku przez angielskiego matematyka Johna Wallisa, jako reprezentację pojęcia matematycznego jakim jest nieskończoność

W starożytnej Grecji pojęcie nieskończoności nie było czymś dobrym, można powiedzieć, że nieskończoność była złem. Arystoteles¹ sądził, że bycie nieskończonym było brakiem, nie perfekcją.

¹ Arystoteles – filozof, jeden z trzech - obok Sokratesa i Platona - najślawniejszych filozofów starożytnej Grecji. Nazywany też po prostu Filozofem (wszystkie przypisy za pl.wikipedia.org)

Pitagorejczycy² pojęcie nieskończoności traktowali bardzo nieufnie. Nieskończoność była czymś negatywnym.

Uczniowie Pitagorasa nie mogli pojąć czegoś co nie ma końca (ani początku). Wskazywali liczne paradoksy i absurdy dotyczące nieskończoności. Powstał zbiór paradoksów przypisywanych Zenonowi z Elei³. Poniżej jeden z nich

Achilles i żółw: - Achilles i żółw stanęli w zawody, kto szybciej dobiegnie do mety. Achilles potrafi biegać dwukrotnie szybciej od żółwia, daje mu więc fory: pozwala mu startować z połowy dystansu. Zaczynają w tym samym momencie. Kiedy Achilles przebiega $\frac{1}{2}$ dystansu żółw jest już w $\frac{3}{4}$ drogi do mety. Gdy Achilles dobiegnie do tego miejsca żółw będzie znów dalej. I tak dalej w nieskończoność. Gdy dystans jest określony (niech wynosi S), a szybkość Achillesa wynosi v_1 , żółwia v_2 to można obliczyć, że żółw „dobiegnie” do mety po czasie $\frac{1}{2} S / v_2$, ale v_2 to dokładnie $\frac{1}{2} v_1$ a więc $\frac{1}{2} S / v_2 = \frac{1}{2} S / \frac{1}{2} v_1 = S / v_1$, a to jest czas po którym Achilles dobiegnie do mety.



Wniosek - Achilles nigdy nie przegoni żółwia, pomimo że potrafi biegać dwa razy szybciej od niego.

Galileusz⁴ opisał inny paradoks: Niektóre liczby są kwadratami innych liczb np.: 1, 4, 9 i 16, a niektóre nie są kwadratami, jak 2, 3, 5, 6, 7. Całość wszystkich liczb musi być większa niż całość kwadratów, ponieważ całość wszystkich liczb zawiera kwadraty i nie-kwadraty.

Mimo to dla każdej liczby możemy narysować wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między liczbą a jej kwadratem, na przykład:

1	2	3	4	5	...	n	...
↓	↓	↓	↓	↓		↓	
1	4	9	16	25	...	n^2	...

A zatem w rzeczywistości jest tyle samo kwadratów, ile liczb. Co stanowi sprzeczność, wcześniej stwierdziliśmy, że jest więcej liczb niż kwadratów. Wniosek Galileusza był taki, że o „mniejszości” i „większości” możemy mówić w odniesieniu do liczb. Natomiast jeżeli mówimy o nieskończoności pojęcia te nie mają żadnego sensu.

Pojęcie nieskończoności sprawiało także trudności nowożytnym matematykom. Także oni podawali różnego rodzaju paradoksy związane z tym pojęciem.

Większość sofizmatów⁵ wykazujących, że np. $0=1$ jest oparta o „ukryte” dzielenie przez 0. Można także znaleźć inne podejście oparte właśnie na paradoksie nieskończoności

² Pitagorejczycy - wyznawcy doktryny rozwiniętej przez Pitagorasa i jego następców w szkole religijno-filozoficznej, którą założył w Krotonie w Wielkiej Grecji, w południowych Włoszech.

³ Zenon z Elei - Był uczniem Parmenidesa i należał do szkoły eleatów z Elei.

⁴ Galileusz, wł. Galileo Galilei – włoski astronom, astrolog, matematyk, fizyk i filozof.

⁵ Sofizmat - zwodniczy "dowód" matematyczny, pozornie poprawny, lecz faktycznie błędny, zawierający rozmyślnie wprowadzony błąd logiczny, trudny do wykrycia na pierwszy rzut oka

$$\begin{aligned}
0 &= 0 + 0 + 0 + 0 + \dots \\
0 &= (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots \\
0 &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \\
0 &= 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \dots \\
0 &= 1 + 0 + 0 + 0 + \dots \\
0 &= 1
\end{aligned}$$

Ale możemy także postąpić inaczej.

$$\begin{aligned}
x &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \\
x &= 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots) \\
x &= 1 - x \\
2x &= 1 \\
x &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

A więc $0 = \frac{1}{2}$, ale też $1 = \frac{1}{2}$

$$0 = \frac{1}{2} = 1$$

To dopiero heca!!! Gdzie tu jest błąd? Wydaje się, że wszystko jest w porządku. Ale przecież nie może być w porządku!? W rzeczywistości ciąg $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ nie ma sumy – jest rozbieżny! Ale do tego matematycy doszli w XIX wieku, a szereg ten znany był dużo wcześniej.

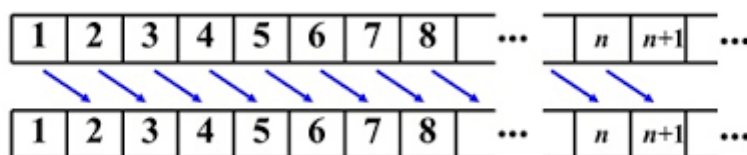
Oczywiście można także inaczej obalać powyższe równania np.

$$\begin{aligned}
0 &= (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots && \text{parzysta ilość elementów} \\
0 &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots && \text{nieparzysta ilość elementów} \\
0 &= 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \dots
\end{aligned}$$

Ale, ktoś może powiedzieć, że przy nieskończonej ilości elementów nie ma to znaczenia

Innym „nowożytnym” paradoksem związanym z nieskończonością jest tak zwany **Hotel Hilberta**⁶: Otóż hotel ten ma nieskończenie wiele pokoi, ponumerowanych 1, 2, 3, 4 itd. (wszystkie dodatnie liczby całkowite). Pewnego razu wszystkie miejsca w hotelu były zajęte, zjawił się podróżny i poprosił o pokój. W każdym hotelu ze skończoną liczbą pokoi gość odszedłby z niczym, a tu: – Nie ma problemu – powiedział kierownik. – Poproszę gościa z pokoju 1, żeby przeniósł się do pokoju 2, gościa z pokoju 2, żeby przeszedł do pokoju 3, osobę z pokoju 3 przeniesiemy do pokoju 4 itd. Osoba z pokoju n przeprowadzi się do pokoju n+1 itd. Wtedy pokój 1 się zwolni, więc będę mógł go dać panu.

⁶ David Hilbert (ur. 23 stycznia 1862 w Królewcu (Prusy Wschodnie), zm. 14 lutego 1943 w Getyndze) – matematyk niemiecki; zajmował się algebraiczną teorią liczb. D. Hilbert był profesorem uniwersytetu w Getyndze, jednego z najważniejszych wówczas ośrodków myśli matematycznej w świecie.

