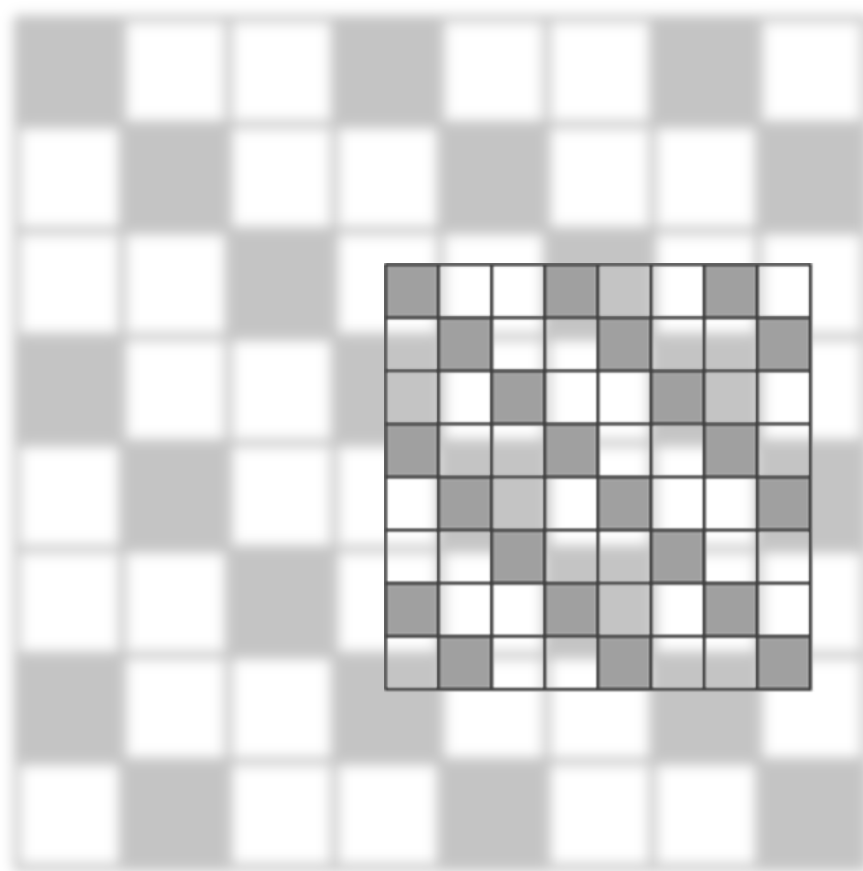


Kolorowanie szachownic

Gabriela Pietras kl. VI



Publiczna Szkoła Podstawowa im. Gen. Władysława Andersa w Leszczynie

Opiekun: mgr Martha Łącka
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie

Kraków 2017

Ciekawymi zadaniami łamigłówkowymi jest pokrywanie szachownicy klockami (poliminami). Szachownicę można wypełniać różnymi klockami, które powstają przez połączenie małych kwadracików. Polimino to kilka (albo i więcej) jednakowych kwadratów, które tworzą jeden kawałek. Każdy kwadrat styka się bokiem z co najmniej jednym innym kwadratem, nie mogą stykać się tylko i wyłącznie wierzchołkami. Przykładowo z 3 kwadracików można uzyskać 2 różne trimina, z 4 kwadracików może powstać pięć różnych tetramin, itp. Pojedynczy kwadracik zwany jest monominem.

Wszystkie polimino należy układać zgodnie z liniami podziału szachownicy. Żaden klocek nie może wystawać poza rozpatrywany obszar, klocki nie mogą też nachodzić na siebie. Gdy przykłady pokrywania szachownicy klockami dotyczą szachownicy jednobarwnej, trudno wpaść na odpowiednie rozwiązanie problemu. Kolorowanie jest sprytnym sposobem, dzięki któremu często najłatwiej można dojść do rozwiązania. Sposób kolorowania szachownicy związany jest z odnalezieniem pewnego niezmiennika, czyli cechy, która nie zmienia się podczas wykonywania opisanych w zadaniu operacji. Większość dowodów niemożności pokrycia szachownicy oparta jest na kolorowaniu pól na różne sposoby. Podstawą szachownicowej logiki jest wybór właściwego sposobu kolorowania, może być ono oryginalne. Najczęściej spotykane jest kolorowanie cykliczne, ponieważ w rzędach i kolumnach powtarza się n – kolorowy ciąg pól. Kolorować można również pasami. Często arytmetyka podpowiada, że szachownicę można pokryć odpowiednią ilością klocków, tymczasem sprytne kolorowanie obala hipotezę postawioną na podstawie działań arytmetycznych.

W swojej pracy przybliżę różne przykłady wypełniania szachownic klockami. Wiele z nich pochodzi z literatury, m. in. z Gazetki Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów „Kwadrat”, z miesięcznika „Trapez” Nr 76, z książki pt. „*Miniatury matematyczne 41*”, Wydawnictwo Aksjomat – Toruń, z kwartalnika „*Magazyn Miłośników Matematyki*”, z broszury pod redakcją J. Jelisiejewa „*Matematyczne Seminarium Olimpijskie*” i jeszcze wielu innych pozycji, które wymienione zostały na końcu pracy. Przykłady z literatury zostawione zostały w formie ćwiczeń. Niektóre

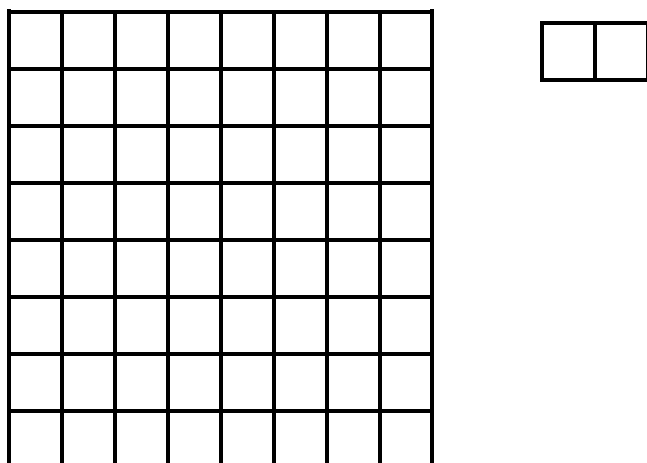
z nich w literaturze były rozwiązane, ale doszłam do rozwiązania niezależnie sama. Przedstawiłam również przykłady, które sama wymyśliłam.

W pierwszej części pracy przedstawię różne przykłady mojego autorstwa wraz z rozwiązaniem każdego z nich.

DOMINO

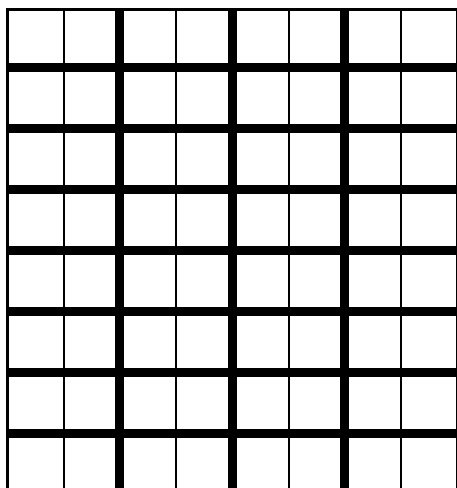
Przykład 1 własnego autorstwa

Czy szachownicę 8 x 8 (rys. 1) można pokryć klockami domino?



rys. 1

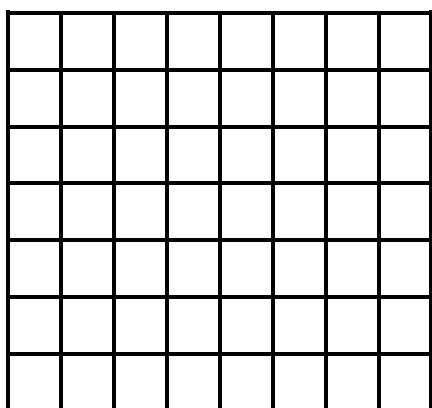
1. Pole szachownicy jest równe $8 \times 8 = 64$, 2 dzieli 64, zatem nie ma sprzeczności.
2. Szachownica jest kwadratem, którego bok jest podzielny przez 2, więc szukane pokrycie jest możliwe. Przykładowy sposób pokrycia podany został na rys. 2.



rys. 2

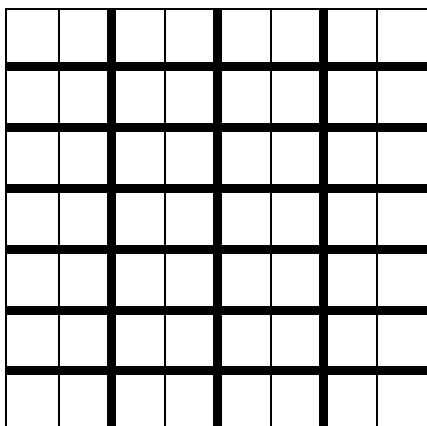
Przykład 2 własnego autorstwa

Czy szachownicę 7 x 8 (rys. 3) można pokryć klockami domino?



rys. 3

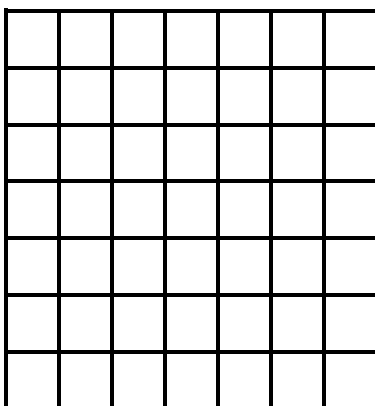
1. Pole szachownicy jest równe $7 \times 8 = 56$, 2 dzieli 56, zatem nie ma sprzeczności.
2. Szachownica jest prostokątem, którego jeden z boków jest podzielny przez 2. Szukane pokrycie jest więc możliwe. Przykładowy sposób pokrycia podany został na rys. 4.



rys. 4

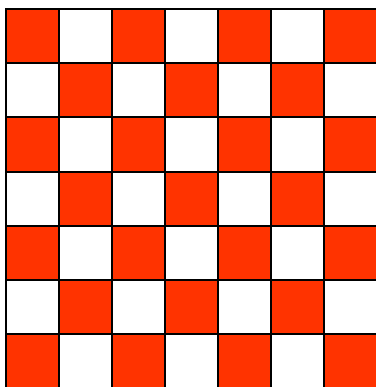
Przykład 3 własnego autorstwa

Czy szachownicę 7×7 (rys. 5) można pokryć klockami domino?



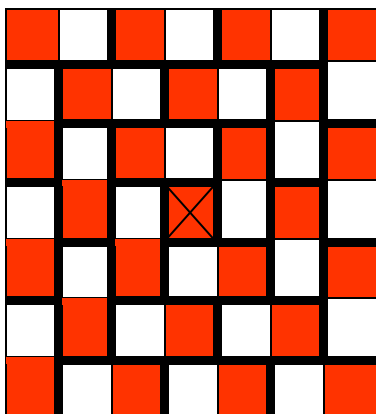
rys. 5

1. Pole szachownicy jest równe $7 \times 7 = 49$, 2 nie dzieli 49, zatem pokrycie nie jest możliwe.
2. Chcę sprawdzić, czy da się pokryć 48 pól szachownicy 24 dominami, a jeśli tak, to które pola przy takim pokryciu mogą zostać niepokryte.



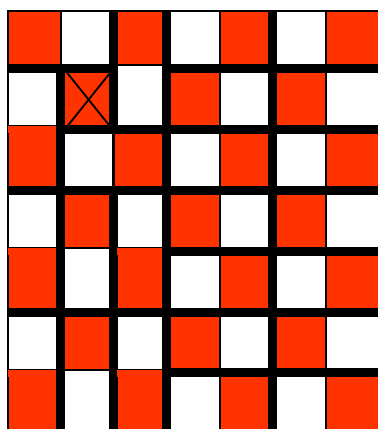
rys. 6

Liczba wszystkich pól szachownicy jest równa $7 \times 7 = 49$. Czerwonych pól jest 25, a białych pól jest $49 - 25 = 24$. Każde domino zajmuje dokładnie jedno pole czerwone i jedno białe, pokrytych musi więc być jednakowa ilość białych i czerwonych pól. Na szachownicy jest 25 pól czerwonych i 24 pola białe, więc w moim przypadku niepokryte zostanie jedno czerwone pole. Przykładowe ułożenie klocków domina z jednym niepokrytym polem (na rysunku kolor czerwony) pokazane zostało na rys. 7.

