

Tajemnice deltościanów

Emilia Dądela Ewa Panuś



Opiekun pracy: mgr Katarzyna Stachnik

Pomysł na tę pracę miał długą historię. Pierwotnie, spośród wielu ciekawych tematów zaproponowanych przez naszą Panią nauczycielkę, wybrałyśmy taki, który łączył naszą pasję do matematyki ze wspólnym zamiłowaniem do różnego rodzaju robótek ręcznych, m.in. małych rękodzieł z papieru. Postanowiłyśmy napisać o płaskich figurach foremnych, które można skonstruować wyłącznie z papieru, bez użycia nożyczek i kleju.

Z zapałem rzuciłyśmy się do pracy. Po pierwszych próbach okazało się to całkiem proste, choć nie obyło się bez niespodzianek. Okazało się, że bez użycia nożyczek, nie da się skonstruować niektórych figur foremnych o nieparzystej liczbie boków. Podczas naszych poszukiwań w internecie (obecnie ogromnej kopalni wiedzy), odkryłyśmy ciekawą stronę o przestrzennych bryłach geometrycznych, zwanych deltościanami. Bryły te można złożyć bez użycia kleju za pomocą wielu tych samych podstawowych elementów – trójkątów równobocznych. A zatem matematyczne origami!

Podjęłyśmy wyzwanie. Zainspirowane przedstawionymi na łamach wspomnianego portalu modelami, postanowiłyśmy, opierając się tylko na podstawowych wskazówkach dla najprostszego 4-deltościanu wypukłego (inaczej czworościanu foremnego), zbudować kilka innych, bardziej skomplikowanych wielościanów. Pierwsze modele tak nas zaciekały, że zdecydowałyśmy, po szybkich konsultacjach z naszą mentorką, poświęcić temat naszej pracy w całości deltościanom, konstruowanym za pomocą techniki składania papieru.

Ponieważ są to bryły przestrzenne, niełatwo jest oddać na papierze ich ciekawy wygląd i strukturę, dlatego dokumentujemy pracę naszymi zdjęciami z różnych etapów pracy, jak również powstałych gotowych brył. Do konstrukcji wykorzystaliśmy: kilkanaście bloków papierów kolorowych, z których powstały elementy bazowe – trójkąty równoboczne w ilości: 262 szt. (do wycinania tej ilości materiału zaangażowałyśmy również członków rodziny). Zbudowałyśmy 18 deltościanów o różnych interesujących parametrach. Istotą tego opracowania okazało się połączenie kreatywności, można powiedzieć nawet –zabawy oraz poważnej dziedziny nauki.

Na dalszych stronach tej pracy zaprezentujemy w sposób szczegółowy nasze bryły, przedstawimy wzory matematyczne znajdujące zastosowanie dla opisywanych wielościanów, w tym znany wzór Eulera, wspomnimy o bryłach platońskich. Spróbujemy również rozwikłać tajemnicę brakującego deltościanu wypukłego o 18-tu ścianach.

Mamy nadzieję, że czytający naszą pracę na tyle zaciekawią się naszymi modelami, iż postanowią stworzyć własne, fascynujące bryły i przyszłości może znajdą kolejny temat do połączenia origami i matematyki.

Zachęcamy do lektury.

Autorki

Wstęp.....	1
Spis treści	3
Origami a matematyka	4
Deltościany	5
Definicje i rodzaje deltościanów.	5
Wzory mające zastosowanie dla deltościanów	8
Deltościany w naturze, sztuce i architekturze	9
Składanie brył techniką origami	12
Modele deltościanów wypukłych	16
4-deltościan wypukły	16
6-deltościan wypukły	17
8-deltościan wypukły	19
10-deltościan wypukły	20
12-deltościan wypukły	21
14-deltościan wypukły	23
16-deltościan wypukły	24
20-deltościan wypukły	26
Tajemnica brakującego 18-deltościanu wypukłego	28
Deltościany wklęsłe	30
Zakończenie	34
Bibliografia.....	35

ORIGAMI A MATEMATYKA

Według dostępnych źródeł¹, sztuka origami narodziła się w Chinach, już około roku 700, ale rozwinęła się na dobre w Japonii i z tym krajem jest kojarzona szeroko w świecie.

Początkowo w tej technice tworzone wyłącznie dekoracje na uroczystości religijne. Następnie, po zmodernizowaniu sposobu wytwarzania papieru, zaczęto na większą skalę wykorzystywać origami w sztuce i również w zabawie. Następnie origami trafiło do szkoły, gdzie stanowi do dnia dzisiejszego jeden z ważnych elementów wychowywania dzieci w Japonii. Jako zabawa i jednocześnie kreatywna nauka pozwala na odkrywanie świata, nie tylko –matematyki, w zupełnie nowy sposób.

W XX wieku ustalono, iż tzw. bazą wyjściową, – czyli podstawowym materiałem dla origamistów będzie kwadratowa kartka papieru, którą należy składać, bez użycia kleju i nożyczek, w celu utworzenia przestrzennych figur.

Sztuka origami była rozwijana na przestrzeni kolejnych lat i powstało tzw. origami modułowe. Odtąd nie jest już obowiązkowe użycie kwadratowej kartki papieru. Modele składane są z przeważnie identycznych, pojedynczych modułów, których liczba może wynosić od kilku do kilkuset (w przypadku zaawansowanych zawodowców).

Oczywiście, w dzisiejszych czasach, często zamiast papieru stosuje się wszelkiego rodzaju komputerowe gadżety i aplikacje w smartfonie. Technika origami również „poszła z duchem czasu”. Dla mniej cierpliwych są dostępne różnorodne aplikacje, zarówno z przydatnymi wskazówkami – jak dany model w rzeczywistości można złożyć, jak również pozwalający na wirtualne składanie modeli we własnym telefonie (m.in. *Origami Master (Paper Folding)* czy *Lets Fold*).

Nie będziemy ukrywać, że większą satysfakcję w układaniu origami daje użycie tradycyjnych metod. Nasze modele deltościanów, budowane w całości w papierowej wersji, wywodzą się właśnie z modułowej odmiany origami, gdzie wyjściowym elementem jest trójkąt równoboczny i powstały z niego moduł, przedstawiony w kolejnej części pracy.

DELTOŚCIANY

DEFINICJE I RODZAJE DELTOŚCIANÓW.

Wielościany (do takich należą nasze deltościany) to zgodnie z definicją: bryły geometryczne ograniczone przez tak zwaną powierzchnię wielościenną, czyli utworzoną z wielokątów o rozłącznych wnętrzach, i każdym boku wspólnym dla dwóch wielokątów. Wielokąty te nazywają się ścianami wielościanu. Ich boki to krawędzie wielościanu, a wierzchołki to wierzchołki wielościanu. Wielościan nazywamy wypukłym, jeżeli leży po jednej stronie każdej ze swoich ścian.

Wśród wielościanów znajdują się **deltościany**, czyli bryły, których wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi. Ich nazwa pochodzi od czwartej (dużej) litery alfabetu greckiego, której kształt to właśnie trójkąt: **Δ**.

Wśród deltościanów również wyróżniamy deltościany wypukłe oraz wklęsłe. Deltościanów wypukłych jest zaledwie 8. Każdy z nich został przez nas skonstruowany i opisany w dalszej części pracy. Deltościanów wklęsłych jest nieskończenie wiele (zbudowaliśmy 10 modeli).

Deltościany wypukłe to:

Deltościany wypukłe	Nazwa matematyczna	Nazwa angielska	Nazwa grecka dla foremnych deltościanów
4-deltościan	czworokąt foremny	tetrahedron	Tetraedr
6-deltościan	dwupiramida trójkątna	triangular bipyramid	
8-deltościan	ośmiościan foremny, dwupiramida kwadratowa	octahedron	Octaedr
10-deltościan	dwupiramida pięciokątna	pentagonal bipyramid	
12-deltościan	dwunastodeltościan	snub disphenoid	
14-deltościan	potrójnie powiększony graniastosłup trójkątny	triaugmented triangular prism	
16-deltościan	szesnastodeltościan	gyroelongated square bipyramid	
20-deltościan	dwudziestościan foremny	icosahedron	Ikosaedr

Tab. 1.1 Rodzaje deltościanów

Jak łatwo zauważyć w powyższym zestawieniu, liczba ścian jest parzysta i z każdym kolejnym deltościanem wypukłym rośnie o 2. Ta prawidłowość nie jest zachowana między deltościanem o 16 ścianach, a dwudziestościanem. Brakuje bowiem 18-deltościanu wypukłego. Tej tajemnicy poświęcimy odrębny rozdział naszej pracy.