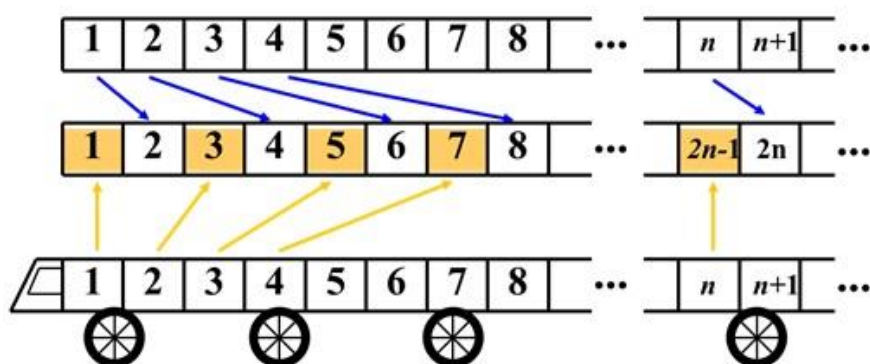


Przypisanie takie działa tylko w hotelu z nieskończoną liczbą pokoi, w innym nie - gdyż osoba w pokoju o najwyższym numerze nie ma dokąd się przenieść. Ale w hotelu Hilberta nie ma najwyższego numeru pokoju. Z podanego przykładu wynika także, że gdy do nieskończoności dodamy jeden (lub jakąkolwiek inną skończoną liczbę <o tyle pokoi się przesuwamy>) to otrzymamy także nieskończoność

$$\infty + 1 = \infty$$

Ale to nie wszystko. Tydzień później do tego samego hotelu (również wszystkie miejsca były zajęte) przyjechał autokar z nieskończenie wieloma pasażerami, siedzącymi na miejscach 1, 2, 3, 4...

Sprytny kierownik pomyślał chwilę i powiedział: Poproszę osobę z pokoju 1, żeby przeniosła się do pokoju 2, gościa z dwójki, żeby przeprowadził się do czwórki, tego z trójki przeniesiemy do szóstki itd. Osoba z pokoju n przeniesie się do pokoju $2n$. W ten sposób zwolnią się wszystkie pokoje z numerami nieparzystymi (będzie ich nieskończenie wiele), więc teraz pasażer z miejsca 1 w państwa autobusie może zająć pokój 1, osoba z miejsca 2 – pokój 3, ta z miejsca 3 – pokój 5 itd. Pasażer z miejsca n dostanie pokój $2n-1$.



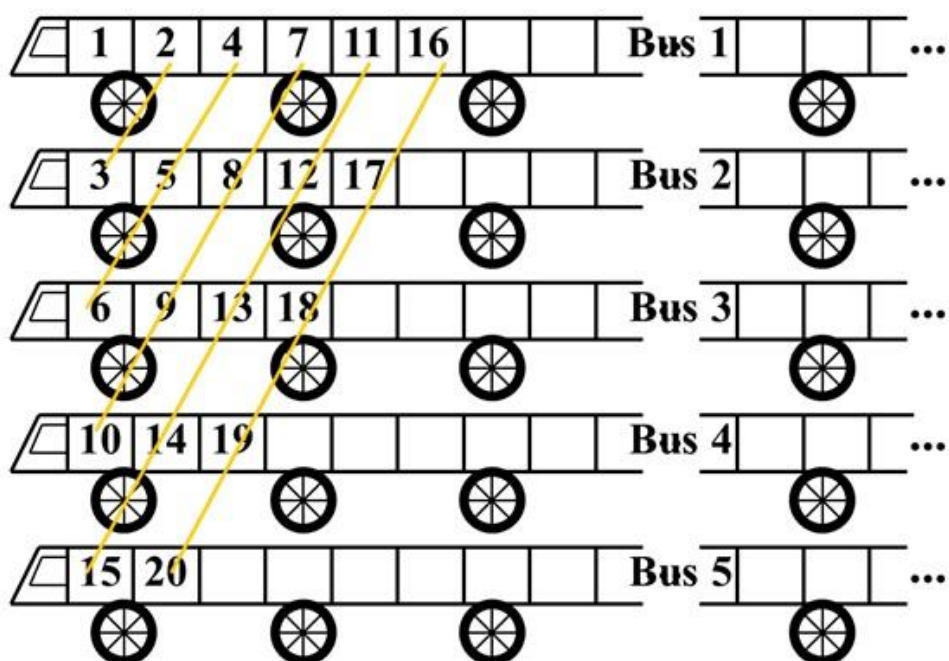
Wynika z tego, że gdy do nieskończoności dodamy nieskończoność to otrzymamy także nieskończoność

$$\infty + \infty = \infty$$

Na tym także się nie kończy. Miesiąc później do hotelu (oczywiście był kompletnie) przyjechało nieskończenie wiele autobusów, a w każdym z nich siedziało nieskończenie wielu pasażerów.

I znowu kierownik stanął na wysokości zadania. Sprowadził wszystko do poprzedniego problemu. Nakazał, aby z wszystkich autobusów pasażerowie przesiedli się do pierwszego. Jak?

Ustawmy wszystkie autobusy obok siebie i przenumeryjmy miejsca jak na poniższym rysunku.



Każdy pasażer w każdym z nieskończenie wielu autobusów dostaje nowy numer. Każdy numer występuje dokładnie raz. A więc można każdego pasażera na miejsce w autobusie 1, odpowiadające jego nowemu numerowi. I w ten sposób doszliśmy do problemu wcześniej już rozwiązanego z pełnym hotelem i jednym autobusem z nieskończoną ilością pasażerów.

Z powyższego przykładu wynika, że gdy nieskończoność pomnożymy przez nieskończoność to otrzymamy także nieskończoność

$$\infty \cdot \infty = \infty$$

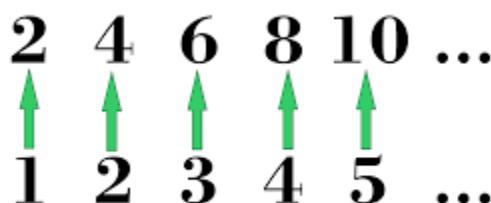
Jak policzyć nieskończoność? Nie da się – musielibyśmy mieć przecież nieskończoną ilość czasu (a i tak nie doszlibyśmy do końca). Matematycy mają jednak pewną sztuczkę na liczenie nieskończoności. Nie trzeba liczyć do nieskończoności wystarczy porównać ilość nieskończonej liczby elementów z inną nieskończonością. Na przykład, aby porównać liczbę krzeseł w klasie i uczniów, nie musimy ich liczyć (jeżeli byłoby ich nieskończenie wiele nie dalibyśmy rady), wystarczy kazać uczniom usiąść na krzesłach. Jeżeli żadne krzesło nie pozostanie puste i żaden uczeń nie będzie stał to znaczy, że jest ich tyle samo. I ten sposób będziemy wykorzystywać przy następnych przykładach.