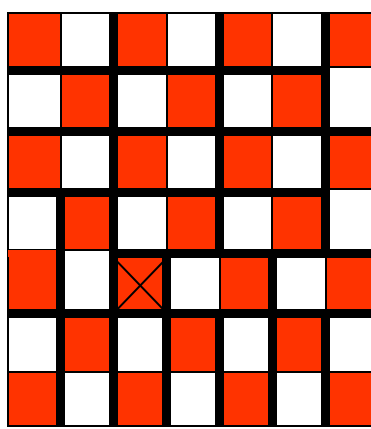


rys. 7

Zauważyłam, że tylko po wykreśleniu dowolnego czerwonego pola, pokrycie szachownicy klockami domino jest możliwe (rys. 8 i rys. 9).



rys. 8



rys. 9

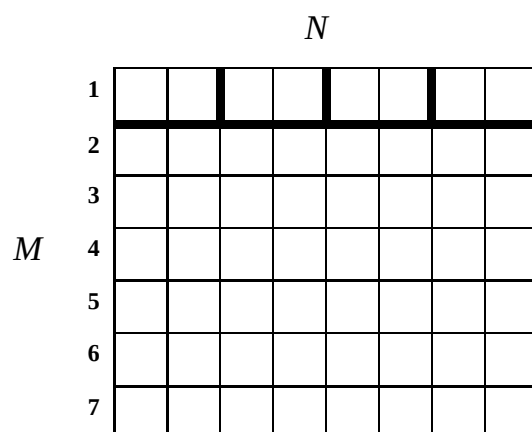
Powyższe przykłady zainspirowały mnie do postawienia następującego twierdzenia:

Twierdzenie nr 1

Klockami domino można pokryć każdą szachownicę, której długość przynajmniej jednego z boków jest liczbą podzielną przez 2 (zakładając, że szachownica jest prostokątem).

Dowód:

Jeżeli bok N prostokątnej szachownicy wyraża się liczbą podzielną przez 2, to na całej jego długości da się ułożyć klocki domino tak jak na poniższym rysunku, ponieważ $2|N$. W tym przypadku bok M szachownicy oznaczać będzie liczbę rzędów szachownicy, które pokryte są kostkami domino. Bok M prostokątnej szachownicy może być zatem dowolną liczbą naturalną (rys. 10).

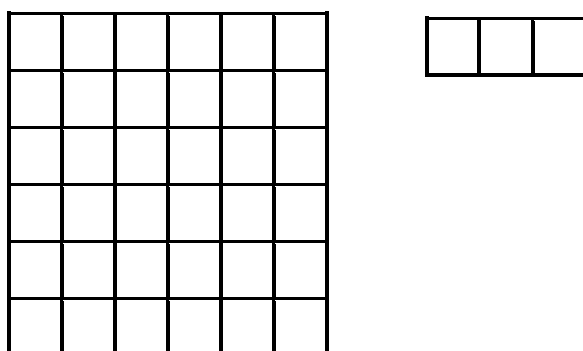


rys. 10

TRIMINO

Przykład 1 własnego autorstwa

Czy szachownicę 6 x 6 (rys. 11) można pokryć klockami trimina o wymiarach 3 x 1?



rys. 11

1. Pole szachownicy jest równe $6 \times 6 = 36$, 3 dzieli 36, zatem nie ma sprzeczności.
2. Długości boków szachownicy są liczbami podzielными przez 3, zatem pokrycie jest możliwe.

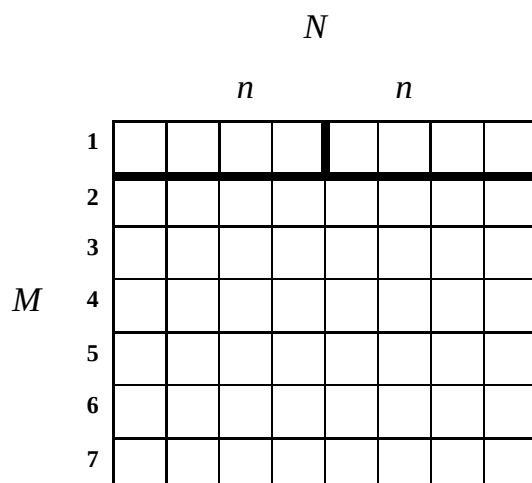
Ogólniej, prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie nr 2

Klockami polimina o wymiarach $n \times 1$ można pokryć każdą prostokątną szachownicę o wymiarach $M \times N$, jeśli n dzieli M lub n dzieli N .

Dowód:

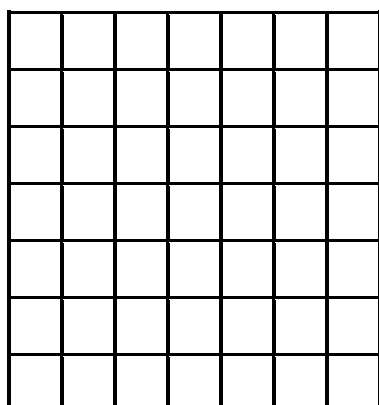
Jeżeli bok N prostokątnej szachownicy wyraża się liczbą podzielną przez n , to na całej jego długości da się ułożyć klocki polimina tak jak na poniższym rysunku, ponieważ $n|N$. W tym przypadku bok M szachownicy oznaczać będzie liczbę rzędów szachownicy, które pokryte są klockami $n \times 1$. Bok M prostokątnej szachownicy może być zatem dowolną liczbą naturalną (rys. 12).



rys. 12

Przykład 2 własnego autorstwa

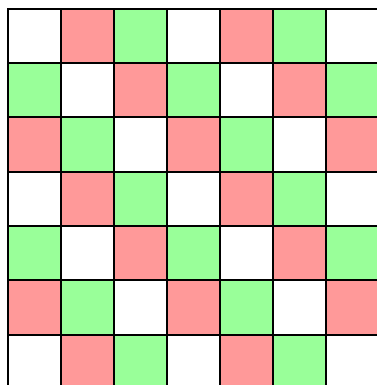
Czy szachownicę 7×7 (rys. 13) można pokryć klockami trimina o wymiarach 3×1 ?



rys. 13

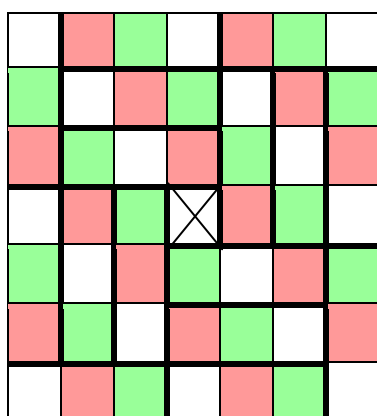
1. Pole szachownicy jest równe $7 \times 7 = 49$, 3 nie dzieli 49, zatem pokrycie nie jest możliwe.

2. Kolorując szachownicę jak na rys. 14 sprawdzę, które pole nie zostanie pokryte zakładając, że znajdę pokrycie, w którym nie pokryję tylko jednego pola.

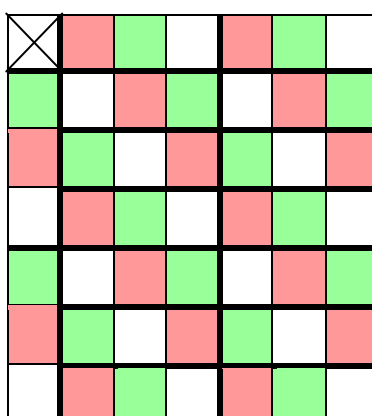


rys. 14

Liczba wszystkich pól szachownicy jest równa $7 \times 7 = 49$. Zielonych pól szachownicy jest 16, różowych pól również jest 16, a białych pól jest 17. Jeśli pokryję szachownicę $\frac{49}{3} = 16$ klockami trimina, to wtedy zostanie jedno pole, które nie będzie pokryte, zgodnie z warunkami zadania. Każde trimino zajmuje dokładnie jedno pole każdego koloru. Pokrytych zostanie zatem 16 pól każdego koloru; białych pól jest 17, więc w moim przypadku białe pole nie będzie pokryte (rys. 15 i rys. 16).



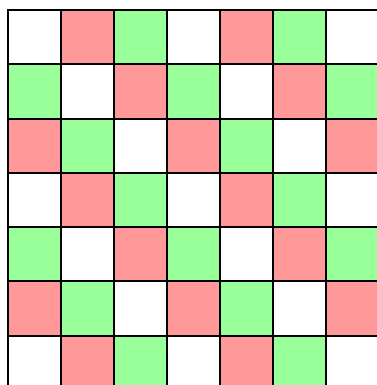
rys. 15



rys. 16

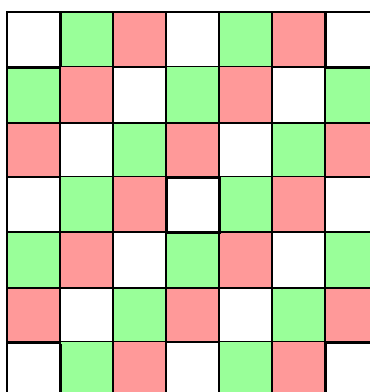
Nasuwa się pytanie, które z białych pól nie zostanie pokryte? Aby na nie odpowiedzieć pokoloruję szachownicę na dwa różne sposoby (rys. 17 i rys. 18).

I sposób



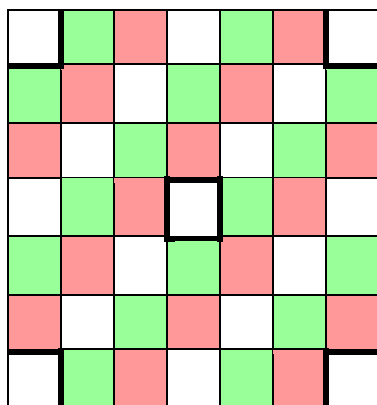
rys. 17

II sposób



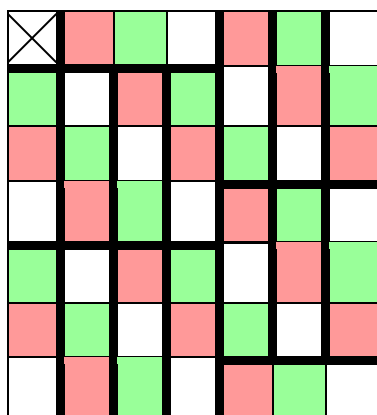
rys. 18

Przecięcia białych pól są rozwiązaniem zadania – jest ich pięć: cztery narożne i środkowe. Jedno z tych pól nie zostanie pokryte klockami trimina o wymiarach 3 x 1 (rys. 19).

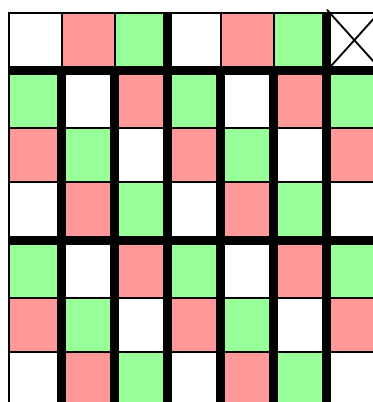


rys. 19

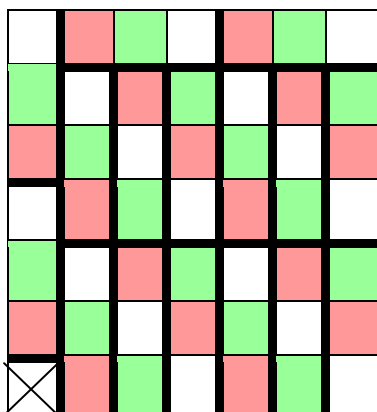
Przykładowe pokrycia podane są na rys. 20 - 24.



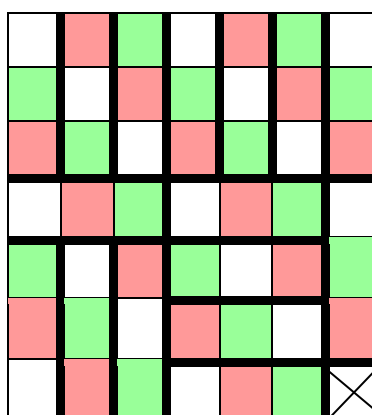
rys. 20



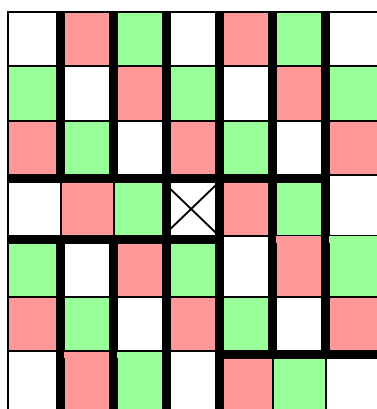
rys. 21



rys. 22



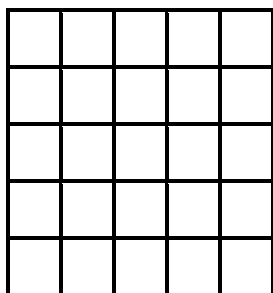
rys. 23



rys. 24

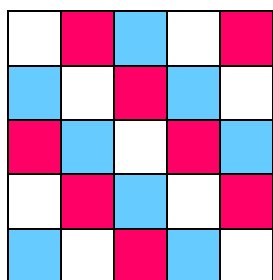
Przykład 3 własnego autorstwa

Czy szachownicę 5×5 (rys. 25) można pokryć klockami trimina o wymiarach 3×1 ?



rys. 25

1. Pole szachownicy jest równe $5 \times 5 = 25$, 3 nie dzieli 25, zatem pokrycie nie jest możliwe.
2. Kolorując szachownicę jak na rys. 26 sprawdzę, które z pól nie zostaną pokryte.