Skoro deltościan ma być wypukły i jego ścianą ma być trójkąt równoboczny można również zaobserwować, że nasze deltościany foremne mogą mieć tylko wierzchołki o 3, 4 i maksymalnie 5 schodzących się krawędziach. W wierzchołku każdego wielościanu muszą schodzić się co najmniej trzy ściany, a suma kątów płaskich tworzących jego naroże (wierzchołek) musi być mniejsza niż 360° . Nie istnieją więc wypukłe deltościany o liczbie ścian mniejszej niż 4 i większej niż 20.

Do szczególnych wielościanów zalicza się tzw. **bryły platońskie**, inaczej bryły idealne, których istnieje **tylko pięć**. Wielościan foremny (bryła platońska) to wielościan spełniający następujące warunki:

- ściany są przystającymi wielokątami foremnymi;
- w każdym wierzchołku zbiega się jednakowa liczba ścian;
- wszystkie ściany i kąty są równe;
- jest bryłą wypukłą (czyli odcinek poprowadzony pomiędzy dwoma dowolnymi punktami wielościanu, w całości się w nim zawiera);
- żaden kąt nie jest większy niż 180° ;
- są całkowicie foremne, czyli patrząc na którykolwiek wierzchołek, bryła wygląda tak samo.

Ich nazwa pochodzi oczywiście od greckiego filozofa Platona, który jako pierwszy odnotował fakt istnienia ściśle określonej liczby tych brył. Platon opisał je w dziele „Timajos”, gdzie dodatkowo każdy z wielościanów symbolizował jeden z żywiołów.

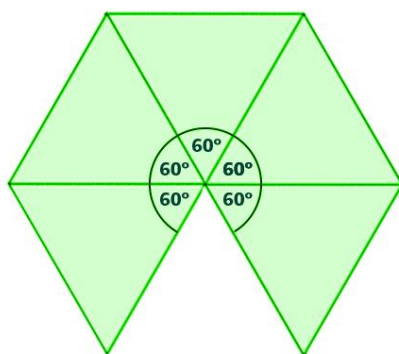
Aż **trzy** z tych idealnych wielościanów stanowią **deltościany foremne**, co świadczy o wyjątkowości tych właśnie brył. Zaliczamy do nich: czworościan foremny (tetraedr), ośmiościan foremny (oktaedr), dwudziestościan foremny (ikosaedr). Żywioły przypisane przez Platona naszym deltościanom to idąc od najprostszego: ogień, powietrze i woda.

Jeśli kąt trójkąta równobocznego jest równy 60° , suma zaś wszystkich kątów płaskich kąta wierzchołkowego musi być mniejsza od 360° , więc z jednego wierzchołka mogą wychodzić:

3 krawędzie: $60^\circ \times 3 = 180^\circ < 360^\circ$, albo

4 krawędzie: $60^\circ \times 4 = 240^\circ < 360^\circ$, albo

5 krawędzi: $60^\circ \times 5 = 300^\circ < 360^\circ$.



Obrazuje to powyższa grafika.

Gdyby dołożyć kolejny trójkąt równoboczny powstałby już nie wierzchołek wielościanu, a sześciokąt foremny. Prawdziwe jest zatem założenie, że z trójkątów równobocznych można zbudować nie więcej niż 3 wielościany foremne.

A dlaczego nie istnieje więcej niż pięć wielościanów foremnych?

Przeprowadzić można bardzo prosty dowód².

Skoro z trójkątów równobocznych powstały maksymalnie trzy wielościany foremne, rozważyć należy następne figury foremne. Następny jest kwadrat.

Trzy kwadraty utworzą wierzchołek o następującej sumie kątów:

$$3 \times 90^\circ = 270^\circ$$

Natomiast już 4 kwadraty znowu utworzą figurę płaską:

$$4 \times 90^\circ = 360^\circ$$

W przypadku kolejnej figury foremnej, czyli pięciokąta, sytuacja wygląda następująco:

$$3 \times 108^\circ = 324^\circ$$

A zatem nie ma sensu rozważać wierzchołka łączącego więcej niż trzy pięciokąty.

W każdej następnej figurze rośnie rozmiar kąta między sąsiadującymi bokami, i dla sześciokąta foremnego wynosi już 120° , z którego zatem nie da się zbudować naroża wielościanu foremnego ($3 \times 120^\circ = 360^\circ$).

Dowodzimy zatem, że nie może istnieć więcej niż pięć wielościanów foremnych,

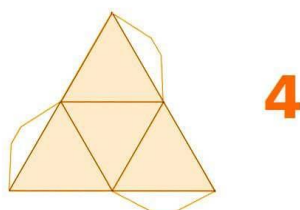
Z czego 3 to deltoidy, 1 wielościan złożony z kwadratów – sześciokąt (gr. heksaedr), a jeden wielościan złożony z pięciokątów foremnych (dodekaedr).

Dla wielościanów (zwykłych, wypukłych) zachodzi następująca prawidłowość: Jeśli S oznacza liczbę ścian, W liczbę wierzchołków, a K liczbę krawędzi, to:

$$W + S = K + 2$$

Jest to tzw. wzór Eulera dla wielościanów. Pochodzi od nazwiska Leonarda Eulera, szwajcarskiego matematyka i fizyka, który jako pierwszy dokładnie opisał tę zależność. Jest to bardzo prosta zależność, chociaż oddaje podstawową właściwość tych trójwymiarowych brył.

Weźmiemy teraz dowolną siatkę wielościanu foremnego, u nas będzie to najprostszy deltościan, czyli czworościan foremny. Oznaczmy liczbę ścian przez S , liczbę krawędzi przez K , i liczbę wierzchołków przez W .



Jeśli weźmiemy pod uwagę tylko jeden, pierwszy trójkąt, wtedy $S = 1$, liczba boków tego trójkąta, czyli liczba krawędzi będzie równa liczbie wierzchołków, tj. $W = K$, a zatem otrzymujemy zależność:

$$S + W = K + 1$$

Teraz dodamy kolejny przylegający trójkąt. Wtedy: $S = 2$, ponieważ te trójkąty mają jedną krawędź wspólną i dwa wspólne wierzchołki, więc liczba krawędzi będzie o 1 większa niż wierzchołków: $K = W + 1$, a więc będzie znowu:

$$S + W = K + 1$$

Idąc dalej w ten sposób ustalimy, że ta zależność będzie stała, aż do momentu, kiedy dołączymy ostatni trójkąt i wszystkie trójkąty domkniemy w bryłę, tworząc w tym przypadku czworościan foremny, i zauważyć można, że przez ostatnie dołączenie liczba krawędzi i wierzchołków pozostanie bez zmiany (były one już ujęte poprzednio), dołączy tylko jedna ściana, a zatem będzie ostatecznie:

$$S + W = K + 2$$

Jest to potwierdzenie wzoru Eulera: w wielościanie wypukłym liczba ścian i wierzchołków jest o 2 większa od liczby krawędzi. Jak dalej wykażemy twierdzenie to będzie prawdziwe dla wszystkich naszych brył.

Na podstawie tego wzoru można również udowodnić, iż nie istnieją wielościany o siedmiu krawędziach, jak również, że nie może być więcej niż 5 brył platońskich. Nie jest to jednakże tematem naszej pracy.

Kolejnym wzorem, który ma zastosowanie dla wszystkich deltościanów: liczba krawędzi równa się potrojonej liczbie ścian, podzielonej przez 2, czyli:

$$K = \frac{3S}{2}$$

DELTOŚCIANY W NATURZE, SZTUCE I ARCHITEKTURZE

Wracamy do naszych deltościanów, które łącznie z innymi wielościanami fascynowały i fascynują nadal, nie tylko matematyków i filozofów.