Niektórzy z matematyków twierdzą, że pojęcie nieskończoności jest bardzo intuicyjne, ale intuicja w tym przypadku bywa także zwodnicza. Otóż przecucie podpowiada nam, że liczb parzystych i nieparzystych jest tyle samo. I tak właśnie jest. A czego jest więcej: wszystkich liczb parzystych czy wszystkich liczb naturalnych? I tu intuicja się myli (przypomnijmy sobie paradoks Galileusza), jesteśmy przekonani, że liczb naturalnych powinno być dwa razy więcej niż liczb parzystych (wszak liczby naturalne składają się z liczb parzystych i nieparzystych). A jednak tak nie jest. Liczb parzystych (nieparzystych) jest tak samo wiele jak liczb naturalnych (mówimy, że zbiór liczb parzystych

(nieparzystych) jest tak samo liczny jak zbiór liczb naturalnych). Jak to możliwe? Każdej liczbie naturalnej można nadać kolejność (numer kolejny)



Tak samo każdą liczbę parzystą można ponumerować (nadać kolejne numery):

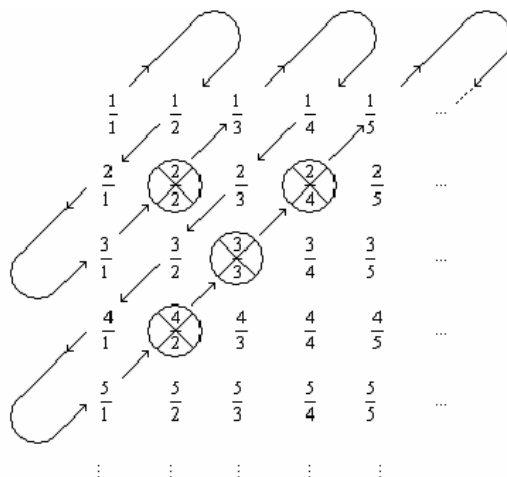


A skoro liczb naturalnych i liczb parzystych jest nieskończenie wiele to ich tyle samo. Każdej liczbie naturalnej n można przypisać liczbę parzystą $2n$. Tak samo można postąpić z liczbami całkowitymi, musimy tylko dodać liczby ujemne, dla których przyporządkowanie będzie następujące: każdej liczbie ujemnej $-n$ można przypisać liczbę $-2n$

Nie jest to jednak takie intuicyjne (przynajmniej dla mojej młodej głowy). Jak się później okaże także dla moich rówieśników jest to trudne do ogarnięcia. Tylko jedna osoba (3% badanych) odpowiedziała, że wszystkich liczb naturalnych jest tyle samo co wszystkich liczb parzystych. A pięć osób stwierdziło wręcz, że liczb parzystych jest więcej (może nie zrozumieli pytania?)

Idąc dalej, czego jest więcej liczb naturalnych, czy liczb wymiernych⁷? Przypomnijmy, że liczba wymierna to taka, która da się przedstawić w postaci ułamka p/q (gdzie p i q to liczby całkowite, a q jest różna od zera <nie można dzielić przez 0>). Uporządkujmy wszystkie liczby (dodatnie) wymierne w tabelce, jak poniżej:

⁷ Liczby wymierne – liczby, które można zapisać w postaci ilorazu dwóch liczb całkowitych, gdzie druga jest różna od zera. Są to więc liczby, które można przedstawić za pomocą ułamka zwykłego p/q gdzie p, q to liczby całkowite, a q dodatkowo jest różna od 0

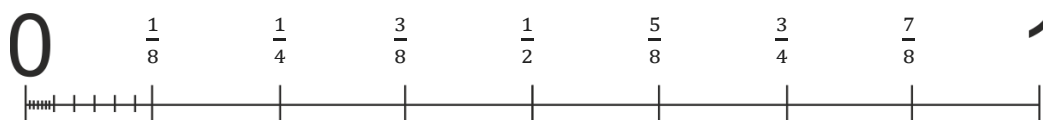


W pierwszym wierszu zapiszmy wszystkie liczby wymierne (w postaci ułamków) gdzie licznikiem jest 1: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$; w drugim liczby wymierne z licznikiem równym 2: $\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \dots$ a potem kolejno, $\frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \frac{3}{4}, \dots$ i tak dalej, dla n : $\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \frac{n}{4}, \dots$. Podobnie jak poprzednio spróbujemy każdej liczbie wymiernej nadać numer kolejny (tzn. policzyć liczby wymierne). Liczenie zaczniemy od lewego górnego rogu ($\frac{1}{1}$) i kontynuujemy tak jak pokazują strzałki (opuszczając wcześniej uwzględnione liczby – zaznaczone w kółeczkach - $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}$ – to to samo co $\frac{1}{1}$; $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$ to to samo co $\frac{1}{2}$ itd. W ten sposób możemy wyliczyć wszystkie liczby wymierne (każdą tylko raz):

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}, \dots$$

Jeżeli ustawiliśmy wszystkie liczby wymierne w ciąg jak wyżej tzn. możemy każdej z nich przypisać kolejną liczbę naturalną. A z tego wynika, że liczb wymiernych jest tyle samo co liczb naturalnych. W tym przykładzie rozważaliśmy tylko liczby dodatnie, ale podobnie jak w liczbach naturalnych i całkowitych, nie ma to znaczenia (liczb naturalnych, a więc dodatnich całkowitych, jest tyle samo co liczb całkowitych ujemnych, oraz tyle samo co wszystkich liczb całkowitych)

Jeżeli uzmyslowimy sobie, że pomiędzy dowolnymi kolejnymi liczbami naturalnymi (np. 0 i 1) jest nieskończenie wiele liczb wymiernych np. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots$



To dopiero teraz widzimy, jak intuicja wyprowadziła nas w pole ☺. Jak liczb wymiernych może być tyle samo co naturalnych jeżeli pomiędzy kolejnymi naturalnymi liczbami jest nieskończenie wiele liczb wymiernych. Przypomnijmy sobie tutaj ostatni przykład z hotelu Hilberta i wszystko będzie jasne.

Z podobnymi paradoksami możemy spotkać się w geometrii. Możemy na przykład porównywać ilość punktów zawartych w dwóch odcinkach o różnej długości (oczywiście tych punktów jest nieskończenie wiele). Jeżeli zbudujemy z nich trójkąt prostokątny, gdzie oba odcinki stanowią przyprostokątne.

1. *Journal of the American Medical Association*, 2000; 284: 2689-2695.