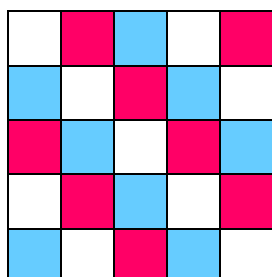


rys. 26

Wszystkich pól szachownicy jest $5 \times 5 = 25$. Niebieskich pól jest 8, czerwonych pól też jest 8, a białych pól jest $25 - 16 = 9$. Jeśli pokryję szachownicę $\frac{25}{3} = 8$ klockami trimina, zostanie jedno pole, które nie będzie pokryte, ponieważ $8 \times 3 = 24$. Każde trimino zajmuje dokładnie jedno pole każdego koloru. Pokrytych zostanie 8 pól każdego koloru; białych pól jest 9, więc w tym przypadku białe pole nie będzie pokryte. Nasuwa się pytanie, czy dowolne białe pole można wyciąć, aby szachownicę 5×5 dało się pokryć klockami o wymiarach 3×1 ? Sprawdzę, czy jest to możliwe.

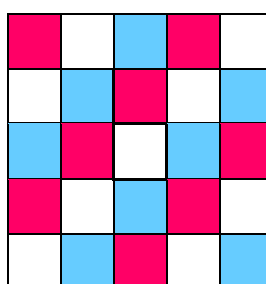
Pokoloruję szachownicę na dwa różne sposoby przedstawione na rys. 27 i rys. 28.

I sposób



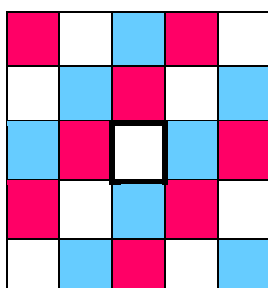
rys. 27

II sposób



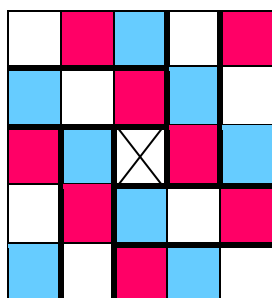
rys. 28

Przecięcie białych pól to rozwiązanie zadania. Zatem jest tylko jedno (środkowe) białe pole, które można wyciąć, aby udało się pokryć szachownicę 5 x 5 klockami o wymiarach 3 x 1 (rys. 29).



rys. 29

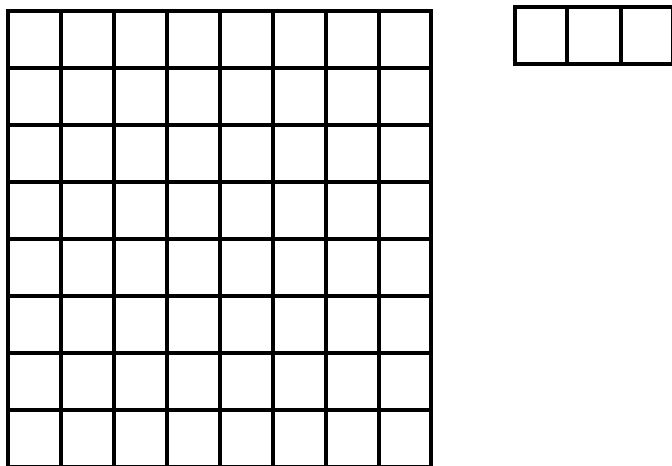
Przykładowy sposób pokrycia szachownicy 5 x 5 klockami o wymiarach 3 x 1 podany jest na rys. 30.



rys. 30

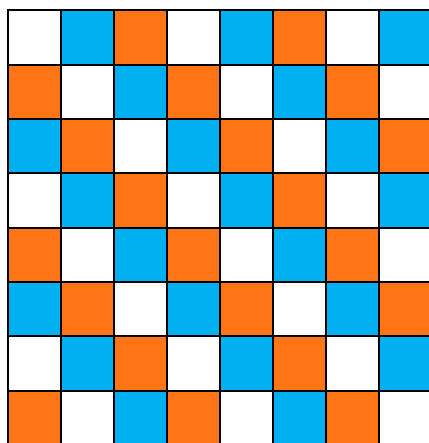
Przykład 4 własnego autorstwa

Na szachownicy 8 x 8 (rys. 31) ułożono 21 klocków trimina o wymiarach 3 x 1. Które z pól pozostało wolne?



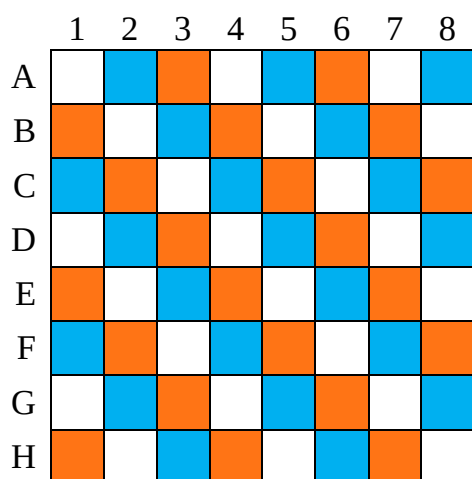
rys. 31

Pokoloruję szachownicę, jak na rys. 32.



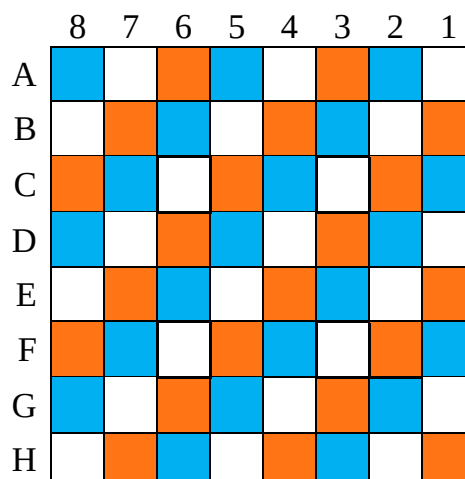
rys. 32

Wszystkich pól szachownicy jest $8 \times 8 = 64$. Niebieskich pól szachownicy jest 21, pomarańczowych pól też jest 21, białych natomiast jest $64 - 42 = 22$. Szachownica została pokryta za pomocą 21 klocków trimina. Każde trimino zajmuje dokładnie jedno pole każdego koloru. Pokrytych zostanie 21 pól każdego z trzech kolorów. Białych pól jest 22, zatem w moim przypadku białe pole nie zostanie pokryte. Pokoloruję szachownicę na dwa różne sposoby (rys. 33 i rys. 34).



I sposób

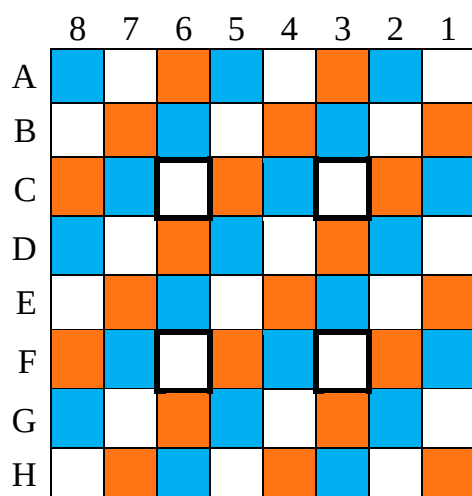
rys. 33



II sposób

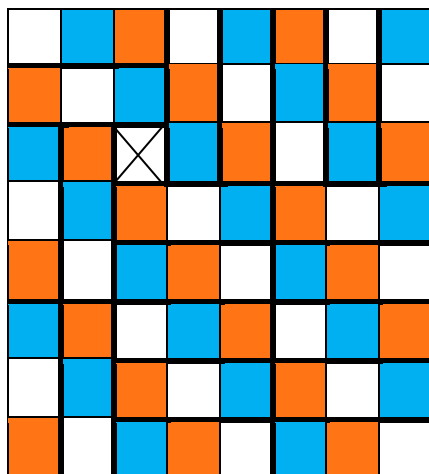
rys. 34

Przecięcie białych pól daje rozwiązanie. Zauważyłam, że są dokładnie cztery pola znajdujące się w przecięciu białych pól: pole C3 pierwszej szachownicy odpowiada polu C6 drugiej szachownicy, pole F3 pierwszej szachownicy odpowiada polu F6 drugiej szachownicy, pole C6 pierwszej szachownicy odpowiada polu C3 drugiej szachownicy oraz pole F6 pierwszej szachownicy odpowiada polu F3 drugiej szachownicy. Zatem jedno z tych białych pól nie zostanie pokryte (rys. 35).

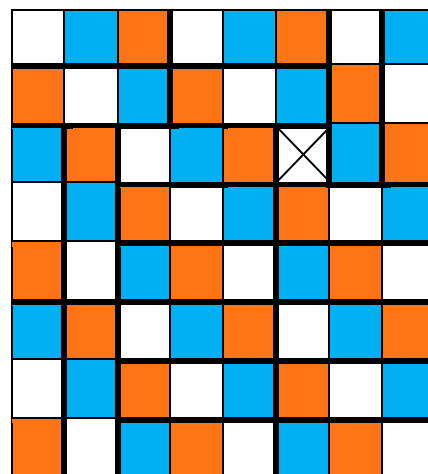


rys. 35

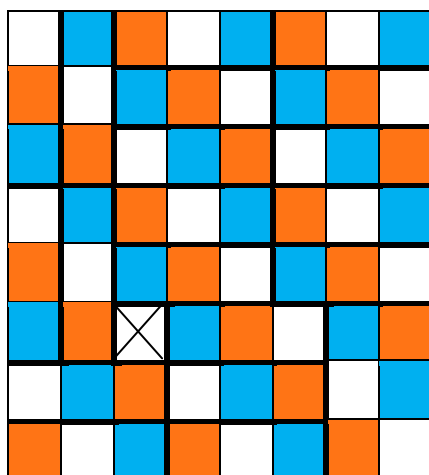
Sposoby ułożenia klocków przedstawione zostały na rys. 36 - 39.



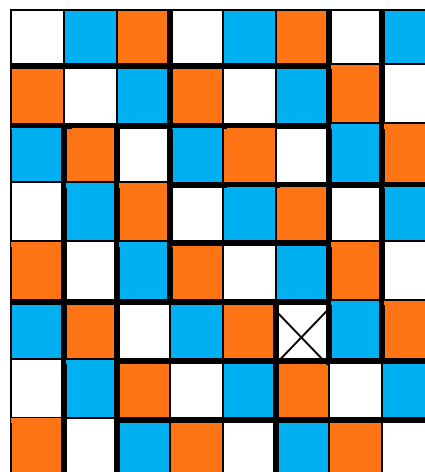
rys. 36



rys. 37



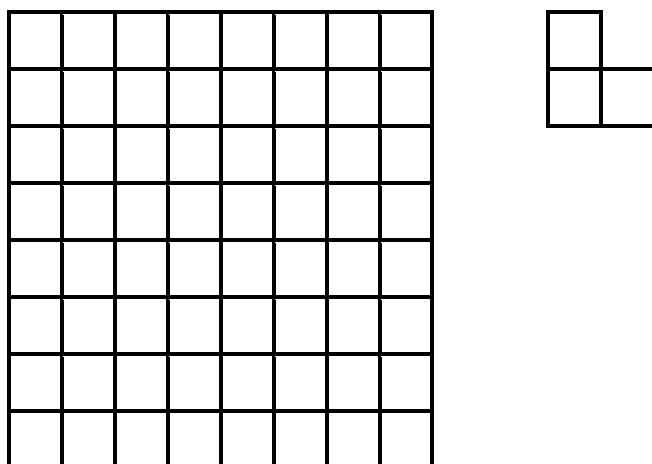
rys. 38



rys. 39

Przykład 5 własnego autorstwa

Czy szachownicę 8×8 (rys. 40) można pokryć klockami trimina w kształcie litery L?



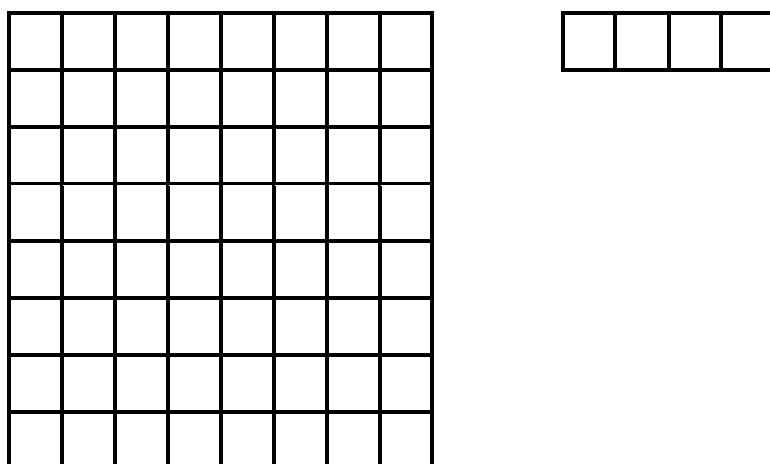
Rys. 40

1. Pole szachownicy jest równe $8 \times 8 = 64$, 3 nie dzieli 64, zatem szukane pokrycie nie jest możliwe.

TETRAMINO

Przykład 1 własnego autorstwa

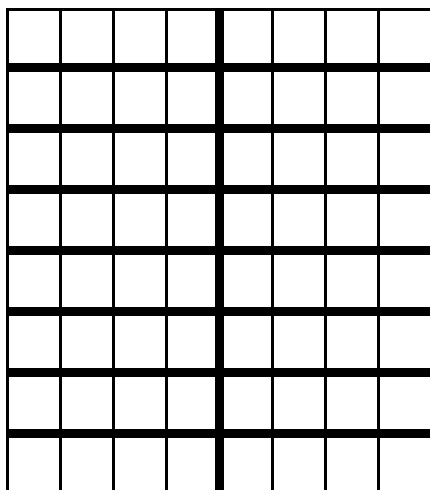
Czy szachownicę 8×8 (rys. 41) można pokryć klockami tetramina o wymiarach 4×1 ?



rys. 41

1. Pole szachownicy jest równe $8 \times 8 = 64$, 4 dzieli 64, zatem nie ma sprzeczności.
2. Długości boków kwadratowej szachownicy są liczbami podzielnymi przez 4 (długość boku klocka tetramina), zatem szukane pokrycie jest możliwe.