Dlaczego wielościany są tak interesujące? Między innymi dlatego, że możemy je nawet odnaleźć w przyrodzie, w naturze. Na przykład kształty deltościanu przyjmują kryształy fluorytu (występuje m.in. w postaci ośmiościanu), a kasyteryty przyjmują postać słupkową, zakończoną dwupiramidą). Kryształ stanowi jednorodną wielościenną formę o bardzo uporządkowanym zestawie ścian, krawędzi i wierzchołków, wyznaczonych przez prawidłowe ułożenie budujących go najmniejszych cegiełek materii³. Brzmi to bardzo podobnie do budowy wielościanów i zasadniczo ma wiele ze sobą wspólnego. Nauka, która zajmuje się badaniem stanu krystalicznego minerałów to krystalografia.



Fluoryt

Źródło: <http://orgonity.com.pl/fluoryt>



Fluoryt

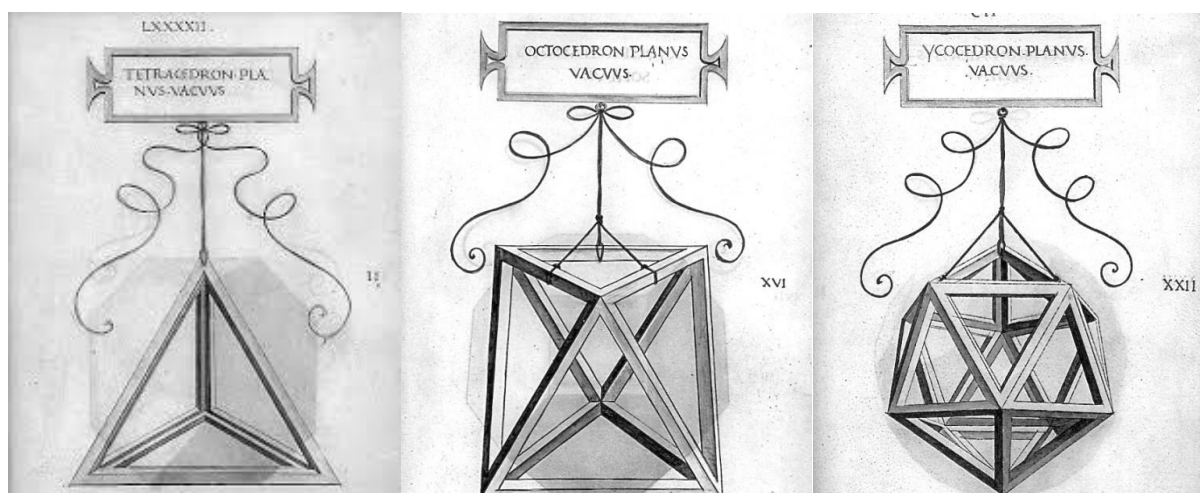
<http://www.redcrystal.pl>



Kasyteryt

Źródło: <https://pl.wikipedia.org>

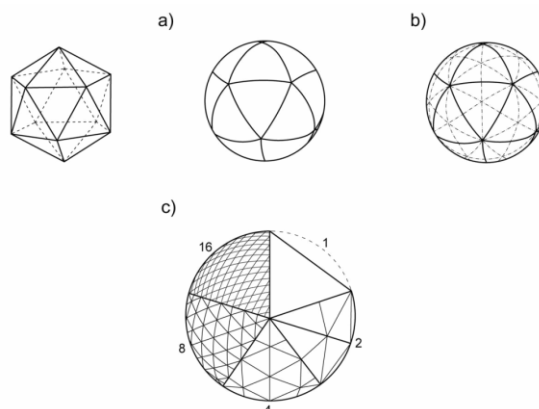
Bryły platońskie inspirowały także ludzi sztuki, m.in. nasze deltościany foremne znajdziemy wśród zilustrowanych przez słynnego mistrza Leonarda da Vinci w dziele matematycznym autorstwa Luci Paciolego „De Divina Proportione”⁴ (tłum. „boska proporcja”, u nas znana jako „złota proporcja”). Poniżej te właśnie deltościany:



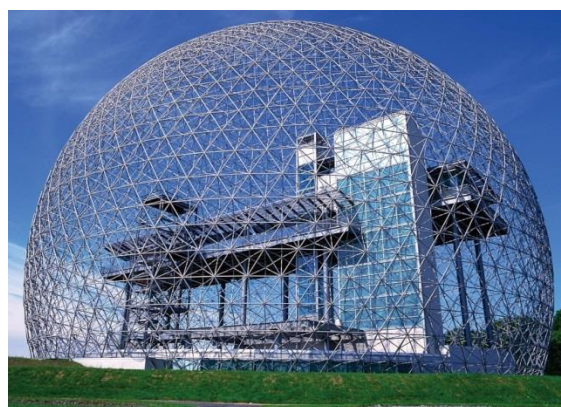
Źródło: podane za Zdzisławem Pogoda „Galeria wielościanów”, ilustracje: Leonardo da Vinci

Nie można również nie zauważyć inspiracji deltościanami w architekturze. Często stosowana jest m.in. kopuła geodezyjna, tzw. kopuła Fullera, który opracował procedurę podziału sfery na trójkąty sferyczne. Opis na przykładzie dwudziestościanu, jako bryły wyjściowej został opatentowany w 1954 r. Metoda polegała na wyjściu od dwudziestościanu, złożonego z 20 równobocznych trójkątów i dzieleniu każdego trójkąta na sześć, poprzez podział każdego boku na dwie części i poprowadzenie

"prostej" do przeciwległego wierzchołka. W ten sposób na powierzchni kuli tworzyło się 15-naście pełnych wielkich kół.

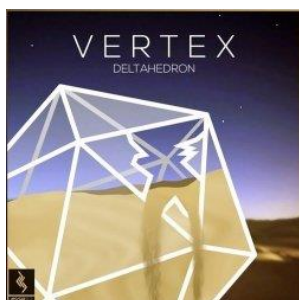


I przykłady kopuł geodezyjnych:



Źródło powyższych trzech grafik: <http://chodor-projekt.net/encyclopedia/kopula-geodezyjna/>

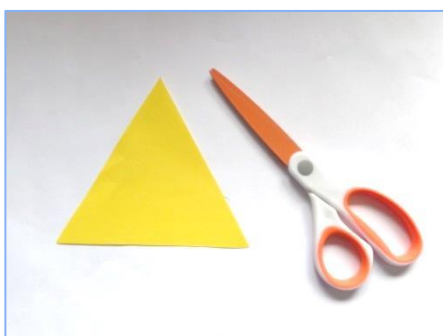
Na koniec można przytoczyć jeszcze jedną ciekawostkę, która jednoznacznie potwierdza, że deltościany potrafią w nieoczekiwany sposób zainspirować. Powstał zagraniczny projekt muzyczny o nazwie angielskiej „*DeltaHedron*” (tłum. pol.: „deltościan”) z płytą muzyki elektronicznej pt. „*Vertex*” (tłum. pol.: „wierzchołek”).



W tej części pracy prezentujemy na zdjęciach i opisujemy, jak sporządziliśmy pojedynczy moduł z papieru, który był następnie podstawą do tworzenia każdego naszego deltościanu, począwszy od najprostszego, czyli czworościanu.

Tak, jak pisałyśmy w rozdziale: *Origami a matematyka*, do sporządzenia deltościanów wykorzystujemy origami modułowe.

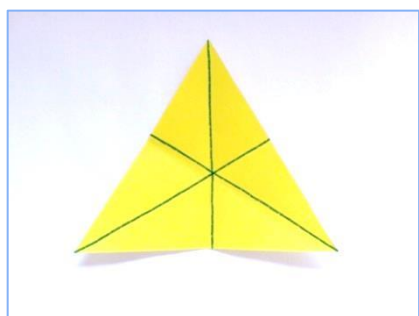
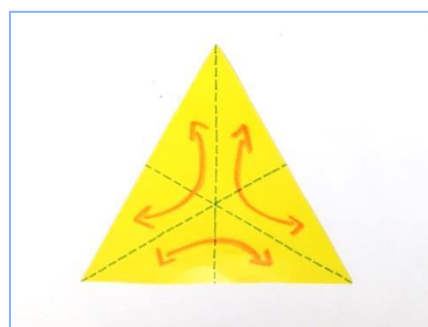
A oto kolejne etapy tworzenia modułu bazowego.