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99

1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2027, 2028, 2029, 2030, 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, 2036, 2037, 2038, 2039, 2040, 2041, 2042, 2043, 2044, 2045, 2046, 2047, 2048, 2049, 2050, 2051, 2052, 2053, 2054, 2055, 2056, 2057, 2058, 2059, 2060, 2061, 2062, 2063, 2064, 2065, 2066, 2067, 2068, 2069, 2070, 2071, 2072, 2073, 2074, 2075, 2076, 2077, 2078, 2079, 2080, 2081, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2087, 2088, 2089, 2090, 2091, 2092, 2093, 2094, 2095, 2096, 2097, 2098, 2099, 2100, 2101, 2102, 2103, 2104, 2105, 2106, 2107, 2108, 2109, 2110, 2111, 2112, 2113, 2114, 2115, 2116, 2117, 2118, 2119, 2120, 2121, 2122, 2123, 2124, 2125, 2126, 2127, 2128, 2129, 2130, 2131, 2132, 2133, 2134, 2135, 2136, 2137, 2138, 2139, 2140, 2141, 2142, 2143, 2144, 2145, 2146, 2147, 2148, 2149, 2150, 2151, 2152, 2153, 2154, 2155, 2156, 2157, 2158, 2159, 2160, 2161, 2162, 2163, 2164, 2165, 2166, 2167, 2168, 2169, 2170, 2171, 2172, 2173, 2174, 2175, 2176, 2177, 2178, 2179, 2180, 2181, 2182, 2183, 2184, 2185, 2186, 2187, 2188, 2189, 2190, 2191, 2192, 2193, 2194, 2195, 2196, 2197, 2198, 2199, 2200, 2201, 2202, 2203, 2204, 2205, 2206, 2207, 2208, 2209, 2210, 2211, 2212, 2213, 2214, 2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221, 2222, 2223, 2224, 2225, 2226, 2227, 2228, 2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235, 2236, 2237, 2238, 2239, 2240, 2241, 2242, 2243, 2244, 2245, 2246, 2247, 2248, 2249, 2250, 2251, 2252, 2253, 2254, 2255, 2256, 2257, 2258, 2259, 2260, 2261, 2262, 2263, 2264, 2265, 2266, 2267, 2268, 2269, 2270, 2271, 2272, 2273, 2274, 2275, 2276, 2277, 2278, 2279, 2280, 2281, 2282, 2283, 2284, 2285, 2286, 2287, 2288, 2289, 2290, 2291, 2292, 2293, 2294, 2295, 2296, 2297, 2298, 2299, 2300, 2301, 2302, 2303, 2304, 2305, 2306, 2307, 2308, 2309, 2310, 2311, 2312, 2313, 2314, 2315, 2316, 2317, 2318, 2319, 2320, 2321, 2322, 2323, 2324, 2325, 2326, 2327, 2328, 2329, 2330, 2331, 2332, 2333, 2334, 2335, 2336, 2337, 2338, 2339, 2340, 2341, 2342, 2343, 2344, 2345, 2346, 2347, 2348, 2349, 2350, 2351, 2352, 2353, 2354, 2355, 2356, 2357, 2358, 2359, 2360, 2361, 2362, 2363, 2364, 2365, 2366, 2367, 2368, 2369, 2370, 2371, 2372, 2373, 2374, 2375, 2376, 2377, 2378, 2379, 2380, 2381, 2382, 2383, 2384, 2385, 2386, 2387, 2388, 2389, 2390, 2391, 2392, 2393, 2394, 2395, 2396, 2397, 2398, 2399, 2400, 2401, 2402, 2403, 2404, 2405, 2406, 2407, 2408, 2409, 2410, 2411, 2412, 2413, 2414, 2415, 2416, 2417, 2418, 2419, 2420, 2421, 2422, 2423, 2424, 2425, 2426, 2427, 2428, 2429, 2430, 2431, 2432, 2433, 2434, 2435, 2436, 2437, 2438, 2439, 2440, 2441, 2442, 2443, 2444, 2445, 2446, 2447, 2448, 2449, 2450, 2451, 2452, 2453, 2454, 2455, 2456, 2457, 2458, 2459, 2460, 2461, 2462, 2463, 2464, 2465, 2466, 2467, 2468, 2469, 2470, 2471, 2472, 2473, 2474, 2475, 2476, 2477, 2478, 2479, 2480, 2481, 2482, 2483, 2484, 2485, 2486, 2487, 2488, 2489, 2490, 2491, 2492, 2493, 2494, 2495, 2496, 2497, 2498, 2499, 2500, 2501, 2502, 2503, 2504, 2505, 2506, 2507, 2508, 2509, 2510, 2511, 2512, 2513, 2514, 2515, 2516, 2517, 2518, 2519, 2520, 2521, 2522, 2523, 2524, 2525, 2526, 2527, 2528, 2529, 2530, 2531, 2532, 2533, 2534, 2535, 2536, 2537, 2538, 2539, 2540, 2541, 2542, 2543, 2544, 2545, 2546, 2547, 2548, 2549, 2550, 2551, 2552, 2553, 2554, 2555, 2556, 2557, 2558, 2559, 2560, 2561, 2562, 2563, 2564, 2565, 2566, 2567, 2568, 2569, 2570, 2571, 2572, 2573, 2574, 2575, 2576, 2577, 2578, 2579, 2580, 2581, 2582, 2583, 2584, 2585, 2586, 2587, 2588, 2589, 2590, 2591, 2592, 2593, 2594, 2595, 2596, 2597, 2598, 2599, 2600, 2601, 2602, 2603, 2604, 2605, 2606, 2607, 2608, 2609, 2610, 2611, 2612, 2613, 2614, 2615, 2616, 2617, 2618, 2619, 2620, 2621, 2622, 2623, 2624, 2625, 2626, 2627, 2628, 2629, 2630, 2631, 2632, 2633, 2634, 2635, 2636, 2637, 2638, 2639, 2640, 2641, 2642, 2643, 2644, 2645, 2646, 2647, 2648, 2649, 2650, 2651, 2652, 2653, 2654, 2655, 2656, 2657, 2658, 2659, 2660, 2661, 2662, 2663, 2664, 2665, 2666, 2667, 2668, 2669, 2670, 2671, 2672, 2673, 2674, 2675, 2676, 2677, 2678, 26

1 9 9 7

10

.....

liczby amerykański matematyk Edward Kasner - przedstawiał różnicę między niewyobrażalnie wielką liczbą a nieskończonością. Mamy też jeszcze większą nazwaną liczbę jest to googolplex:

$$10^{10^{100}}$$

Czyli 10 do potęgi googol. Przyjmuje się, że tak dużej liczby tej nie da się zapisać, gdyż liczba jej cyfr jest większa niż liczba atomów we wszechświecie.

Największą nazwaną liczbą jest tak zwana liczba Grahama (nie będę tu przytaczał jej definicji) co do której nie wiemy nawet jaka jest jej pierwsza cyfra. Jest ona tak ogromna, że znamy tylko pewną ilość jej końcowych cyfr (ostatnia cyfra to 7).

Tak nawiasem mówiąc z mojej ankiety wynika, że nikt z moich koleżanek i kolegów nie zna nazw tych naprawdę wielkich liczb ☹.

Ale wszystkie te wymyślne liczby nawet największe są niczym w obliczu nieskończoności. Matematykom, jak się wydaje, nieskończoność potrzebna jest jak powietrze. Jeżeli bowiem będziemy dodawać do siebie coraz mniejsze liczby to przy skończonej ich ilości matematyków po prostu policzyć ich sumę (wyrażenie jest skończone – nawet jeżeli bardzo wielkie)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{2^{googol}} =$$

Co natomiast będzie, jeżeli do obliczenia mamy wyrażenie nieskończone?

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \dots = 2$$

Tego już nie można bezpośrednio policzyć to trzeba **udowodnić**.

Rodzaje nieskończoności

Z przykładów podanych w poprzednim rozdziale wynika, że zbiór liczb naturalnych jest nieskończony. Ale zbiór liczb całkowitych, parzystych, nieparzystych, ba nawet zbiór liczb wymiernych jest „tak samo nieskończony” (równoliczny) jak zbiór liczb naturalnych. Czyżby nieskończoność była jedna? Na „zdrowy rozsądek” tak. Nieskończoność to nieskończoność i tyle. Otóż nic bardziej mylnego. Nieskończoności jest wiele, co więcej: nieskończoności jest nieskończenie wiele. Uff nic dziwnego, że matematycy zajmujący się tym pojęciem często lądowali w szpitalu dla „bardzo, bardzo nerwowo chorych”.