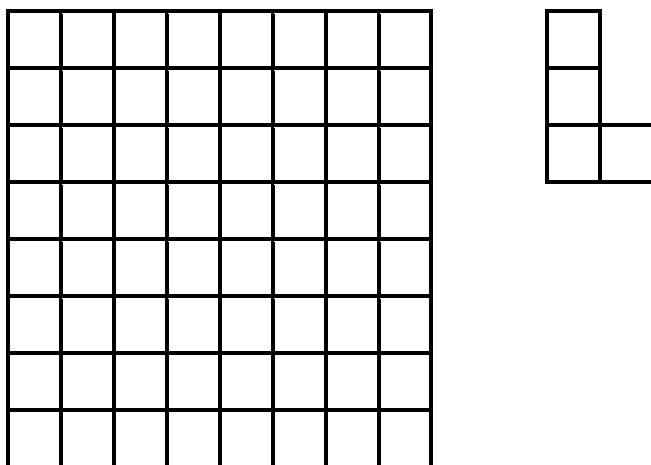
Przykładowy sposób pokrycia podany jest na rys. 42.



rys. 42

Przykład 2 własnego autorstwa

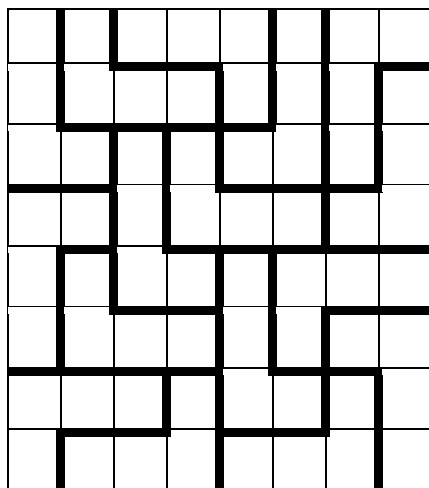
Czy szachownicę 8×8 (rys. 43) można pokryć klockami tetramina w kształcie litery L?



rys. 43

1. Pole kwadratowej szachownicy jest równe $8 \times 8 = 64$, 4 dzieli 64, więc nie ma sprzeczności.

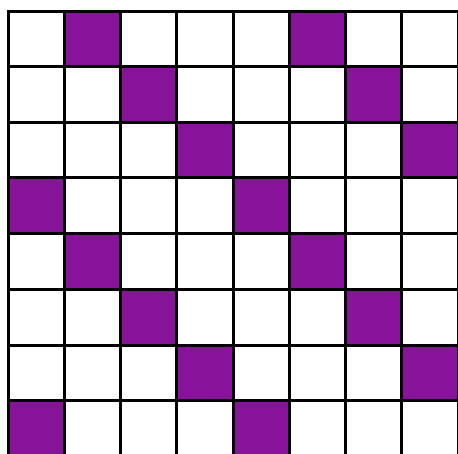
Przykładowe pokrycie podane jest na rys. 44.



rys. 44

Przykład 3 własnego autorstwa

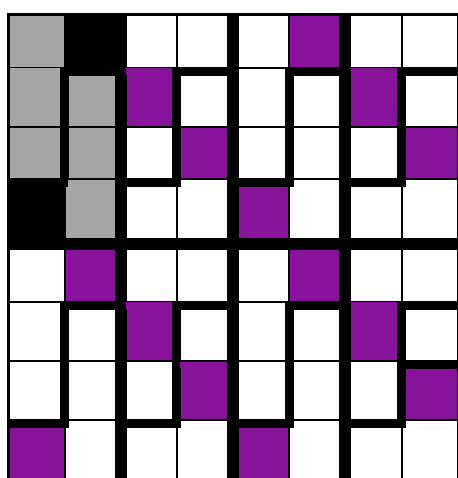
Czy szachownicę 8×8 pokolorowaną tak, jak na rys. 45, można pokryć klockami tetramina w kształcie litery L w taki sposób, aby każdy klocek zajął dokładnie jedno kolorowe pole?



rys. 45

Liczba wszystkich pól szachownicy jest równa $8 \times 8 = 64$. Fioletowych pól jest 16, a białych $64 - 16 = 48$. Do pokrycia szachownicy potrzebnych jest $\frac{64}{4} = 16$ klocek tetramina. Z moich powyższych obliczeń wynika, że gdyby każde tetramino zajęło dokładnie jedno fioletowe pole, pokrytych zostanie wówczas 16 fioletowych pól szachownicy i $16 \times 3 = 48$ białych pól - nie ma sprzeczności.

Przykładowe pokrycie klocek tetramina tak, aby każdy klocek zajął dokładnie jedno fioletowe pole przedstawione jest na rys. 46.

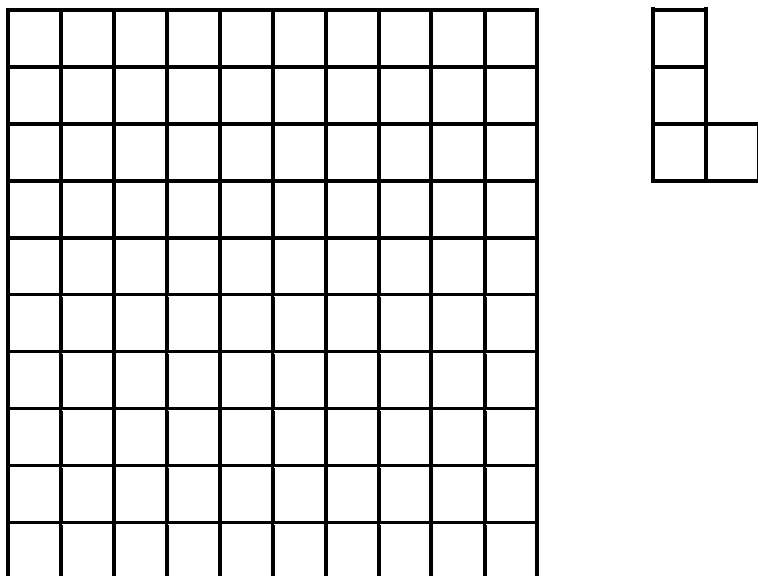


rys. 46

Pokrywając szachownicę zauważyłam, że można ją podzielić na fragmenty złożone z ośmiu pól w taki sposób, aby każdy z tych fragmentów dało się pokryć dwoma tetraminami, z których każde pokrywa dokładnie jedno fioletowe pole. Przykładowy fragment zaznaczony jest kolorem szarym.

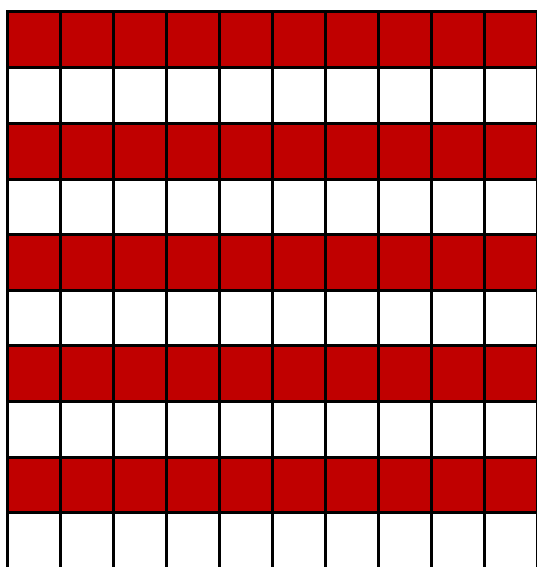
Przykład 4 własnego autorstwa

Czy szachownicę 10×10 (rys. 47) można pokryć klocek tetramina w kształcie litery L?



rys. 47

1. Pole szachownicy jest równe $10 \times 10 = 100$, 4 dzieli 100, zatem nie ma sprzeczności.
2. Kolorując szachownicę jak na rys. 48 sprawdzę, czy szukane pokrycie jest możliwe.



rys. 48

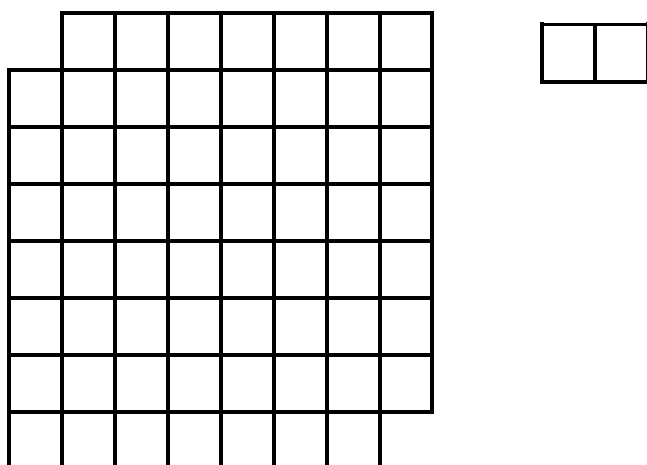
Na szachownicy musiałabym ułożyć $\frac{100}{4} = 25$ klocek, które zajęłyby łącznie 50 bordowych pól. Każdy klocek osobno zajmuje nieparzystą ilość bordowych pól

(1 albo 3), więc suma pól pokrytych przez 25 klocków również będzie nieparzysta. Doszłam zatem do sprzeczności. Szukane pokrycie nie jest możliwe.

W dalszej części pracy przedstawię różne przykłady z literatury. Niektóre z nich zostawione były w formie ćwiczeń, w pozostałych zaś autorzy podali swoje rozwiązania. Poniżej zaprezentuję własne rozwiązania wszystkich przykładów.

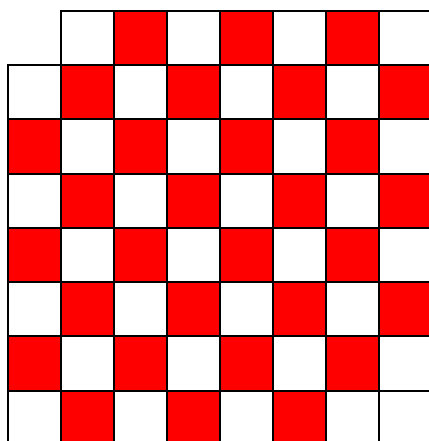
Przykład ze strony internetowej www.swiatnauki.pl

Z szachownicy 8 x 8 usunięto dwa przeciwległe narożne pola (rys. 49). Czy taką szachownicę można pokryć kostkami domina 2 x 1?



rys. 49

1. Na szachownicy są 62 pola ($8 \times 8 = 64$, $64 - 2 = 62$), 2 dzieli 62, zatem nie ma sprzeczności.
2. Kolorując szachownicę jak na rys. 50 sprawdzę, czy szukane pokrycie jest możliwe.



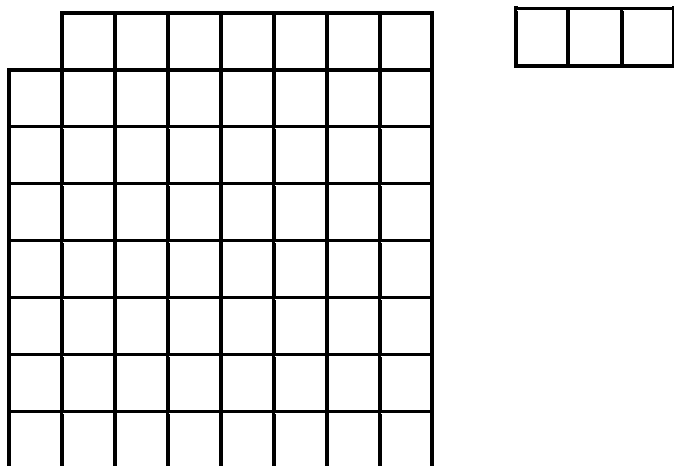
rys. 50

Liczba wszystkich pól szachownicy jest równa 62. Czerwonych pól jest 30, a białych pól jest $62 - 30 = 32$. Każde domino zajmuje dokładnie jedno pole czerwone i jedno białe, pokrytych musi więc być jednakowa ilość białych i czerwonych pól. Na szachownicy jest 30 pól czerwonych i 32 pola białe. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że szukane pokrycie nie jest możliwe.