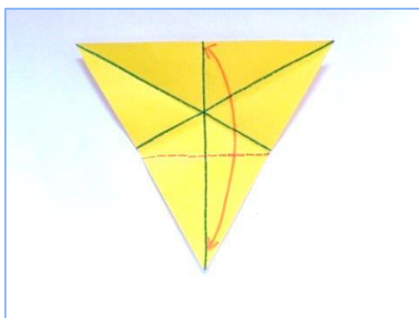
Aby stworzyć moduł do złożenia deltościanu potrzebujemy papierowego trójkąta równobocznego (najlepiej użyć papieru kolorowego – wtedy nasze deltościany będą bardziej atrakcyjne) oraz nożyczek.

Bardzo ważne jest, aby wszystkie trójkąty, z których składać będziemy moduły (a później także deltościany) miały dokładnie te same rozmiary.

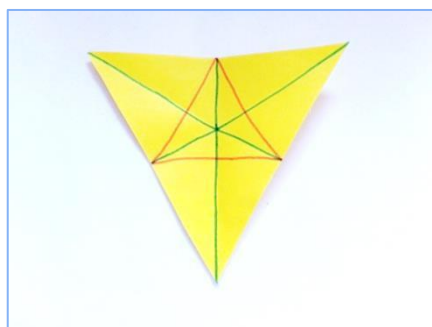
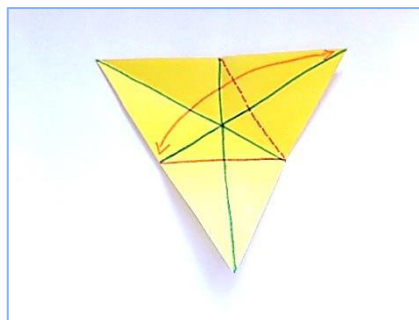
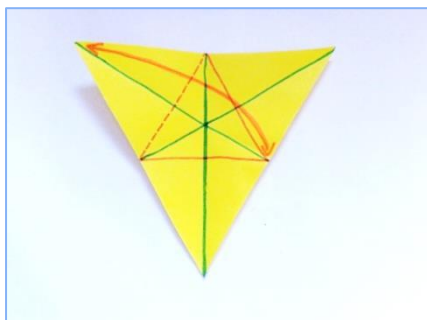
Na początku zaginamy trójkąt w taki sposób, tak, aby zgięcie przebiegało wzdłuż jego wysokości (dzielimy trójkąt na pół). Prostujemy trójkąt. Robimy tak jeszcze dwa razy, za każdym z innej strony, czyli wzdłuż wysokości wyznaczonych ze wszystkich wierzchołków.



Powstała figura ze zgięciami biegnącymi wzdłuż wysokości trójkąta.

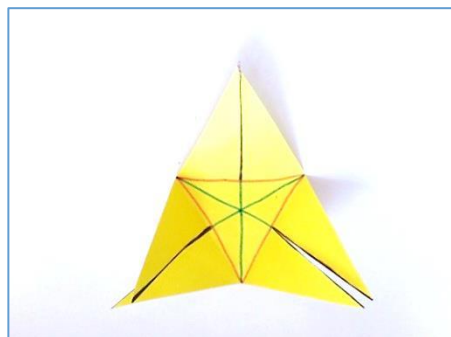
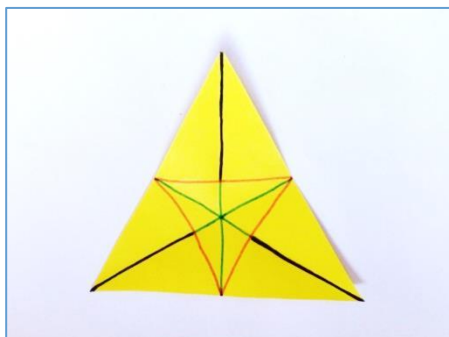


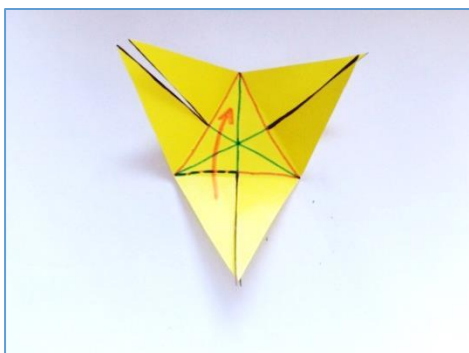
Teraz wierzchołek trójkąta zginamy do końca przeciwległej krawędzi. Powtarzamy to dwa razy, za każdym razem z innego wierzchołka. Linią czerwoną zaznaczono powstałe nowe zagięcia.



Powstał nam trójkąt z takimi oto zagięciami.

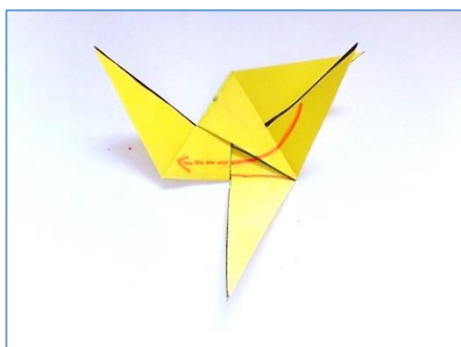
Teraz należy przeciąć trójkąt wzdłuż czarnych linii.





Następnie układając przed sobą trójkąt tak jak obok na obrazku, lewe dolne skrzydełko zaginamy do środka.

To samo robimy z kolejnym, kładąc je na poprzednim.



Ostatnie skrzydełko, które będziemy zaginać, wsuwamy do powstałej kieszonki, zgodnie z rysunkiem obok.

Tak oto powstał gotowy moduł.



Wskazówka: aby deltościan, którego będziemy później składać z modułów, był bardziej stabilny, warto zagiąć jeszcze jego skrzydełka do tyłu.



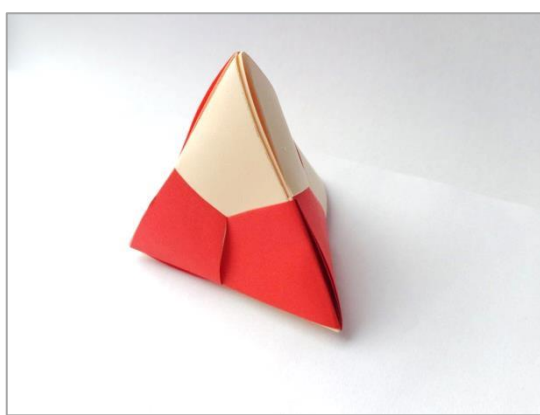
W ten sposób powstał jeden gotowy moduł. Do wszystkich skonstruowanych przez nas deltościanów użyliśmy 262-óch takich złożonych modułów.

Moduły w naszych bryłach łączy się ze sobą wsuwając skrzydełko jednego z nich do kieszonki modułu, który ma z nim sąsiadować i odwrotnie.

W tym rozdziale przedstawimy w sposób wizualny i opisowy nasze konstrukcje.

4-DELTOŚCIAN WYPUKŁY

4-deltościan, inaczej czworościan foremny. Jest bryłą platońską, a zatem spełnia warunek wypukłości i foremności.



Liczba wierzchołków	Liczba krawędzi:	Liczba ścian	Ilość użytych elementów
4	6	4	4

Jest najprostszym i najłatwiejszym deltościanem do złożenia.

Jest też najbardziej stabilnym, bo składa się z najmniejszej ilości elementów.

Do jego złożenia potrzeba jedynie 4 modułów.