Georg Cantor⁸ był wykładowcą na uniwersytecie w Wittenbergu w Niemczech. Doszedł on do wniosku, że nieskończoności może być wiele, czyli może ona mieć różne wielkości. Początkowo określano tę ideę jako „zaburzenie, perwersyjną chorobę, z której pewnego dnia matematyka się wyleczy”, natomiast samego matematyka, nazywano szarlatanem. Cantor przeżył załamanie nerwowe (jedno z wielu) i trafił do szpitala psychiatrycznego. Jednak jego pomysł okazał się rewolucyjny i rewelacyjny, wreszcie ktoś „opisał” nieskończoność. Niemiecki matematyk w zupełnie inny sposób niż do tej pory spoglądał na pojęcie nieskończoności. Nie zajmował się pojedynczymi liczbami, a kolekcjami liczb, które nazwał zbiorami. Ilość elementów kolekcji nazwał mocą zbioru (np. zbiór liczb {1, 2, 3} ma moc 3 a {2, 4, 7, 9, 10, 11} ma 6). Wprowadził on także zupełnie nowy symbol na nieskończoność:



Alef – pierwsza litera alfabetu hebrajskiego (Cantor miał żydowskie korzenie)

A skoro nieskończoności jest wiele zaczął je także numerować. Pierwszą („najmniejszą” nieskończonością była $\aleph_0$ (alef zero) i oznaczała ilość liczb naturalnych (moc zbioru liczb naturalnych), a więc także ilość liczb parzystych, nieparzystych, kwadratów liczb (paradoks Galileusza), czy liczb wymiernych. Jak wcześniej pisałem wszystkie te nieskończoności można „policzyć” (ustawić w szereg i przypisać każdemu elementowi kolejne liczby naturalne). Stąd też $\aleph_0$ zwane jest także nieskończonością policzalną (przeliczalną)

A teraz spróbujmy znaleźć inną niż $\aleph_0$ nieskończoność. Cantor określił $\aleph_0$ jako najmniejszą nieskończoność więc każda inna będzie od niej większa. Poszukajmy jej. Analizowaliśmy już liczby naturalne, całkowite i wymierne. Weźmy teraz „na warsztat” zbiór liczb rzeczywistych⁹. W przypadku liczb wymiernych stwierdziliśmy, że nawet pomiędzy dowolnymi kolejnymi liczbami naturalnymi (np. 0 i 1) jest nieskończenie wiele liczb wymiernych (a dokładnie $\aleph_0$ liczb wymiernych). Przyjrzyjmy się teraz podobnemu przedziałowi (od 0 do 1), ale w odniesieniu do liczb rzeczywistych. W tym przypadku nie będziemy korzystać z ułamków (jak przy liczbach wymiernych), gdyż nie wszystkie liczby rzeczywiste da

⁸Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor niemiecki matematyk - miał znaczący udział w tworzeniu podwalin nowoczesnej matematyki. W szczególności uchodzi za twórcę teorii mnogości.

⁹Liczby rzeczywiste – rozszerzenie zbioru liczb wymiernych (jako przestrzeni metrycznej) do przestrzeni zupełnej. Składa się ze zbioru liczb wymiernych i niewymiernych

się w ten sposób przedstawić. Będziemy korzystać z rozwinięć dziesiętnych liczb pomiędzy 0 a 1 np. 0,56987456625...

Posłużę się tutaj przykładem hotelu Hilberta przedstawionym trochę wcześniej. W hotelu tym mamy nieskończoną liczbę pokoi – teraz już wiemy, że liczba pokoi wynosi dokładnie $\aleph_0$. W przeciwieństwie do poprzednich sytuacji przyjmijmy, że hotel jest pusty (właściwie to nic nie zmienia, ale tak jest ciekawiej) – wcześniej był pełny, a mimo to można było w nim zmieścić 1, 2, 5, 10, a nawet $\aleph_0$ dodatkowych gości. A teraz jest pusty i nie zmieścimy wszystkich. Do hotelu przychodzi tłum gości. Każdy z nich trzyma w ręku kartkę z numerem rezerwacji. Przyjmijmy, że nr rezerwacji to rozwinięcie dziesiętne jakiejś liczby pomiędzy 0 a 1. Oczywiście nie ma rezerwacji, które miałyby ten sam numer. Pierwszy gość pyta się kierownika (znamy tego geniusza z wcześniejszych przykładów) czy zmieści ich wszystkich w hotelu. Ten uśmiechnął się tylko i odpowiedział oczywiście (przecież poradził już sobie w innych trudnych sytuacjach). Po wcześniejszych doświadczeniach kierownik wiedział, że musi tylko „policzyć” wszystkich gości – i tak jak poprzednio – wtedy będzie mógł im przydzielić pokoje. Ale jak „policzyć” gości (numery rezerwacji) – czyli rozwinięcia dziesiętne wszystkich liczb pomiędzy 0 a 1? Otóż okazuje się, że tym razem kierownik sobie nie poradzi. Nie da się poukładać wszystkich rozwinięć dziesiętnych pomiędzy 0 a 1, tak abyśmy je mogli zapisać jako listę (czyli policzyć). Można pokazać, że dla każdej nieskończonej listy rozwinięć dziesiętnych liczb pomiędzy 0 a 1, zawsze znajdziemy liczbę (pomiędzy 0 a 1), która nie występuje w tej liście. A więc lista jest niepełna. Weźmy takie nr rezerwacji:

Nr pokoju	Nr rezerwacji
pokój nr 1	0,05687498 ...
pokój nr 2	0,36547892 ...
pokój nr 3	0,59874445 ...
pokój nr 4	0,00598425 ...
pokój nr 5	0,45666666 ...
pokój nr 6	0,95641236 ...
pokój nr 7	0,84522315 ...
pokój nr 8	0,22663399...
.....	

A teraz spróbujmy stworzyć liczbę według następującej metody: Oczywiście na pierwszym miejscu jest 0 (liczba musi być pomiędzy 0 a 1). Na pierwszym miejscu po przecinku jest pierwsza cyfra z nr rezerwacji do pokoju nr 1, na drugim jest druga cyfra z nr rezerwacji do pokoju nr 2 itd.

Nr pokoju	Nr rezerwacji
pokój nr 1	0, 0 56874987 ...
pokój nr 2	0,3 6 5478923 ...
pokój nr 3	0,59 8 744456 ...
pokój nr 4	0,005 9 84256 ...
pokój nr 5	0,45666 6 666 ...
pokój nr 6	0,956412 3 65 ...
pokój nr 7	0,8452231 5 9 ...
pokój nr 8	0,22663399 7 ...
.....	