Kwadratowa szachownica o wymiarach $N \times N$ z usuniętymi narożnymi polami leżącymi na tej samej przekątnej nazywana jest szachownicą Blacka. Pokrycie jej klockami domina nigdy nie będzie możliwe, niezależnie od tego czy N będzie liczbą parzystą czy nieparzystą. Dla parzystych N usunięte pola zawsze są jednakowego koloru. Po ich wycięciu liczby pól w różnych kolorach będą różne, co prowadzi do sprzeczności. Natomiast dla N nieparzystych po usunięciu dwóch narożnych pól, na szachownicy w dalszym ciągu pozostaje nieparzysta ilość wszystkich pól, co również prowadzi do sprzeczności [9].

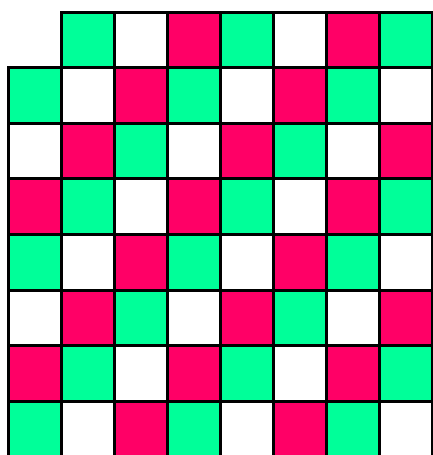
Przykład z tygodnika matematycznego „Trapez”

Udowodnię, że szachownicy o wymiarach 8×8 z usuniętym polem narożnym nie można pokryć triminami o wymiarach 1×3 (rys. 51).



rys. 51

1. Na szachownicy są 63 pola ($8 \times 8 = 64$, $64 - 1 = 63$), 3 dzieli 63, zatem nie ma sprzeczności.
2. Kolorując szachownicę jak na rys. 52 sprawdzę, czy szukane pokrycie jest możliwe.



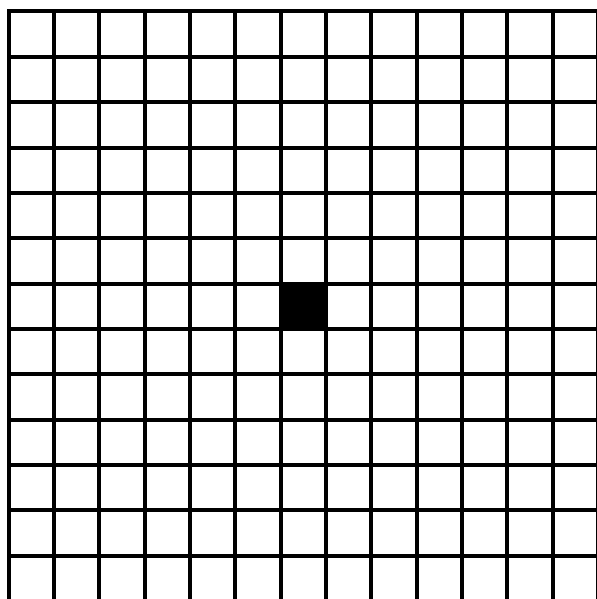
rys. 52

Wszystkich pól szachownicy jest 63. Zielonych pól jest 22, czerwonych pól jest 20, białych natomiast jest $63 - 42 = 21$. Każde trimino zajmuje dokładnie jedno pole

każdego koloru. W moim przypadku nie uda się pokryć 2 zielonych pól i jednego białego. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że szukane pokrycie nie jest możliwe.

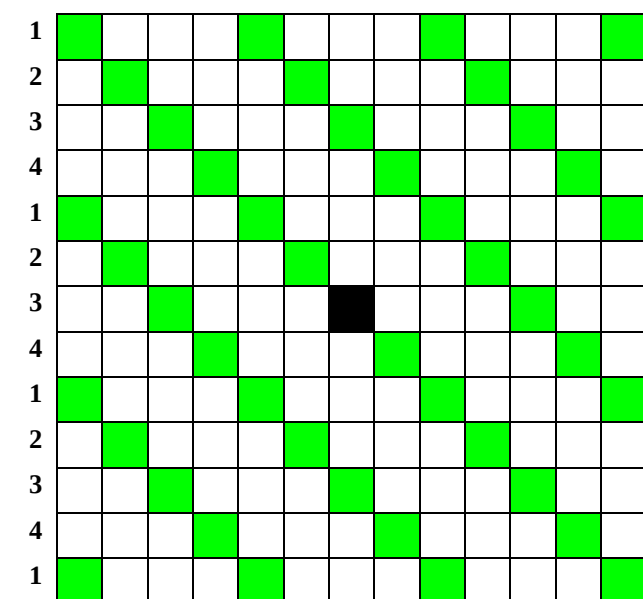
Przykład z broszury „*Matematyczne Seminarium Olimpijskie*”

Z szachownicy o wymiarach 13 x 13 wycięto środkowe pole (rys. 53). Czy otrzymaną figurę można pokryć 42 klockami tetramina o wymiarach 4 x 1?



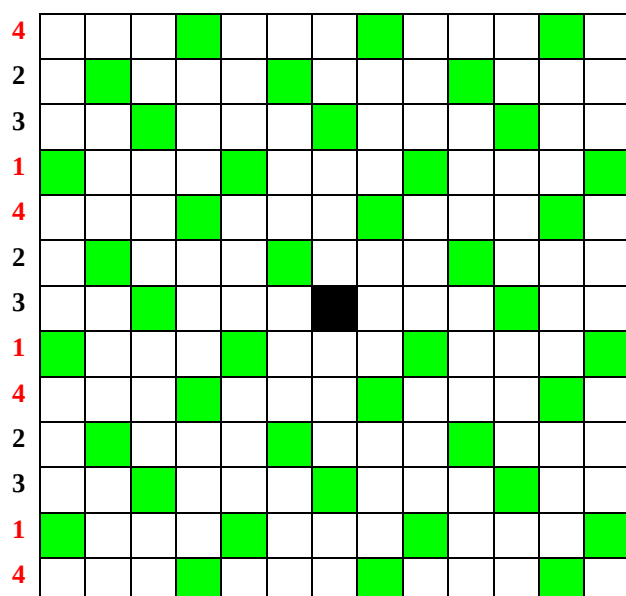
rys. 53

1. Pole szachownicy jest równe 168, bo $13 \times 13 = 169$, $169 - 1 = 168$; $168 / 4 = 42$, zatem nie ma sprzeczności.
2. Pokoloruję szachownicę jak na rys. 54 żeby sprawdzić, czy szukane pokrycie jest możliwe.



rys. 54

Wszystkich pól szachownicy jest 168. Zielonych pól jest 42, czyli parzysta liczba. Do pokrycia szachownicy musiałabym użyć $168/4=42$ klocków tetramina, czyli ich parzystą liczbę. Każde tetramino zajmuje tyle samo zielonych pól. Stąd liczba zielonych pól zajętych przez wszystkie tetramina jest parzysta. Liczba kolorowych pól szachownicy również jest parzysta, zatem nie ma sprzeczności. Zamienię zatem miejscami rząd 1 z rzędem 4 szachownicy tak jak na rys. 55.



rys. 55

Po przemalowaniu szachownicy liczba zielonych pól zmniejszyła się o 1 (w ostatnim rzędzie zamiast 4 zielonych pól są 3). W dalszym ciągu jednak jeden klocek tetramina zajmuje dokładnie jedno zielone pole. Wszystkich pól szachownicy jest 168. Zielonych pól jest 41, czyli nieparzysta liczba. Do pokrycia szachownicy musiałabym użyć $168/4=42$ klocków tetramina, czyli ich parzystą liczbę. Każde tetramino zajmuje dokładnie 1 zielone pole, czyli nieparzystą liczbę zielonych pól. Stąd liczba zielonych pól zajętych przez wszystkie tetramina jest parzysta, podczas gdy liczba kolorowych pól szachownicy jest nieparzysta. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że szukane pokrycie nie istnieje.

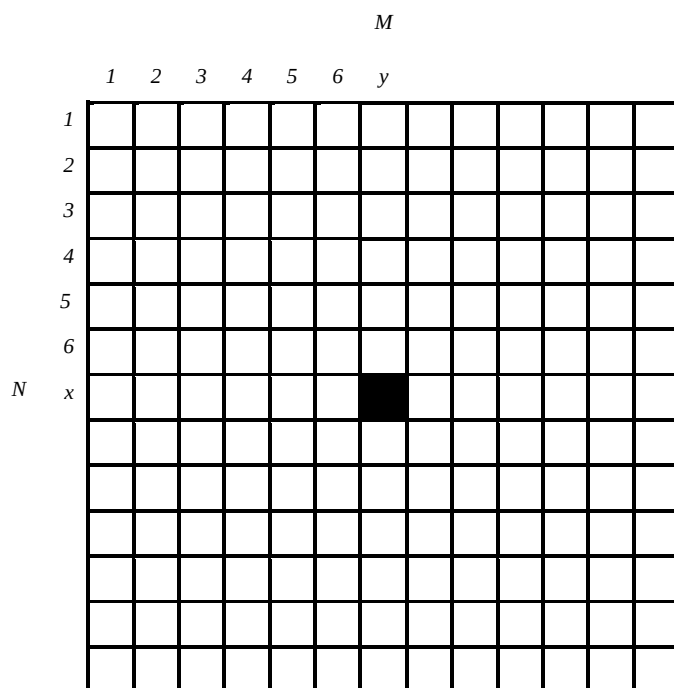
W artykule J. Jelisiejewa „Układanie prostokątów” przedstawione jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie nr 3

Prostokątną szachownicę o wymiarach $N \times M$ z wyciętym jednym polem o współrzędnych (x, y) można pokryć klockami o wymiarach $n \times 1$ wówczas, gdy spełniony jest jeden z następujących warunków:

1. n dzieli każdą z liczb: $N-1, M-1, x-1, y-1$,
2. n dzieli każdą z liczb: $N+1, M+1, x, y$.

Dowód jednej z implikacji zostawiony jest jako ćwiczenie. Przedstawiam poniżej moje rozumowanie.

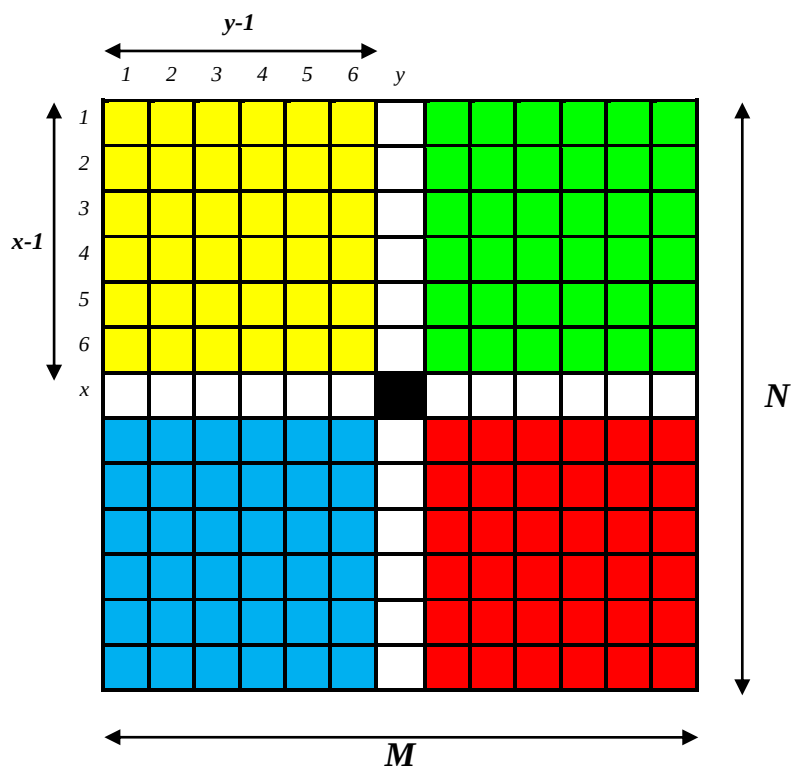


rys. 56

Dowód

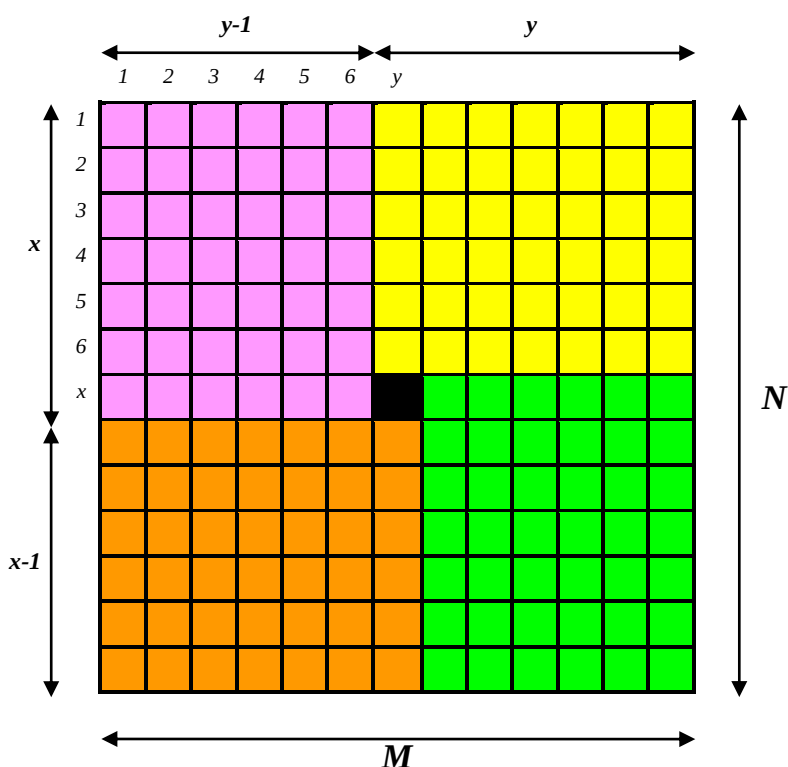
Zacznę od przypadku, kiedy usunięte zostało środkowe pole (rys. 56).