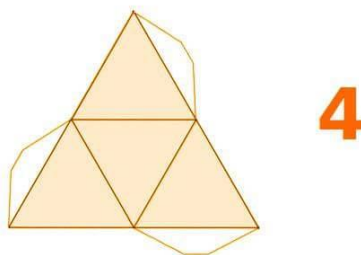


Sprawdzenie wzoru Eulera:

$W+S=K+2$, czyli: $4+4=6+2$

Ciekawą własnością czworościanu foremnego jest to, iż może on być wpisany w sześćcian (czyli inny wielokąt foremny) na dwa sposoby, tak, aby każdy jego wierzchołek pokrywał się z jakimś wierzchołkiem sześćcianu, a każda jego krawędź z przekątną jednej ze ścian sześćcianu. Objętość każdego z tych czworościanów wynosi $\frac{1}{3}$ objętości sześćcianu. Suma mnogościowa tych dwóch czworościanów tworzy wielościan zwany „stella octangula” (również przez nas zbudowany – galeria deltościanów wklęsłych), a ich część wspólna tworzy ośmiościan foremny.

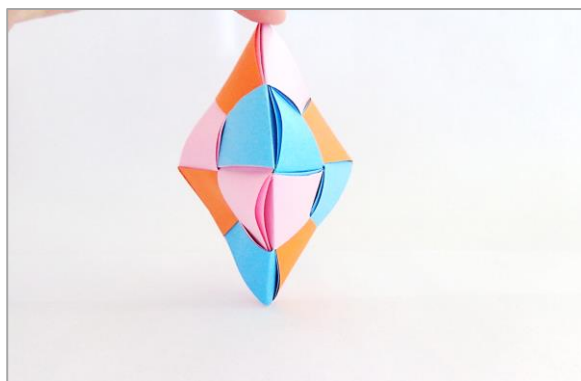
Siatka do złożenia bryły techniką tradycyjną:



6-DELTOŚCIAN WYPUKŁY

6-deltościan wypukły inaczej zwany jest dwupiramidą trójkątną. Nie jest bryłą platońską, ale należy do tzw. wielościanów Johnsona (od nazwiska Normana Johnsona, który opisał je w 1966 roku w swojej pracy doktorskiej).





Liczba wierzchołków	Liczba krawędzi:	Liczba ścian	Ilość użytych elementów
5	9	6	6

Ta bryła może powstać z dwóch piramid o podstawie trójkąta.

Sprawdzenie wzoru Eulera:

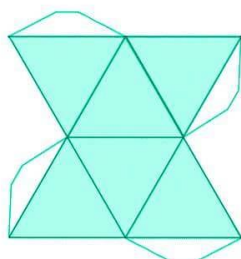
$W+S=K+2$, czyli: $5+6=9+2$

Deltościan ten może się składać z dwóch czworościanów foremnych sklejonych podstawami.

Do jego złożenia potrzeba 6 modułów:



Siatka do złożenia bryły metodą tradycyjną prezentowałaby się następująco:



6

8-DELTOŚCIAN WYPUKŁY

8-deltościan wypukły, ośmiościan foremny, inaczej dwupiramida kwadratowa, lub graniastosłup trójkątny skręcony. Jest kolejną w naszej kolekcji bryłą platońską.



Liczba wierzchołków	Liczba krawędzi:	Liczba ścian	Ilość użytych elementów
6	12	8	8

Jest deltościanem o najdłuższej nazwie, ponieważ ma wiele własności.

Ma trzy przekątne. Ścinając wierzchołki ośmiościanu otrzymujemy wielościan półforemny o nazwie ośmiościan ścięty. Ośmiościan foremny jest także antygraniastosłupem. Ma cztery pary ścian do siebie równoległych.

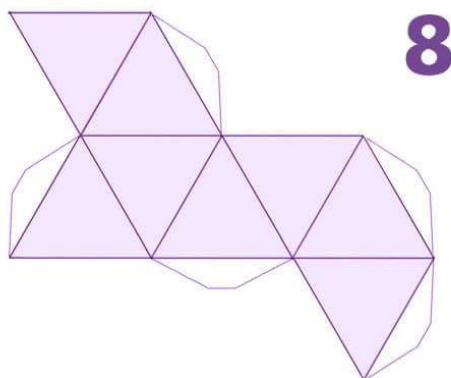
Do jego złożenia potrzeba 8 modułów.



Sprawdzenie wzoru Eulera:

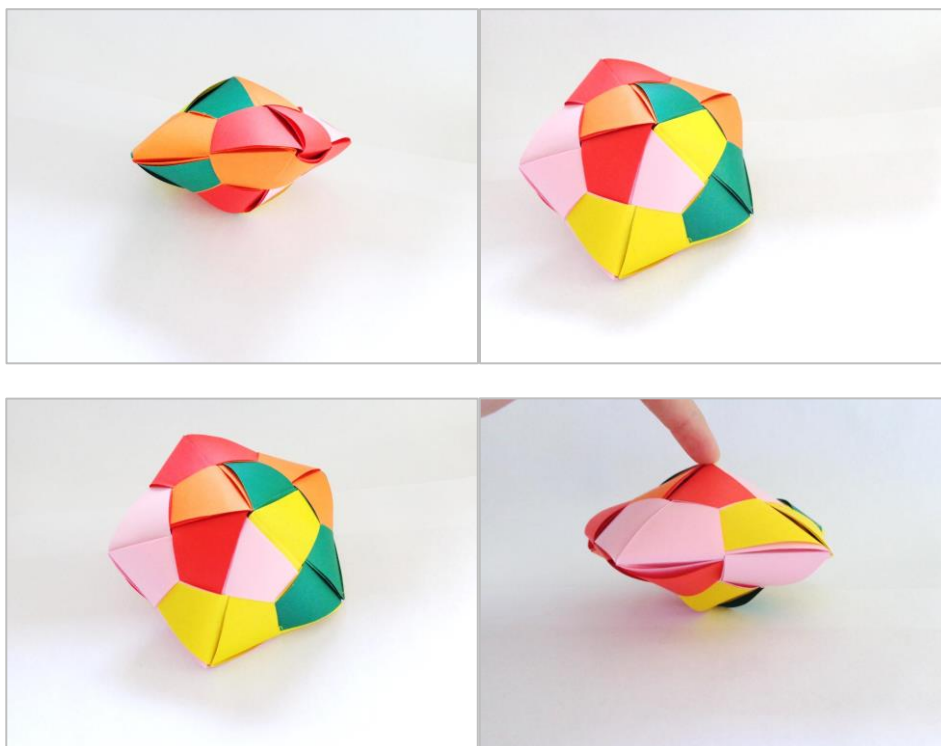
$$W+S=K+2, \text{ czyli: } 6+8=12+2$$

Siatka modelu standardowego:



10-DELTOŚCIAN WYPUKŁY

10-deltościan wypukły, inaczej dwupiramida pięciokątna. Druga nazwa wyjaśnia, z jakich innych brył można ją złożyć – w tym przypadku z dwóch piramid o podstawie pięciokąta. Jest kolejną bryłą Johnsona.



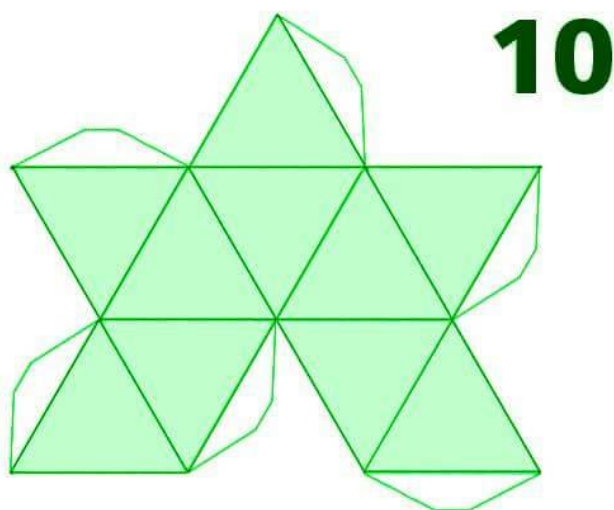
Liczba wierzchołków	Liczba krawędzi:	Liczba ścian	Ilość użytych elementów
7	15	10	10

Do złożenia tej bryły potrzeba 10 modułów.