Powstała nam liczba 0,06896359... . Teraz musimy jeszcze dodać np. 1 (może też być jakaś inna cyfra) do każdej cyfry po przecinku w powyższej liczbie (np. 1 stanie się 2, 5 – 6, a 9 – 0) A więc liczba, której szukamy to **0,17907460...** . Jest to numer rezerwacji, której na pewno nie było na naszej liście. Skąd możemy być tego pewni? Otóż nie jest to nr rezerwacji z pokoju nr 1, bo na pierwszym miejscu jest cyfra różna od pierwszej cyfry z rezerwacji pokoju nr 1 (dodaliśmy 1), nie jest to nr rezerwacji z pokoju 2, gdyż druga cyfra jest różna od drugiej cyfry w nr rezerwacji z tego pokoju (również dodaliśmy 1) itd. A więc znaleźliśmy taką liczbę pomiędzy 0 a 1, której nie było na naszej nieskończonej liście. Co więcej, nawet gdybyśmy tę nową liczbę dodali do naszej listy, to znowu korzystając z naszej metody możemy skonstruować następną liczbę, której znowu nie będzie na liście. I tak w ... nieskończoność. A więc kierownik, nawet gdyby się dwoił i troił, i tak nie jest w stanie stworzyć listy (czyli „policzyć”) wszystkich rezerwacji. A więc niestety nie jest w stanie zmieścić wszystkich tych gości w swoim nieskończonym hotelu. Hotel Hilberta, mimo że ma nieskończoną liczbę pokoi ($\aleph_0$) jest po prostu za mały, aby pomieścić wszystkich gości posiadających rezerwację z numerem podanym jako rozwinięcie dziesiętne liczb pomiędzy 0 a 1. Co z tego wynika? Otóż właśnie pokazaliśmy, że istnieje nieskończoność większa od $\aleph_0$. Niektóre nieskończoności „można policzyć” i są one przeliczalne i mają wielkość $\aleph_0$, a inne są nieprzeliczone i są większe od $\aleph_0$. Liczbę wszystkich liczb rzeczywistych Cantor nazwał continuum (lub też kolejną nieskończonością po $\aleph_0$ czyli $\aleph_1$)

Cantor dowiódł, że nieskończoności nieprzeliczone mogą mieć różną wielkość co więcej jest ich ... nieskończenie wiele.

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots < \aleph_k < \aleph_{k+1} \dots$$

Nieskończoności te nazywamy liczbami kardynalnymi.

Wróćmy jeszcze na chwilę do liczb wymiernych (tych z przykładu z kilku stron powyżej, a więc pomiędzy 0 a 1) – czyli do ułamków. Jest ich nieskończenie wiele. Liczb rzeczywistych pomiędzy 0 a 1 jest również nieskończenie wiele. Ale „ułamków” w porównaniu z liczbami rzeczywistymi jest bardzo, ale to bardzo mało. Można to wyobrazić sobie (oczywiście w dużym przybliżeniu) jako oś liczbową. Jeżeli będziemy tą oś oglądać np. pod mikroskopem w coraz to większym powiększeniu to ułamki będziemy widzieć jako pojedyncze punkty. Natomiast liczby rzeczywiste będą stanowiły ciągłość (stąd nazwa continuum), nawet gdybyśmy nie wiem jak powiększali to i tak nie zobaczymy pojedynczych punktów odpowiadających liczbom rzeczywistym (no chyba tylko te odpowiadające liczbom wymiernym, które także zaliczają się do liczb rzeczywistych).

Liczyby rzeczywiste, które nie są liczbami wymiernymi nazywamy, oczywiście liczbami niewymiernymi. Do liczb niewymiernych zaliczamy np. $\sqrt{2}$, π .

A czy liczby kardynalne zachowują się podobnie do np. liczb rzeczywistych. To znaczy, czy między dowolne dwie liczby kardynalne można wstawić jakąś liczbę kardynalną. Cantor sformułował hipotezę, że nie ma liczb kardynalnych pomiędzy $\aleph_0$ a $\aleph_1$ (czyli c) – zwana jest ona hipotezą continuum. Problem ten pozostał nierozwiązany. Dopiero wiele lat później wykazano, że hipotezy tej nie można ani dowieść, ani obalić. Znowu ciekawe rozwiązanie problemu z pojęciem nieskończoności.

Arytmetyka nieskończoności

Skoro jest więcej nieskończoności (i można je nazywać liczbami <kardynalnymi>) to może możemy próbować je dodawać, mnożyć. Otóż można. Zapiszmy działania, które „wyszły” nam przy rozważaniu hotelu Hilberta stosując oznaczenia wprowadzone przez Cantora.

Dodawanie nieskończoności plus dowolna liczba:

$$\aleph_0 + n = \aleph_0$$

gdzie n jest dowolną liczbą

Dodawanie dwóch nieskończoności (Alef zero)

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

Mnożenie dwóch nieskończoności (Alef zero)

$$\aleph_0 * \aleph_0 = \aleph_0$$

A co się stanie, jeżeli będziemy chcieli dodawać (mnożyć) dwie różne nieskończoności np. $\aleph_0$ i $\aleph_1$?

Otóż w wyniku dostaniemy zawsze „nieskończoność większą” – w tym przypadku $\aleph_1$

$$\aleph_0 + \aleph_1 = \aleph_1$$

lub

$$\aleph_0 * \aleph_1 = \aleph_1$$

To są najprostsze działania na nieskończonościach. Możemy jeszcze próbować podnosić nieskończoność do potęgi (albo jakąś skończoną liczbę podnosić do nieskończonej potęgi), możemy odejmować, dzielić. Ale nim przejdziemy do tego powinniśmy zapoznać się z definicją symbolu nieoznaczonego. Symbol bądź wyrażenie nieoznaczone – wyrażenie algebraiczne, które nie ma sensu liczbowego. Po co jest nam to potrzebne? Otóż niektóre działania na nieskończonościach nie mają sensu. Powróćmy teraz do ogólnego symbolu nieskończoności (∞), gdyż nie będzie nas już interesowało z jaką nieskończonością mamy do czynienia. Zastanówmy się na chwilę, ile to będzie $\infty - \infty$? Skoro $\infty + n = \infty$ dla dowolnego n to z tego równania możemy wywnioskować, że

$\infty - \infty = n$. A więc po odjęciu jednej nieskończoności od drugiej może nam wyjść cokolwiek. Może to być 0, ale również 1, a nawet 10, a może też $\frac{1}{2}$ albo π . A więc wynik działania algebraicznego może być dowolny. To może coś jest nie tak z samym wyrażeniem. Otóż takie wyrażenia nazywamy nieoznaczonymi. Zatem jakie mamy jeszcze inne symbole nieoznaczone?

$$\begin{array}{ccc} \infty - \infty & \frac{0}{0} & \frac{\infty}{\infty} \\ 0 * \infty & 0^0 & 1^\infty \\ \infty^0 & & \end{array}$$

Chociaż niektóre z tych symboli w pewnych działach matematyki nie są uznawane nieoznaczone. Na przykład w kombinatoryce $0^0 = 1$, a teorii miary $0 * \infty = 0$.

Od początku tej pracy widzimy, że pojęcie nieskończoności przysparza wielu trudności matematykom (i w ogóle uczonym). Tak też jest w przypadku działań arytmetycznych związanych z tym pojęciem.

Nieskończone szeregi liczbowe

Szereg liczbowy to konstrukcja umożliwiająca wykonanie dodawania składników szeregu. Szeregiem liczbowym nieskończonym nazywamy ciąg sum częściowych

$$\begin{aligned}S_1 &= a_1 \\S_2 &= a_1 + a_2 \\S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\&\dots \\S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n\end{aligned}$$

Liczby a_n nazywamy wyrazami szeregu, natomiast S_n to n -ta częściowa suma szeregu. Szereg nazywamy zbieżnym, gdy dla coraz większych n (n dąży do nieskończoności) możemy określić S_n jako konkretną liczbę. Natomiast jeżeli taka granica nie istnieje to szereg jest rozbieżny.