1. W szachownicy o wymiarach $M \times N$ wyodrębnić można cztery mniejsze prostokątne szachownice (na rys. 57 pomalowane w kolorze żółtym, zielonym, niebieskim i czerwonym). Każda z nich ma wymiary $x-1 \times y-1$. Jeżeli n dzieli $x-1$ to każdą kolumnę żółtej, zielonej, niebieskiej i czerwonej szachownicy oraz kolumnę niezamalowaną można pokryć klockami o wymiarach $n \times 1$. Jeżeli n dzieli $y-1$ to każdy rząd kolorowej szachownicy oraz rząd niezamalowany można pokryć klockami o wymiarach $n \times 1$. Jeżeli n dzieli $x-1$ i n dzieli $y-1$, wówczas każdą z prostokątnych szachownic o wymiarach $x-1 \times y-1$ można wypełnić klockami o wymiarach $n \times 1$.



rys. 57

2. W szachownicy o wymiarach $M \times N$ wyodrębnić można cztery prostokątne szachownice (na rys. 58 pomalowane w kolorze różowym, żółtym, pomarańczowym i zielonym). Różowa i zielona szachownica mają wymiary $x \times y-1$, natomiast żółta i pomarańczowa szachownica mają wymiary $y \times x-1$. Jeżeli n dzieli x i n dzieli y , wówczas każdą z prostokątnych szachownic o wymiarach $x \times y-1$ oraz $y \times x-1$ można wypełnić klockami o wymiarach $n \times 1$.

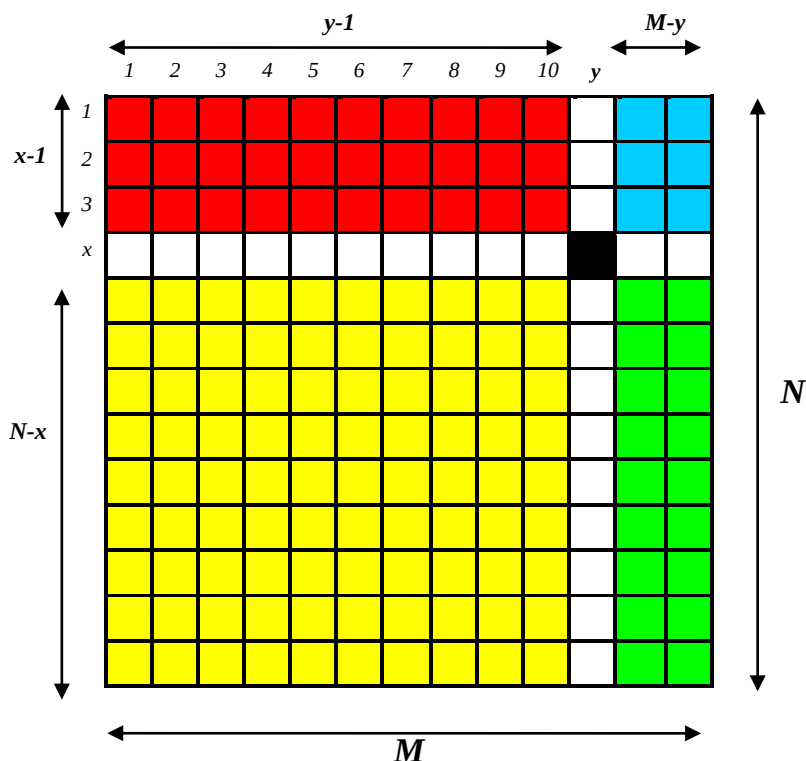


rys. 58

Powyższy dowód odnosi się do szachownicy z usuniętym środkowym polem. Poniżej przedstawię dowód tego samego twierdzenia dla szachownicy, w której zostało usunięte inne niż środkowe pole.

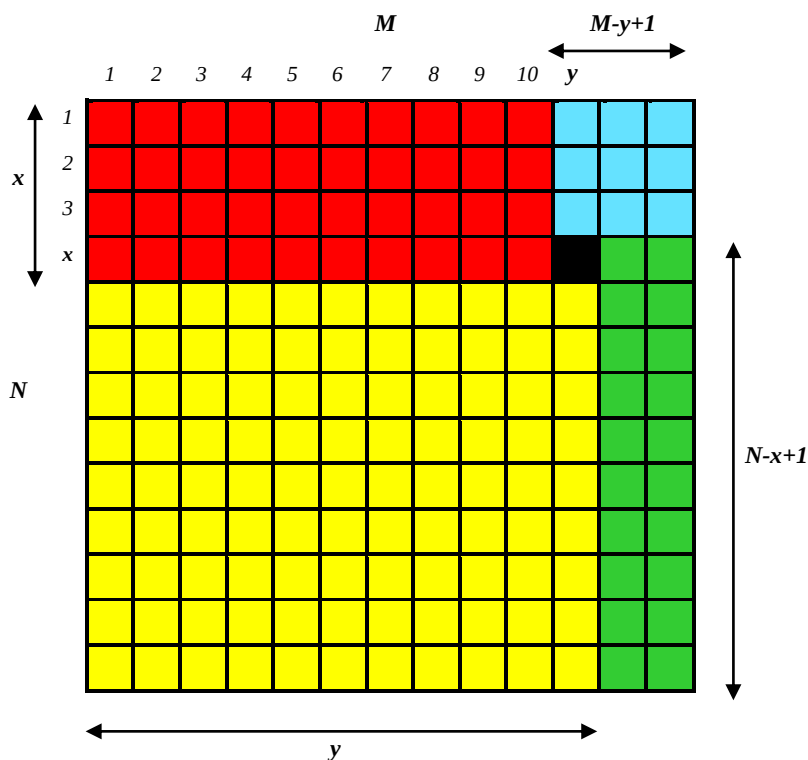
Dowód

1. W szachownicy o wymiarach $M \times N$ wyodrębnić można cztery mniejsze prostokątne szachownice (na rys. 59 pomalowane w kolorze czerwonym, niebieskim, żółtym i zielonym). Czerwona szachownica ma wymiary $x-1 \times y-1$, żółta szachownica ma wymiary $y-1 \times N-x$, niebieska szachownica ma wymiary $x-1 \times M-y$, a zielona szachownica ma wymiary $N-x \times M-y$. Jeżeli liczba n dzieli liczbę $x-1$ i liczba n dzieli liczbę $N-1$, to n dzieli również $N-x$, bo $N-1-(x-1)=N-x$. Analogicznie, jeżeli liczba n dzieli liczbę $y-1$ i liczba n dzieli liczbę $M-1$, to n dzieli również $M-y$, bo $M-1-(y-1)=M-y$. Jeżeli zatem n dzieli: $N-y$, $M-y$, $x-1$ oraz $y-1$, wówczas pokrycie szachownicy klockami o wymiarach $n \times 1$ jest możliwe.



rys. 59

2. W szachownicy o wymiarach $M \times N$ wyodrębnić można cztery prostokątne szachownice (na rys. 60 pomalowane w kolorze czerwonym, niebieskim, żółtym i zielonym). Jeden z boków czerwonej szachownicy ma długość x , jeden z boków żółtej szachownicy ma długość y , jeden z boków niebieskiej szachownicy ma długość $M-y+1$, a jeden z boków zielonej szachownicy ma długość $N-x+1$. Jeżeli liczba n dzieli liczbę y i liczba n dzieli liczbę $M+1$, to n dzieli również $M-y+1$, czyli długość jednego z boków niebieskiej szachownicy. Sytuacja wygląda analogicznie w przypadku boku o długości N : jeżeli liczba n dzieli liczbę x i liczba n dzieli liczbę $N+1$, to n dzieli również $N-x+1$, czyli jeden z boków zielonej szachownicy. Jeżeli zatem n dzieli: $N-x+1$, $M-y+1$, x oraz y , wówczas pokrycie szachownicy klockami o wymiarach $n \times 1$ jest możliwe.



rys. 60

Przykład z artykułu J. Jelisiejewa pt. „Układanie prostokątów”

Dla których całkowitych n szachownicę 2015×2015 z wyciętym środkowym polem można pokryć prostokątami $1 \times n$?

Rozwiązanie:

Szukam takich liczb n , które spełniają jeden z warunków:

1. $n|2014$ oraz $n|1007$,
2. $n|2016$ oraz $n|1008$.

Zgodnie z twierdzeniem nr 3 pokrycie istnieje tylko dla tych n , które są dzielnikami liczb 1007 lub 1008.

Dzielniki liczby 1007 to: 1, 19, 53, 1007;

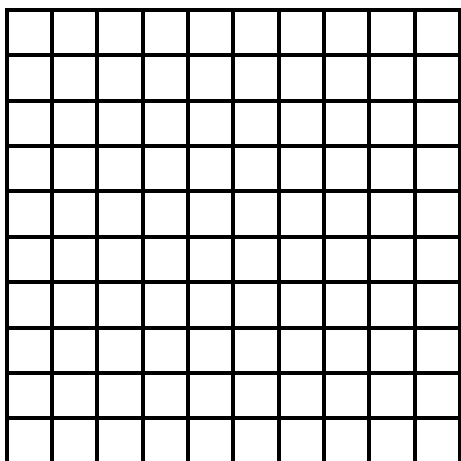
Dzielniki liczby 1008 to: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 63, 126, 252, 504 i 1008.

Szachownicę 2015×2015 z wyciętym środkowym polem można pokryć klockami $1 \times n$ dla $n = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 19, 53, 63, 126, 252, 504, 1007$ i 1008.

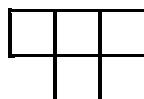
Przykłady z Gazetki Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów „Kwadrat”

Przykład 1

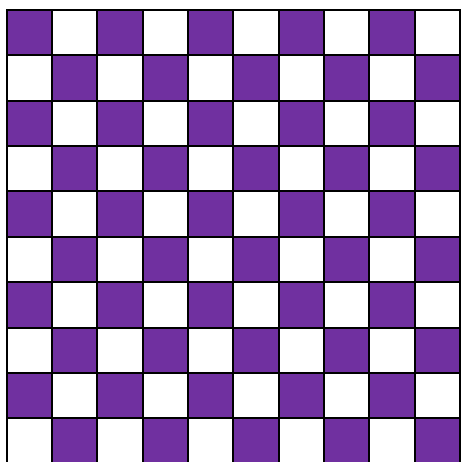
Czy szachownicę o wymiarach 10 x 10 (rys. 61) można pokryć tetraminami w kształcie litery T?



rys. 61



1. Pole szachownicy jest równe $10 \times 10 = 100$, 4 dzieli 100, zatem nie ma sprzeczności.
2. Kolorując szachownicę w sposób podany na rys. 62 sprawdzę, czy szukane pokrycie jest możliwe.

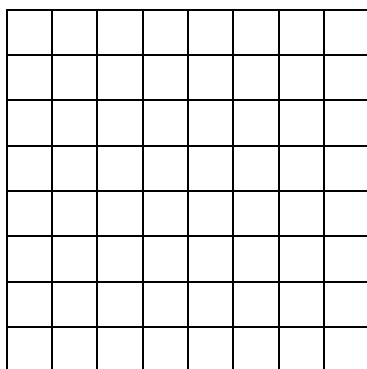


rys. 62

Na szachownicy musiałabym ułożyć $\frac{100}{4} = 25$ klocków. Każdy klocek zajmuje nieparzystą liczbę kolorowych pól (1 albo 3). Liczba pól pokrytych przez 25 klocków również będzie nieparzysta, podczas gdy na szachownicy jest 50 fioletowych pól, czyli ich parzysta liczba. Uzyskana sprzeczność oznacza, że szukane pokrycie nie jest możliwe.

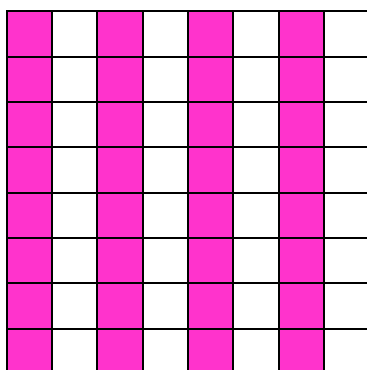
Przykład 2

Czy szachownicę 8 x 8 (rys. 63) można pokryć piętnastoma tetraminami w kształcie litery L oraz jednym tetraminem o wymiarach 2 x 2?



rys. 63

1. Pole szachownicy jest równe 64, bo $8 \times 8 = 64$, 4 dzieli 64 zatem nie ma sprzeczności.
2. Pokoloruję szachownicę jak na rys. 64 żeby sprawdzić, czy szukane pokrycie jest możliwe.