Sprawdzenie wzoru Eulera:

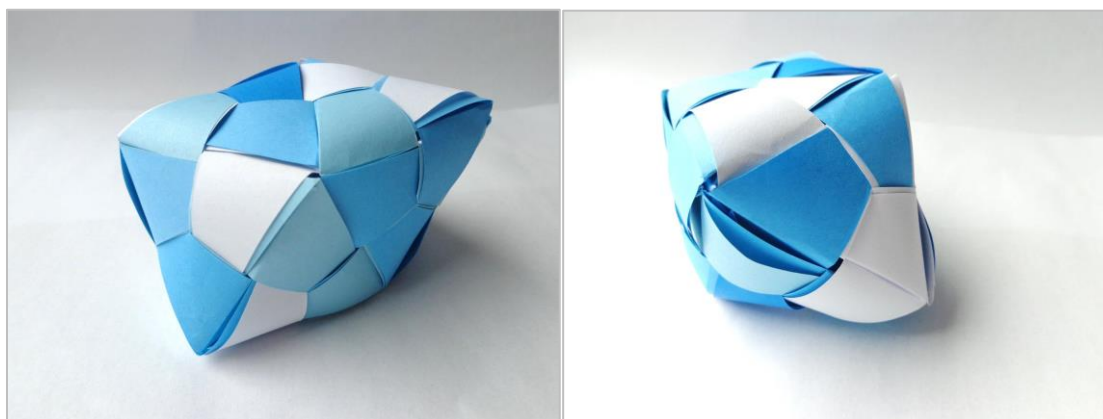
$W+S=K+2$, czyli: $7+10=15+2$

Siatka do złożenia modelu w sposób tradycyjny wyglądałaby następująco:



12-DELTOŚCIAN WYPUKŁY

Kolejny z wielościanów Johnsona: 12-deltościan wypukły, dwuklinoid przycięty.





Liczba wierzchołków	Liczba krawędzi:	Liczba ścian	Ilość użytych elementów
8	18	12	12

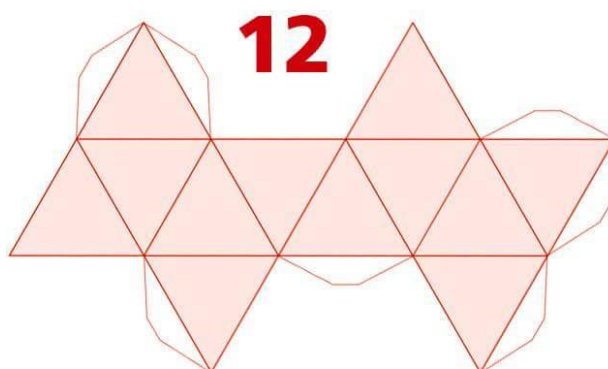
Może powstać poprzez przecięcie dwóch sąsiednich krawędzi z talii dwupiramidy pięciokątnej i wstawienie w lukę dwóch trójkątów.

Do jego złożenia potrzeba 12 elementów.

Sprawdzenie wzoru Eulera:

$$W+S= K+2, \text{ czyli: } 8+12=18+2$$

Standardowa siatka do złożenia 12-deltaścianu wyglądałaby następująco:



14-DELTOŚCIAN WYPUKŁY

14-deltościan wypukły, inaczej nazywany potrójnie powiększonym graniastosłupem trójkątnym. Jest to następna bryła Johnsona. Bardzo ciekawa bryła, która, jeśli popatrzymy na nią każdorazowo z innej strony, wygląda zupełnie inaczej, co widać poniżej.



Liczba wierzchołków	Liczba krawędzi:	Liczba ścian	Ilość użytych elementów
9	21	14	14

Jak jego nazwa wskazuje, 14-deltościan wypukły powstać może z doklejenia do ścian bocznych graniastosłupa trójkątnego piramid kwadratowych.

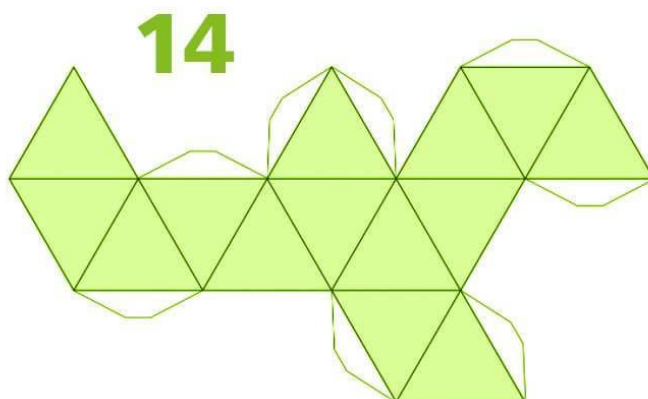
Sprawdzenie wzoru Eulera:

$$W+S= K+2, \text{ czyli: } 9+14=21+2$$

Do jego złożenia potrzeba 14 elementów.

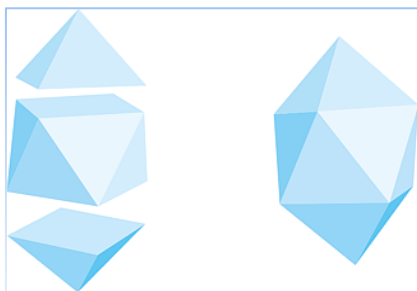


A standardowa siatka konstrukcyjna wyglądałaby tak:



16-DELTOŚCIAN WYPUKŁY

16-deltościan wypukły, czyli inaczej: skrętnie wydłużona dwupiramida czworokątna (bryła Johnsona). Jak sama nazwa wskazuje, bryła jest dość skomplikowana. Może powstać również przez: doklejenie ostrosłupów do podstaw antygraniastopuła kwadratowego.



Źródło: <http://www.matematyka.wroc.pl/book/deltosciany>

Poniżej nasza bryła. Należy zauważyć, iż wraz z ilością użytych modułów, czyli wzrostem stopnia skomplikowania modelu, znacząco obniżała się jego stabilność i zwartość.

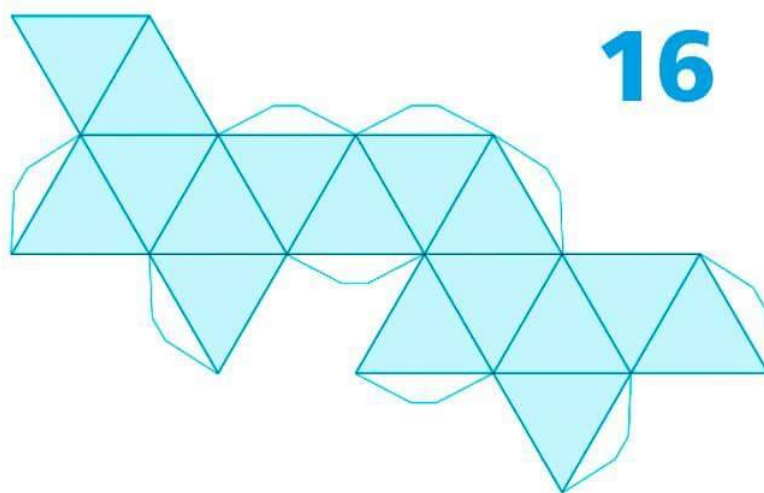


Liczba wierzchołków	Liczba krawędzi:	Liczba ścian	Ilość użytych elementów
10	24	16	16

Sprawdzenie wzoru Eulera:

$W+S=K+2$, czyli: $10+16=24+2$

Siatka modelu tradycyjnego mogłaby wyglądać następująco.



20-DELTOŚCIAN WYPUKŁY

Najbardziej złożona bryła z deltościanów wypukłych. Zarazem bryła idealna, – czyli platońska: 20-deltościan wypukły foremny.



Ponieważ jest bryłą foremną wygląda z każdej strony zupełnie tak samo.

Liczba wierzchołków	Liczba krawędzi:	Liczba ścian	Ilość użytych elementów
12	30	20	20

20-deltościan jest ostatnim deltościanem wypukłym, jaki można zrobić.