Weźmy na przykład szereg mający za kolejne wyrazy ułamki, gdzie w mianowniku mamy kolejne potęgi dwójki.

$$\frac{1}{2^n} \quad S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Jest to tak zwany ciąg geometryczny, gdzie każdy kolejny element uzyskujemy poprzez pomnożenie poprzedniego przez pewną stałą (zwaną ilorazem ciągu - q). W tym przypadku $q = \frac{1}{2}$.

Ciekawe jaki jest wynik tego nieskończonego dodawania. Z jednej strony nieskończone dodawanie intuicyjnie prowadzi nas do nieskończoności. Ale z drugiej strony składniki tego dodawania są coraz mniejsze (dążą do 0).

Spróbujmy rozwiązać to równanie. Na początek obie strony równania pomnożymy przez 2

$$\begin{aligned}2 \cdot S &= 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots\right) \\2 \cdot S &= 2 + \frac{2}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{8} + \frac{2}{16} + \dots \\2 \cdot S &= 2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right) \\2 \cdot S &= 2 + S \\S &= 2\end{aligned}$$

A więc suma (nieskończona) tego szeregu to 2. Jest to szereg geometryczny zbieżny. Okazuje się, że ciąg geometryczny jest zbieżny tylko wtedy, gdy jego iloraz zawiera się pomiędzy -1 i 1 ($-1 < q < 1$)

Oprócz ciągów geometrycznych są jeszcze np. ciągi arytmetyczne, gdzie każdy kolejny element uzyskujemy poprzez dodanie do poprzedniego pewnej stałej (zwanej różnicą ciągu - r). Po krótkim zastanowieniu widzimy, że z samej definicji wynika, że ciąg arytmetyczny nie może posiadać skończonej sumy w nieskończoności. Jeżeli $r = 0$ to mamy ciąg takich samych liczb np. 1 i wtedy

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots = \infty$$

Gdy $r > 0$ to mamy ciąg rosnący, gdzie każdy następny element jest większy od poprzedniego, a więc nie ciąg może być zbieżny. Przy $r < 0$ mamy sytuację podobną tylko po „drugiej stronie osi liczbowej” – każdy następny element jest mniejszy od poprzedniego (ale nie tak jak w

ciągu geometrycznym z $q < 1$, gdzie elementy dążą do zera). Tak więc ciąg arytmetyczny nie jest już tak ciekawy (dla mnie) jak ciąg geometryczny.

Temat ciągów i ich granic jest bardzo ciekawy, ale zajmę się tylko jednym: sumą wszystkich liczb naturalnych. Jakież było moje zdziwienie, gdy na YouTube znalazłem filmik gdzie udowadniają, że:

$$1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12}$$

Bardzo dziwne. Przecież ten ciąg powinien być rozbieżny. Kolejne wyrazy nie dość, że nie maleją to jeszcze rosną (w nieskończoność). A oto dowód:

$$\begin{aligned} \text{Weźmy, że } S_1 &= 1 + 2 + 3 + 4 + \dots \\ S_2 &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \\ S_3 &= 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Zacznijmy od } S_2 \qquad S_2 \\ S_2 &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - S_2 \\ S_2 &= 1 - S_2 \\ 2 S_2 &= 1 \\ S_2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

A teraz przejdźmy do S_3 i dodajmy do niego także S_3 w taki oto pisemny sposób:

$$\begin{aligned} S_3 + S_3 &= \begin{array}{l} 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots \\ + \quad 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots \end{array} \\ 2 S_3 &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \\ 2 S_3 &= \frac{1}{2} \\ S_3 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

A więc mamy już obliczone $S_2 = \frac{1}{2}$ oraz $S_3 = \frac{1}{4}$. Przejdźmy teraz do obliczania S_1
Obliczmy różnicę S_1 i S_3

$$\begin{aligned} S_1 - S_3 &= \begin{array}{l} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots \\ - (1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots) \end{array} \\ S_1 - S_3 &= \begin{array}{l} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots \\ -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - \dots \end{array} \\ S_1 - S_3 &= 0 + 4 + 0 + 8 + 0 + 12 + \dots = 4 + 8 + 12 + \dots \\ S_1 - S_3 &= 4 * (1 + 2 + 3 + \dots) \\ S_1 - S_3 &= 4 * S_1 \end{aligned}$$

A skoro $S_3 = \frac{1}{4}$ to mamy:

$$\begin{aligned} S_1 - \frac{1}{4} &= 4 * S_1 \\ -\frac{1}{4} &= 3 * S_1 \end{aligned}$$

A więc

$$S_1 = -\frac{1}{12}$$

Czyli

$$\mathbf{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -\frac{1}{12}}$$

Gdzie tu jest błąd? Bo chyba musi gdzieś być. Według mnie błąd zrobiliśmy przy obliczaniu sumy ciągu S_2 . Już wcześniej (na str. 7 i 8) pisałem o tym, że ciąg $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ nie jest zbieżny (nie można obliczyć jego sumy w nieskończoności). A skoro chociaż jedno z założeń tego „dowodu” jest błędne, to oczywiście możemy dojść do każdego wyniku nawet tak abstrakcyjnego jak równanie zapisane powyżej. Ale czy nie jest to *dowód* o niebo lepszy od tych spotykanych często w sieci, gdzie *pseudo-matematycy* udowadniają że np. $1 = 0$ korzystając z ukrytego dzielenia przez 0. Żeby obalić powyższe rozumowanie już trzeba choć trochę znać matematykę w ogóle, a pojęcie ciągów w szczególności.

Ankieta

Aby dowiedzieć się jaką wiedzę o pojęciu nieskończoności mają moi rówieśnicy przeprowadziłem ankietę wśród moich Koleżanek i Kolegów z mojej klasy (oraz kilku uczniów z klas równoległych).

Pytania, na które musieli odpowiedzieć moi rówieśnicy:

1. Czy można znaleźć liczbę, która jest największa ze wszystkich?
2. Jakie znacie nazwy naprawdę wielkich liczb?
3. Czego jest więcej: wszystkich liczb naturalnych (1, 2, 3, 4 ...) czy wszystkich liczb parzystych (2, 4, 6, 8 ...)?
4. Czy słyszeliście o pojęciu nieskończoności? Jeżeli TAK to co ono oznacza?

W Ankiecie wzięło udział trzydziestu uczniów

A oto jak przedstawiały się odpowiedzi:



Zwróćmy uwagę, że ponad $\frac{3}{4}$ uczniów (23 osoby) udzieliło odpowiedzi NIE. Zgadza się zatem (choćby nieświadomie), że istnieje coś takiego jak nieskończoność. Intuicyjnie zauważają, że gdyby istniała największa ze wszystkich liczb, to wystarczyło by do niej dodać jeden i mielibyśmy jeszcze większą liczbę, a więc poprzednia nie była największa. Ale zarazem 7 uczniów (prawie $\frac{1}{4}$) uważa, że istnieje największa liczba, czyli nie dopuszcza do siebie możliwości istnienia nieskończoności. Przed rozdaniem ankiety specjalnie nic nie tłumaczyłem kolegom, więc możliwe, że wystarczyłoby 2 minuty, aby te siedem osób zmieniło zdanie. Ale mnie chodziło o „czyste odpowiedzi” – nie skażone moimi wyjaśnieniami.