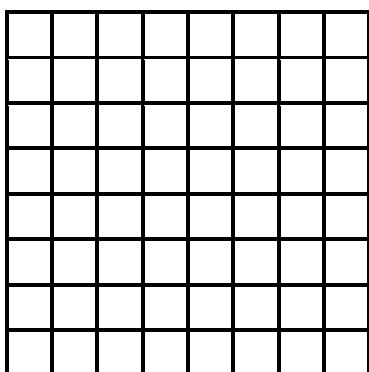


rys. 64

Każdy klocek L – tetramina zajmuje jedno lub trzy różowe pola, czyli nieparzystą liczbę różowych pól. Zatem piętnaście klocek L – tetramina również pokryje nieparzystą liczbę różowych pól (iloczyn liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą). Jedno tetramino o wymiarach 2×2 pokrywa dwa różowe pola, czyli ich parzystą liczbę. Ponieważ suma liczby nieparzystej i parzystej zawsze będzie liczbą nieparzystą, zatem łącznie wszystkie klocki pokryją nieparzystą liczbę różowych pól, podczas gdy na szachownicy są 32 różowe pola. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że szukane pokrycie nie jest możliwe.

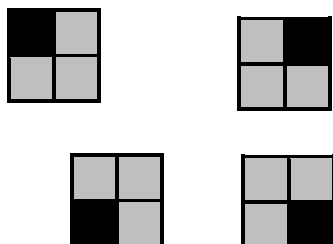
Przykład 3

Dana jest szachownica 8×8 (rys. 65). Na których polach może leżeć monomino, aby szachownicę dało się pokryć 21 triminami w kształcie litery L?



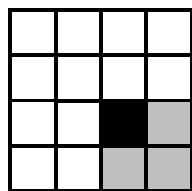
rys. 65

1. W szachownicy o wymiarach 2×2 monomino może być umieszczone w dowolnym miejscu (na rys. 66 zaznaczone na czarno).



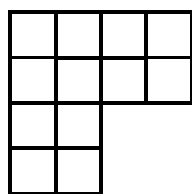
rys. 66

2. Szachownicę o wymiarach 2 x 2 pokrytą jednym L – triminem i jednym monominem (na rys. 67 zaznaczona na szaro) umieścić na jednym z rogów szachownicy 4 x 4



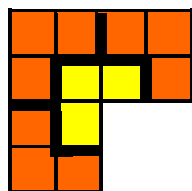
rys. 67

3. Do pokrycia L – triminami pozostała szachownica w kształcie litery L (rys. 68).



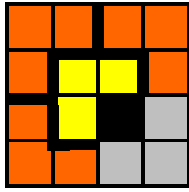
rys. 68

4. W pierwszej kolejności L – triminem należy pokryć pole zaznaczone na poniższym rysunku na żółto. Następnie L – triminem należy pokryć rogi szachownicy (na rys. 69 zaznaczone na pomarańczowo)



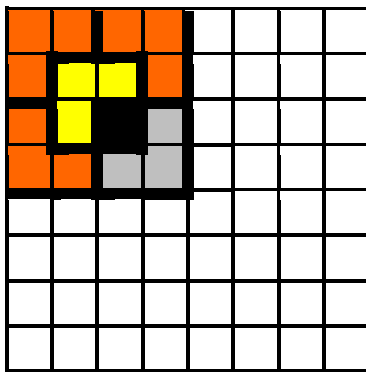
rys. 69

5. Takim sposobem cała szachownica została pokryta jednym monominem i pięcioma L – triminami. Przykład pokrycia zaznaczony został na rys. 70.



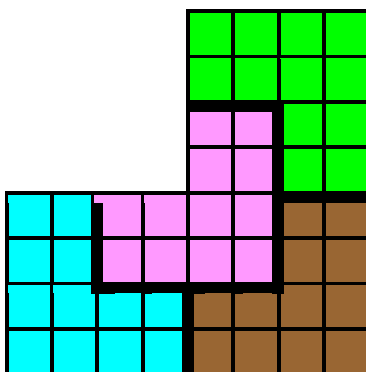
rys. 70

6. W przypadku szachownicy 8 x 8 należy postępować analogicznie, jak w przypadku szachownicy o wymiarach 4 x 4. Szachownicę 4 x 4 należy umieścić na jednym z rogów szachownicy 8 x 8, tak jak na rys. 71.



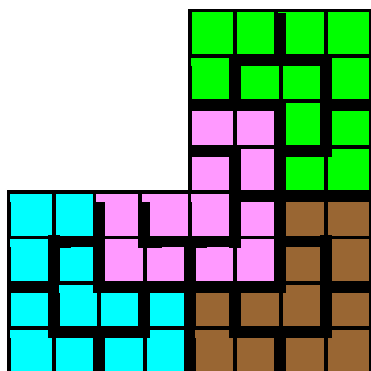
rys. 71

7. Do pokrycia pozostała szachownica w kształcie litery L, która składa się z czterech mniejszych szachownic o tym samym kształcie (na rys. 72 szachownice te pomalowane zostały w kolorze różowym, zielonym, niebieskim i brązowym).



rys. 72

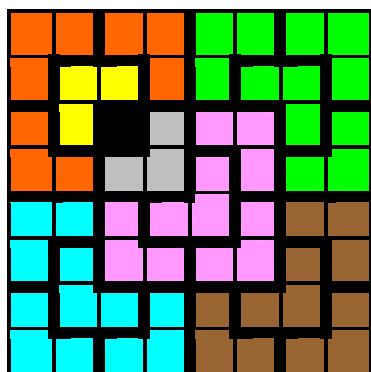
Sposób ich wypełniania L – triminami przestawiony został już w tej pracy w pkt 4.



rys. 73

Wniosek:

W szachownicy o wymiarach 2×2 monomino może leżeć w dowolnym miejscu. Szachownicę 2×2 można umieścić w dowolnym rogu szachownicy 4×4 , a szachownicę 4×4 można umieścić w dowolnym rogu szachownicy 8×8 . Stąd wniosek, że monomino może leżeć w dowolnym miejscu. Wypełniając szachownicę według wskazówek podanych w punktach 1 – 7 całą szachownicę o wymiarach 8×8 można pokryć jednym monominem umieszczonym w dowolnie wybranym miejscu i 21 L – triminami. Jeden z przykładów wypełnienia całej szachownicy przedstawiony został na rys. 74.

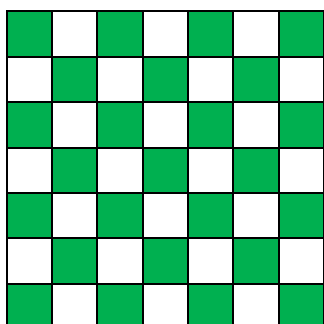


rys. 74

Przykłady z artykułu J. Jelisiejewa „Układanie prostokątów”, Delta, październik 2014

Przykład 1

Na każdym polu szachownicy 7×7 siedzi żaba (rys. 75). Nagle wszystkie żaby skaczą, każda na pole, które sąsiaduje bokiem ze swoim dotychczasowym. Udowodnię, że w rezultacie na któreś pole trafią przynajmniej dwie żaby.

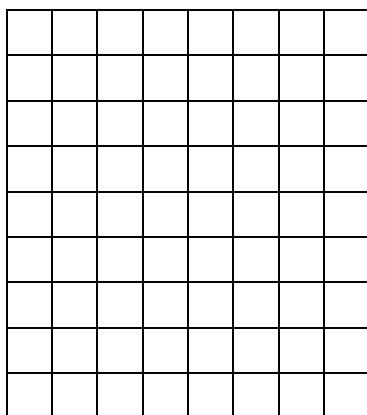


rys. 75

Wszystkich pól szachownicy jest 49. Zielonych pól jest 25 a białych jest 24. Każda żaba skacze z zielonego pola na białe i z białego na zielone. Z białego pola na zielone przeskoczą 24 żaby, zatem jedno pole zielone pozostanie puste. Z zielonego pola na białe przeskoczy 25 żab. W związku z tym, że na zielonych polach znajduje się łącznie 25 żab, a są tylko 24 pola białe, na jedno białe pole muszą skoczyć 2 żaby, co należało dowieść.

Przykład 2

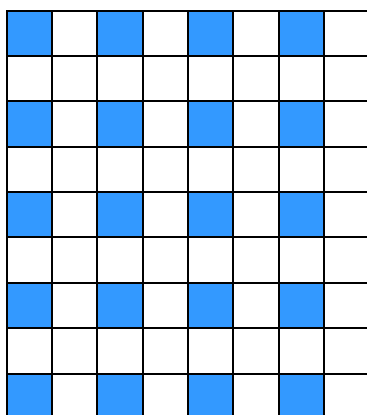
Czy szachownicę 8×9 (rys. 76) można pokryć klockami tetramina o wymiarach 2×2 ?



rys. 76



1. Pole szachownicy jest równe 72, bo $8 \times 9 = 72$, 4 dzieli 72 zatem nie ma sprzeczności.
2. Pokoloruję szachownicę jak na rys. 77 żeby sprawdzić, czy szukane pokrycie jest możliwe.



rys. 77

Na szachownicy musiałabym ułożyć $\frac{72}{4} = 18$ klocków. Każdy klocek zajmuje dokładnie jedno niebieskie pole. Liczba pól pokrytych przez 18 klocków jest równa 18, podczas gdy na szachownicy jest 20 niebieskich pól. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że szukane pokrycie nie jest możliwe.

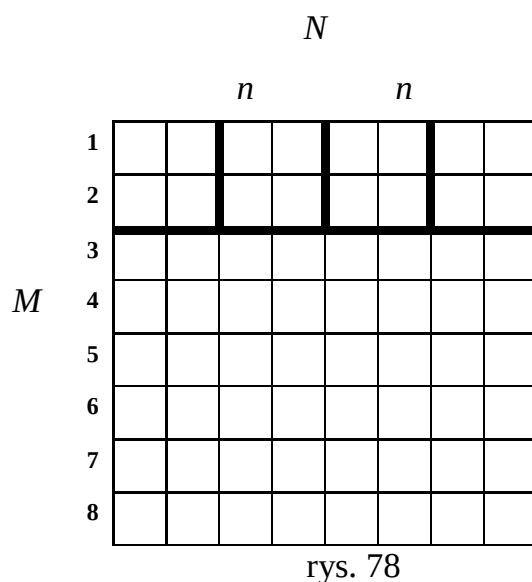
Powyższe rozważania skłoniły mnie do sformułowania następującego twierdzenia:

Twierdzenie nr 4

Klockami o wymiarach 2×2 można pokryć każdą prostokątną szachownicę o wymiarach $M \times N$, jeśli 2 dzieli M i jednocześnie 2 dzieli N .

Dowód

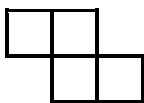
Jeżeli bok N prostokątnej szachownicy wyraża się liczbą podzielną przez 2, to na całej jego długości da się ułożyć klocki polimina tak jak na poniższym rysunku, ponieważ $2|N$. Jeżeli bok M prostokątnej szachownicy wyraża się liczbą podzielną przez 2, to na całej jego długości również da się ułożyć klocki polimina tak jak na rys. 78, ponieważ $2|M$.



Przykłady z książki „*Miniatury matematyczne 41*”

Przykład 1

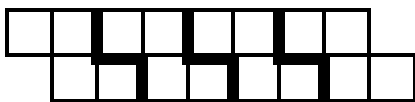
Należy wyznaczyć długości boków prostokąta o minimalnym polu, z którego można wyciąć cztery figury złożone z czterech jednostkowych kwadratów postaci, jak na rys. 79.



rys. 79

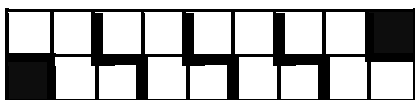
Rozwiązanie:

Po złożeniu czterech figur podanych na powyższym rysunku w najbardziej oszczędny sposób otrzymam następującą figurę składającą się z 16 jednostkowych kwadratów (rys. 80):



rys. 80

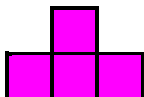
Prostokąt, z którego można wyciąć powyższą figurę geometryczną musi być zatem o minimalnych wymiarach 2×9 (rys. 81).



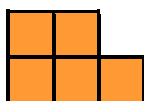
rys. 81

Przykład 2

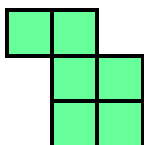
Z czterech spośród pięciu przedstawionych na rys. 82 figur można złożyć kwadrat. Która z tych figur nie będzie wykorzystana?