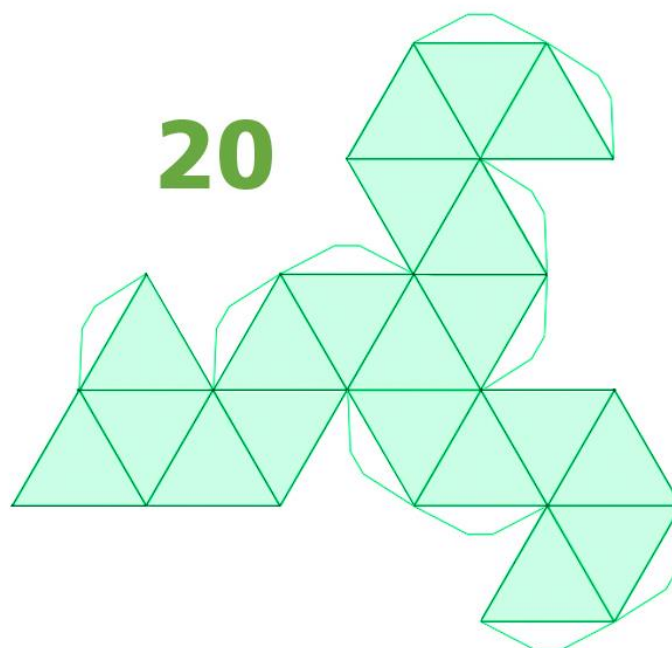


Do jego złożenia potrzeba 20 elementów.

Sprawdzenie wzoru Eulera:

$W+S=K+2$, czyli: $12+20=30+2$

Siatka modelu składanego metodą tradycyjną:



W tym rozdziale zajmiemy się zagadkowym 18-deltościanem.

Zestaw utworzonych przez nas deltościanów wypukłych charakteryzują następujące liczby:

deltościany wypukłe kol. (a)	symbol umowny kol. (b)	liczba ścian (S) kol. (c)	liczba krawędzi (K) kol. (d)	liczba wierzchołków (W) kol. (e)
4-deltościan	D_4	4	6	4
6-deltościan	D_6	6	9	5
8-deltościan	D_8	8	12	6
10-deltościan	D_{10}	10	15	7
12-deltościan	D_{12}	12	18	8
14-deltościan	D_{14}	14	21	9
16-deltościan	D_{16}	16	24	10
20-deltościan	D_{20}	20	30	12

Jest to kompletny zbiór deltościanów wypukłych. Zastanawiające jest, dlaczego brakuje deltościanu wypukłego o 18-tu ścianach. Począwszy od czworokąta foremego D_4 , aż do D_{16} po dodaniu 2-ch ścian, pojawia się kolejny deltościan wypukły. Jednak po D_{16} następnym deltościanem wypukłym jest dopiero 20- deltościan D_{20} .

Spróbujemy znaleźć możliwy 18-deltościan wypukły.

Z powyższego zestawienia wynika kilka istotnych spostrzeżeń. Jak wyżej wspomniano liczba ścian (S) rośnie o 2 (kolumna c). Jednak mamy również kolejne prawidłowości. Dla każdego kolejnego deltościanu liczba krawędzi (K) rośnie o 3 (kolumna (d)), a liczba wierzchołków rośnie o 1 (kolumna e).

Wynikałoby z tego zatem, że brakujący 18-deltościan powinien mieć 27 krawędzi ($24+3$) oraz 11 wierzchołków ($10+1$).

Powyższe ustalenia wynikają również ze wzoru Eulera:

$$W+S=K+2$$

$$11+18=27+2$$

Pozostaje natomiast pytanie, jakie wierzchołki powinien mieć nasz brakujący deltościan.

Wiemy już (o czym pisaliśmy we wcześniejszych rozdziałach), że dla deltościanów wypukłych możliwe są tylko takie wierzchołki, w których zbiegają się 3 krawędzie, 4 lub maksymalnie 5. Nazwijmy te wierzchołki: 3-krawędziowy (W_3), 4-krawędziowy (W_4) oraz 5-krawędziowy (W_5).

Jakie wierzchołki miałyby nasz 18-deltościan? W celu ustalenia tego sprawdzimy, jakie wierzchołki mają nasze wielościany wypukłe.

Zgodnie z wyliczeniami nasze modele mają następujące liczby i rodzaje wierzchołków:

Symbol	W_3	W_4	W_5	Suma wierzchołków
D_4	4			4
D_6	2	3		5
D_8		6		6
D_{10}		5	2	7
D_{12}		4	4	8
D_{14}		3	6	9
D_{16}		2	8	10
D_{20}			12	12

Jak się przekonaliśmy i w tym przypadku widać pewną zależność. Generalnie wraz z kolejnym deltościanem wypukłym wierzchołki o mniejszej liczbie krawędzi maleją, a rosną te o większej ilości krawędzi. Od D_8 do D_{16} nie występuje już w ogóle wierzchołek 3-krawędziowy W_3 , liczba wierzchołków W_4 maleje o 1, przy rosnącej liczbie o 2 wierzchołków W_5 . D_{20} ma już tylko wierzchołki W_5 . Oznaczałoby to, że brakujący 18-deltościan powinien mieć 1 wierzchołek W_4 i 10 wierzchołków W_5 , co oczywiście daje sumę 11 wierzchołków.

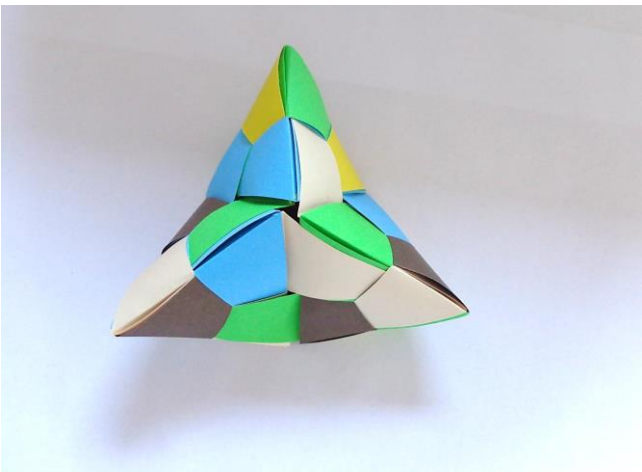
Czy taka konstrukcja jest w ogóle możliwa? Przekonaliśmy się, że nie. Nie da się połączyć w bryłę wypukłą takiej kombinacji trójkątów równobocznych, by otrzymać 11 wierzchołków deltościanu, z czego jeden musiałby być łączyć tylko cztery ściany, a pozostałe po pięć ścian.

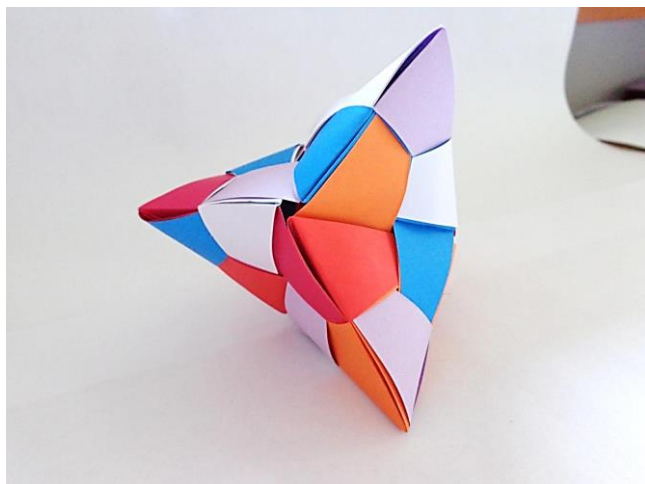
A zatem nie istnieje 18-deltościan wypukły.

DELTOŚCIANY WKLĘSŁE

Deltościanów wklęsłych istnieje nieskończona ilość. Wśród nich znajduje się wiele takich wielościanów, które spełniają kryteria foremności, jeśli odrzucimy warunek wypukłości. Należy do nich m.in. stella octangula (czyli ośmiościan gwiazdzisty). Niektóre wielościany można otrzymać z wielościanów foremnych za pomocą ich stellacji (lub rozgwieźdzenia), co oznacza przedłużanie ich krawędzi, ścian, do ponownego przecięcia lub łączeniu płaszczyznami ich wierzchołków. W wyniku tego powstają nowe wielościany nazywane gwiazdzistymi.