Na drugie pytanie siedem osób nie udzieliło żadnej odpowiedzi, natomiast reszta wymieniała: milion, miliard, bilion, tryliard oraz takie perełki jak *nonagilion* i *cecylion*. Nikt natomiast nie wymienił googol, czy googolplex. Ale – jak mi się wydaje – aby „otrzeć się” o te nazwy trzeba choć trochę interesować się matematyką. Dodam jeszcze, że prawie wszystkie osoby, które w pytaniu pierwszym odpowiedziały TAK (istnieje największa liczba) w drugim pytaniu nie podały żadnej nazwy wielkiej liczby. A więc można założyć, że te siedem osób po prostu nie lubi i „nie zna się na matematyce”.

Ciekawe są odpowiedzi na trzecie pytanie (Czego jest więcej liczb naturalnych czy parzystych)



Tylko jedna osoba odpowiedziała prawidłowo (że liczb naturalnych i parzystych jest tyle samo). A aż dwudziestu trzech uczniów twierdziło, że liczb naturalnych jest więcej. Było to do przewidzenia. Uczniowie w szkole podstawowej intuicyjnie widzą, że liczb parzystych jest mniej. Ale aż sześć osób stwierdziło, że liczb parzystych jest więcej. Może wynikło to z prostej pomyłki? Ale z tej szóstki, aż cztery osoby zaliczało się do grupy, którą nazwałem „niełubiący matematyki” (czyli Ci znający największą liczbę).

Na ostatnie pytanie (Czy znacie pojęcie nieskończoności i czym jest nieskończoność) aż trzynaście osób nie udzieliło żadnej odpowiedzi bądź odpowiedziało, że nie słyszało o nieskończoności (oczywiście w tym gronie mamy siódmkę z pierwszego pytania). Pozostali opisywali nieskończoność w bardzo różny sposób: „coś co nie ma końca, i nie jest policzalne”, „nieskończoność nigdy się nie kończy”, „Nieskończoność nie ma końca, czyli nic nie ma na samym końcu”, „oznacza nieskończoną ilość przedmiotów” itp. Tak duży odsetek osób, które nie słyszało o nieskończoności może wynikać z tego, że może coś słyszeli na ten temat, ale nie umieli opisać nieskończoności, więc woleli nic nie wpisywać. Natomiast różnorodność odpowiedzi tych, którzy opisywali nieskończoność mogą świadczyć o tym, że trudno jest opisać ją w kilku słowach.

Dowcipy o nieskończoności

Nieskończenie wielu matematyków wchodzi do baru. Pierwszy zamawia jedno piwo, drugi zamawia pół piwa, trzeci - ćwierć, itd. Barman stawia na blacie dwa piwa - matematycy nie kryją oburzenia: "Tylko tyle? Jak mamy się tym niby upić?!". Na co barman odpowiada: "Dajcie spokój, musicie znać swoją granicę"

• • •

Matematyk zorganizował loterię i zapowiedział, że wygrana będzie nieskończona. Kiedy sprzedał wszystkie kupony i zwycięzca zjawiał się po odbiór nagrody, matematyk wyjaśnił sposób jej wypłaty: "1 dolar teraz, 1/2 dolara w następnym tygodniu, 1/4 dolara za dwa tygodnie..."

• • •

Nieskończoność jest pojęciem trudnym dla człowieka, a co dopiero dla ucznia

• • •

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2 - n - 3}{n - 1} = \infty, \text{ a ile wynosi granica } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - n - 3}{n - 1} ?$$

Odp. ↩

• • •

Jak mama budzi ósemkę? Wstawaj. Nie możesz tak leżeć w nieskończoność!

• • •

Każdy wie, że Chuck Norris doliczył do nieskończoności dwa razy. Ale nie każdy wie, że zaczynał od minus nieskończoności

• • •

Założmy, że $\frac{1}{\infty} = 0$, a mamy do udowodnienia, że $\frac{1}{0} = \infty$

Dowód:

Obróćmy $\frac{1}{\infty} = 0$ przeciwnie do wskazówek zegara o 90° – wyjdzie nam $-18 = 0$

Dodajmy do obu stron równania 8: $-10 = 8$ a następnie obróćmy z powrotem o 90° (tym razem zgodnie ze wskazówkami zegara) i otrzymamy: $\frac{1}{0} = \infty$ co było do udowodnienia

Cytaty

Będąc człowiekiem nie jestem bliższy nieskończoności niż gdybym był mrówką, ale też nie jestem dalszy niż gdybym był ciałem niebieskim.

Autor: Giordano Bruno

Ludzka głupota jest jedyną rzeczą oddającą ideę nieskończoności.

Autor: Ernest Renan

Matematyka: przyłapywanie nieskończoności na gorącym uczynku.

Autor: Stefan Napierski

Nic tak nie daje poczucia nieskończoności jak głupota.

Autor: Ödön von Horváth

Nie wnika się w nieskończoność uciekając ku innej nieskończoności.

Autor: Umberto Eco

Nieskończoność! Żadne inne pytanie nie poruszyło tak głęboko duszy człowieka.

Autor: David Hilbert

Nieskończoność i wieczność stanowią największą i jedyną pewność.

Autor: Søren Kierkegaard

Tylko dwie rzeczy są nieskończone: Wszechświat oraz ludzka głupota, choć nie jestem pewien co do tej pierwszej.

Autor: Albert Einstein

W czarnym aksamicie nieskończoności zwycięstwo będzie człowieka.

Autor: Ajschylos

Zakończenie

I na tym koniec moich rozważań na ten temat nieskończoności. Mimo, że na początku myślałem, że będzie to dość łatwy i prosty do opisanie temat, to okazało się coś zupełnie przeciwnego. W miarę jak zdobywałem coraz to większą wiedzę na temat nieskończoności, widziałem, że jest to dość „ślisiki” temat. Już samo zrozumienie, że np. liczb parzystych jest tyle samo co liczb naturalnych graniczyło z cudem. Niby dowód rozumiałem, ale nie mieściło mi się to w głowie. A już te paradoksy z szeregiem liczbowymi, gdzie suma wszystkich liczb naturalnych (a więc dodatnich) jest nie dość, że ujemna to jeszcze jest ułamkiem. Przecież można zwariować.

Czy możemy odpowiedzieć twierdząco na pytanie: **Czy nieskończoność to liczba?** Nie, a wręcz przeciwnie wiemy, że nieskończoność nie jest liczbą, nie jest ani parzystą, ani nieparzystą. To tylko pewna idea. I to bardzo kłopotliwa idea. Kilku geniuszy zajmujących się problemem nieskończoności skończyło (!) w szpitalu psychiatrycznym. Mam nadzieję, że mnie to nie grozi, ale przecież ja nie jestem geniuszem ...

I już na sam koniec muszę wspomnieć, że w rozwój pojęcia nieskończoności (a szerzej mówiąc teorii mnogości) duży wkład włożyli polscy uczeni tacy jak: Wacław Sierpiński, Kazimierz Kuratowski, Alfred Tarski, Stefan Banach, Stanisław Ulam, Hugo Steinhaus czy Jan Mycielski.

Źródła

1. Wikipedia.org (wszystkie przypisy pochodzą z tego źródła)
2. www.YouTube.pl
3. Mariusz Gromada - *Od paradoksów do Hipotezy Continuum czyli Tajemnice nieskończoności*
<http://multifractal.net>
4. Film BBC *Poza nieskończoność*
5. Roman Murawski - *Nieskończoność w matematyce. Zmagania z potrzebnym, acz kłopotliwym pojęciem*