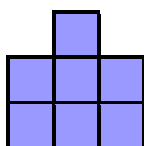
A



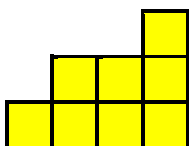
B



C



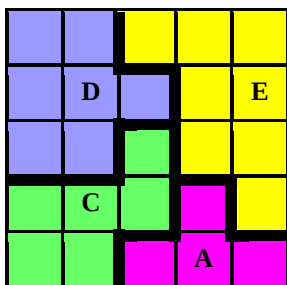
D



E

rys. 82

Łączna liczba jednostkowych kwadratów, z których zbudowane są podane figury A – E wynosi 30. Suma jednostkowych kwadratów każdych czterech figur wynosi co najmniej 22. Pole największego możliwego do utworzenia kwadratu wynosi więc 25. $30 - 25 = 5$ zatem do utworzenia kwadratu nie będzie potrzebny klocek składający się z 5 jednostkowych pól (odpowiedź B). Sposób ułożenia kwadratu przedstawia rys. 83.



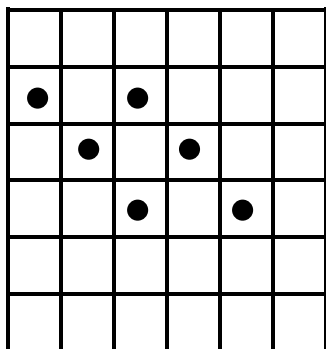
rys. 83

W dalszej części pracy przedstawię łamigłówki, które pochodzą z kwartalnika „Magazyn Miłośników Matematyki” z własnym rozwiązaniem każdej z nich. W każdym z przedstawionych przykładów daną figurę należy podzielić na mniejsze, przystające figury, które zawsze muszą być spójne, tzn. muszą być „w jednym kawałku”. W rozwiązywaniu łamigłówek bardzo ważna była znajomość wypełniania szachownic poliminami oraz spostrzegawczość.

Przykłady z kwartalnika „*Magazyn Miłośników Matematyki*”

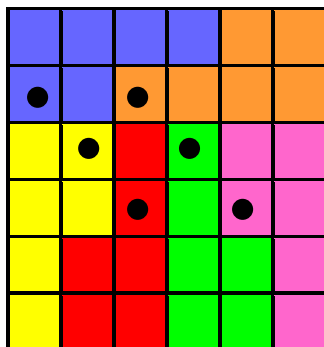
Przykład 1

Stary Szulej, zwany Figowcem, posiadał działkę obsadzoną drzewami figowymi (na rys. 84 drzewa zaznaczono kropkami). Po jego śmierci trzeba było podzielić ten teren między sześcioro dzieci. Zadanie nie było łatwe, bo każde zażądało parceli tego samego kształtu co pozostałe oraz posiadającej drzewo figowe. Pomóż notariuszowi dokonać podziału.



rys. 84

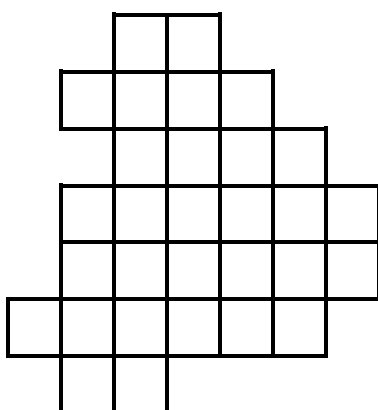
Rozwiązanie przedstawione zostało na rys. 85.



rys. 85

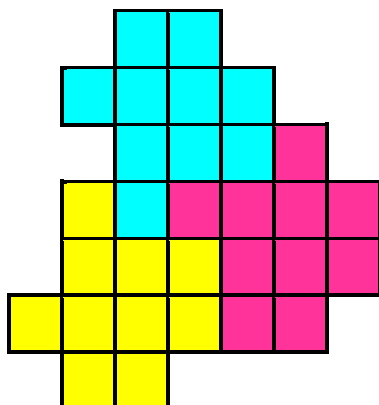
Przykład 2

Ojciec Izydor - właściciel parceli z rys. 86 – zamierza ją podzielić pomiędzy trzech synów w taki sposób, aby wszystkie części były przystającymi wielokątami złożonymi z całych kratek. Zaznacz ten podział.



rys. 86

Rozwiązanie przedstawione zostało na rys. 87.



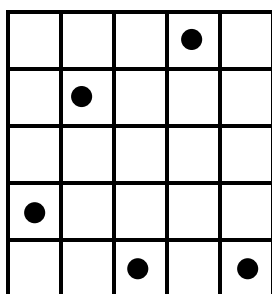
rys. 87

Przykład 3

Posiadłość magnata Gorliwca ma kształt kwadratu podzielonego na 25 jednakowych sektorów (rys. 88). Rośnie tam pięć wspaniałych cedrów libańskich, na planie zaznaczonych kropkami. Magnat ma cztery córki i pragnie podzielić między nie swoją posiadłość, zostawiając jedną parcelę sobie. Wszystkie działki mają mieć jednakową powierzchnię oraz:

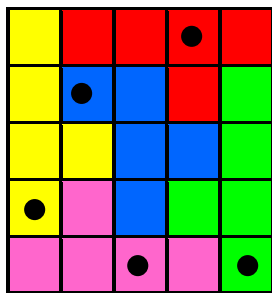
- każda działka ma składać się z całych kratek i zawierać cedr,
- działki córek mają być przystające,
- działka Gorliwca ma mieć inny kształt niż działki córek,
- działki córek mają przylegać przynajmniej jednym bokiem kratki do części ojca oraz do działek dwóch siostr.

Jak dokonać podziału spełniającego powyższe warunki?



rys. 88

Rozwiązanie przedstawione zostało na rys. 89.

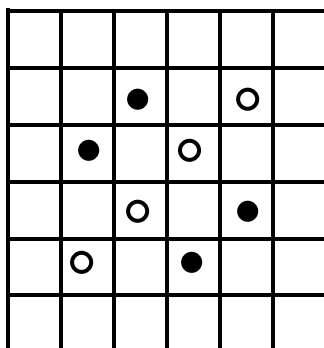


rys. 89

Przykład 4

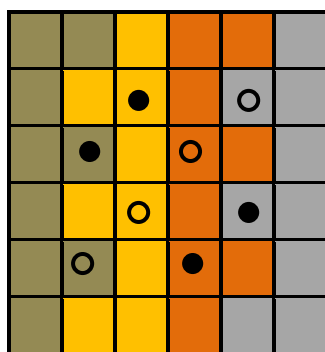
Kwadratową działkę (rys. 90) podziel na cztery części jednakowego kształtu i wielkości tak, aby:

- każda część złożona była z całych kratek,
- każda część zawierała kratkę z klonem (kropka biała) i dębem (kropka czarna).



rys. 90

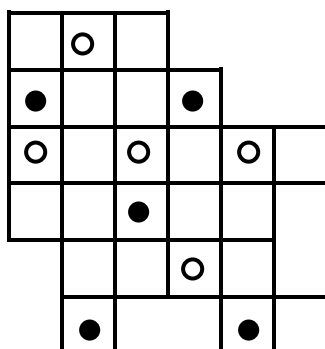
Rozwiązanie przedstawione zostało na rys 91.



rys. 91

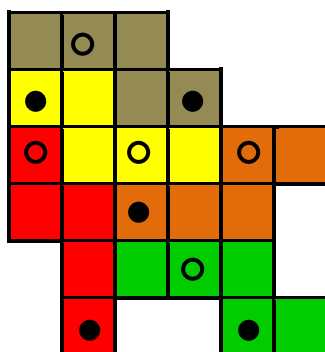
Przykład 5

Na działce starego Tomasza rośnie 5 jabłoni i 5 grusz (rys. 92). Podzielił on ten teren między swoich pięciu synów. Każdy z nich otrzymał parcelę w kształcie przystającego wielokąta z jedną gruszą i jedną jabłonią. Zaznacz podział na rysunku.



rys. 92

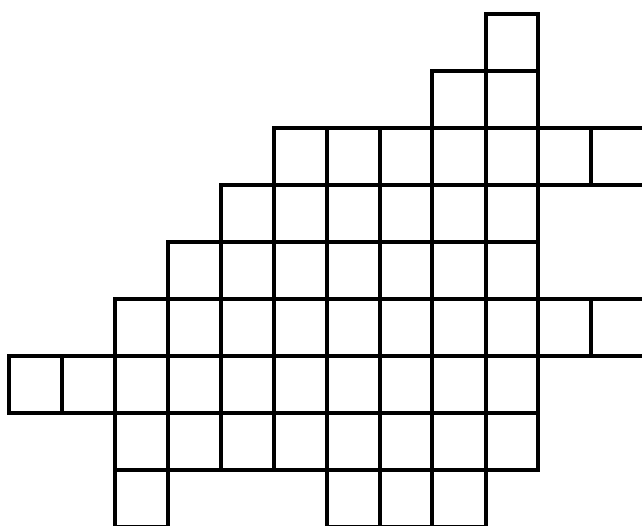
Rozwiązanie przedstawione zostało na rys. 93.



rys. 93

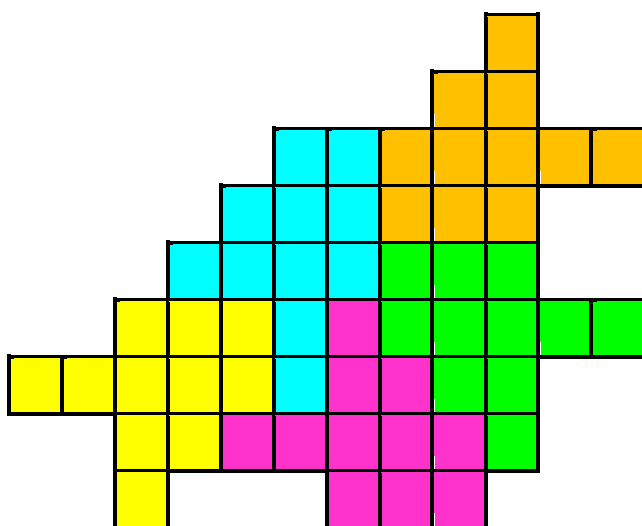
Przykład 6

Ojciec Izydor podzielił teren z rys. 94 na pięć działek mających kształt przystających wielokątów złożonych z całych kratek. Zaznacz ten podział.



rys. 94

Rozwiązanie przedstawione zostało na rys. 95.



rys. 95

Podsumowanie

Polimino jest bardzo ciekawym obiektem prowadzącym do wielu interesujących pytań, np. jakie szachownice można zbudować za pomocą danego polimina, bądź też czy daną szachownicę można pokryć wybranym poliminem. Inny problem to np. jakim poliminem można wypełnić daną szachownicę. Zadania stają się coraz trudniejsze i ciekawsze, gdy z szachownicy zaczniemy usuwać wybrane pola. Aby rozwiązać wiele szachownicowych łamigłówek niezbędna jest również spostrzegawczość. Matematyka, którą tu napotykamy jest bardzo kolorowa, ponieważ często, aby stwierdzić, że jakieś pokrycie jest niemożliwe, wystarczy odpowiednio pokolorować daną szachownicę. Pod względem powierzchni szachownicy wszystko może się zgadzać, jednak próby wypełnienia obszaru kończą się fiaskiem. Wskazówką do dowodu jest pokolorowanie szachownicy. Sposób kolorowania szachownicy związany jest z odnalezieniem niezmiennika, czyli cechy, która nie zmienia się podczas wykonywania operacji opisanych w przykładzie. Bez wgłębiania się w trudne teorie matematyczne można wyjaśnić, dlaczego pewne rzeczy są niemożliwe. Zaprezentowane w pracy rozumowania wyjaśniają przyczyny pewnych niemożliwości na przykładzie prostych układanek. Starłam się wykazać w ten sposób, że problemy sprawiające wrażenie trudnych mogą być względnie łatwo rozwiązywane. Proste przykłady rozumowań uzmysławiają nam, że powody różnych „matematycznych niemożliwości” mogą być zaskakująco czytelne, choć nieraz trudno byłoby je samemu wymyślić.

Literatura:

1. Autorski tygodnik matematyczny J. Wróblewskiego „*Trapez*” Nr 76 (36/2016), piątek, 9 września 2016 r.
2. Bobiński Z., Nodzyński P., Świątek A., Uscki M., „*Miniatury matematyczne 41*”, Towarzystwo Upowszechniania Wiedzy i Nauk Matematycznych, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń 2013 (s. 9 – 15)
3. Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów „*Kwadrat*” Nr 13, wrzesień 2014 (s. 1 – 3)
4. Jelisiejew J. „*Układanie prostokątów*”, Delta, październik 2014, s. 6 – 8
5. „*Magazyn Miłośników Matematyki*”, kwartalnik nr 3 (16) lipiec 2006 (s.17 – 19)
6. Praca zbiorowa pod redakcją J. Jelisiejewa „*Matematyczne Seminarium Olimpijskie*” część pierwsza, Stowarzyszenie na Rzecz Edukacji Matematycznej, Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, Warszawa 2014 (s. 10)
7. www.deltami.edu.pl (Jaszuńska J., „*Kolorowe szachownice*”) dostęp 14.10.2016
8. www.mimuw.edu.pl (Domagalska P., „*Metoda niezmienników i półzmienników*”) dostęp 28.10.2016
9. www.swiatnauki.pl (Penszko M. „*Logika krótkich klepek*”) dostęp: 15.12.2016