Skonstruowałyśmy 10 wielościanów wklęsłych. Wszystkie przedstawimy w poniższej galerii, w kolejności od najmniej, do najbardziej złożonego:

	8-deltościan wklęsły dwupiramida powiększona Otrzymać go można w tradycyjnym podejściu po doklejeniu do jednej ze ścian dwupiramidy trójkątnej czworościana foremnego. Jest więc on jego powiększeniem. Bryła jest unikatowa, bo poprzez doklejenie do niej kolejnego czworościanu foremnego można uzyskać 10-deltościan wklęsły, który w zależności od wyboru podstawy pod doklejany czworościan uzyskać można w różnych kształtach.
	10-deltościan wklęsły dwupiramida trójkątna dwukrotnie powiększona Model ten może powstać, z 8-deltościanu wklęsłego przez dołączenie dwóch czworościanów foremnych do dwupiramidy trójkątnej.



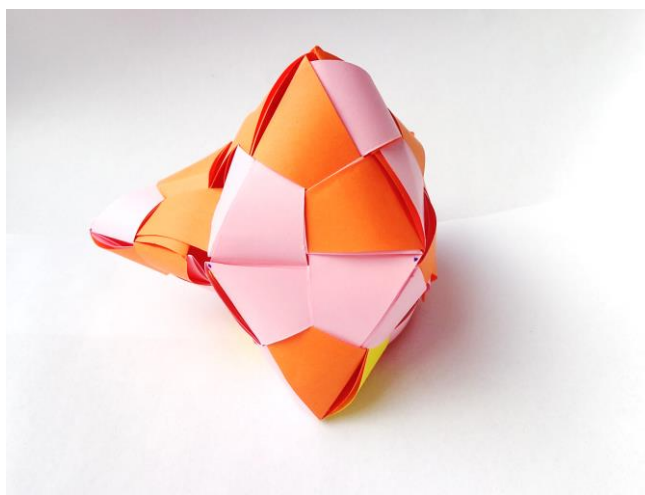
12-deltościan wklęsły czterokrotnie powiększony czworościan foremny

Powstaje po doklejeniu do każdej ze ścian 4-deltościanu- innego czworościanu foremnego.



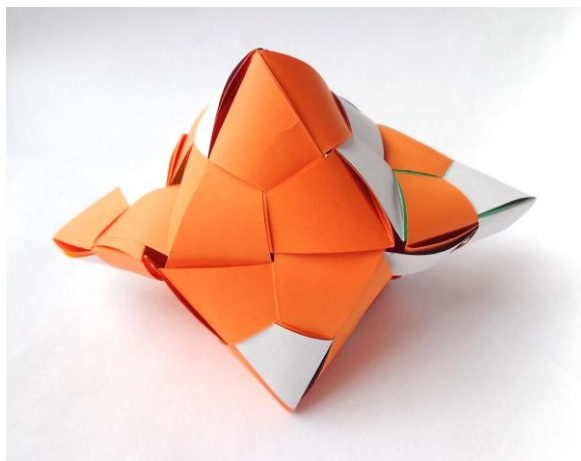
14-deltościan wklęsły graniastostup trójkątny skręcony podwójny

- jest to bryła powstała ze sklejenia ścianami dwóch ośmiościanów foremných, czyli dwóch sklejoných podstawami graniastostupów trójkątných skręconých.



16-deltościan wklęsły poczwórnice powiększony graniastostup trójkątny

Bryłę tę można stworzyć po doklejeniu do każdej ze ścian bocznych graniastostupa trójkątnego piramid kwadratowych (łącznie 3) oraz do jednej z podstaw piramidy trójkątnej (to 4 piramida).



18-deltościan wklęsły pięciokrotnie powiększony graniastosłup trójkątny

Ten wielościan powstanie po doklejeniu do każdej ze ścian graniastosłupa trójkątnego piramid trójkątnych i kwadratowych (piramidy trójkątne przyklejamy do podstaw, a kwadratowe do ścian bocznych graniastosłupa).

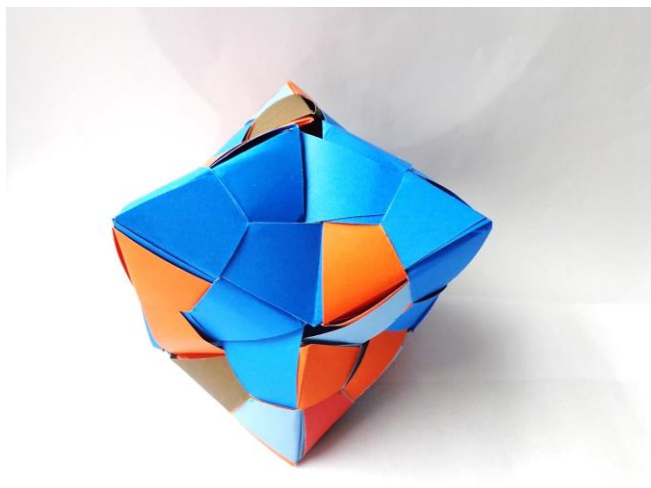


20-deltościan wklęsły graniastosłup trójkątny skręcony potrójny –

powstanie po sklejeniu ze sobą trzech ośmiościanów foremnych, – czyli jak mówi sama nazwa – sklejeniu trzech graniastosłupów skręconych trójkątnych podstawami.



24-deltościan „Stella octangula”, czyli ośmiokrotnie powiększony ośmiościan foremny – Stella octangula – (z j. gr.) oznacza gwiazda ośmioramienna. Opisywana jako przestrzenna wersja gwiazdy Dawida.



24-deltaścian wklęsły, sześciokrotnie powiększony sześcian – jest to sześcian powiększony sześć razy o piramidę.



26-deltaścian wklęsły, kombinacja sześć- i ośmiodeltaścianów.

Podsumowując naszą pracę, z której jesteśmy dumne.

Chciałybyśmy by u czytelników rozbudziła to samo co w nas: ciekawość do tej formy poznawania matematyki (przy użyciu papieru i pomysłu), inspirację do tworzenia czegoś nowego (np. w postaci nowych fantastycznych brył) i sympatię do deltościanów, które według nas są wspaniałe. Mamy nadzieję, że udało nam się to przekazać w całej naszej pracy. Wiemy również, że nie wyczerpałyśmy jeszcze tematu, ale w przypadku tak skomplikowanych form, nie jest to możliwe.

Naszym celem nie było wykazanie wszystkich matematycznych zawiłości związanych z tymi bryłami. Chciałyśmy przede wszystkim przedstawić je w ciekawej formie i zachęcić do dalszego poznawania.

My natomiast nauczyłyśmy się wielu nowych zagadnień teoretycznych jak i rzeczy praktycznych, między innymi samodyscypliny, cierpliwości i pokory w pokonywaniu trudności. Same dopiero poznajemy pierwsze własności brył w szkole podstawowej. Ale ponieważ podczas pisania tej pracy natknęłyśmy się na pewne trudności ze znalezieniem szczegółowych opracowań w tym zakresie, (szczególnie w języku polskim) wiemy już, że program szkolny na pewno nie wyczerpie naszej dociekliwości w tym temacie. Dlatego tym bardziej cieszymy się z efektów naszej pracy.

Pomimo, że origami to nasza pasja, nie było łatwo z budową tylu modeli i miałyśmy z tym sporo pracy (złożyłyśmy 262 elementy, a nawet więcej, nieco z zapasem).

Nasza wiedza rosła z każdą nową kartką i nową konstrukcją. Rozróżniamy bryły platońskie i bryły Johnsona, z powodzeniem stosujemy wzór Eulera (bardzo nas wciągnął i każdy deltościan został przez nas sprawdzony). Zgłębiłyśmy tajemnicę 18-deltościanu, która wcale nie jest taka prosta do zrozumienia.

Kiedyś, kiedy ktoś nas zapyta o deltościany, z przyjemnością wytoczymy mu na ten temat cały referat i pokażemy mu piękne bryły, które zrobiłyśmy.

BIBLIOGRAFIA

1. Wrocławski Portal Matematyczny – „Deltościany” , <http://www.matematyka.wroc.pl/book/deltosciany>
2. „Galeria wielościanów”- Zdzisław Pogoda, Wyd. Uniwersytetu Warszawskiego, 2005 r.
3. „Origami i matematyka”, Focus – Poznać i zrozumieć świat, publikacja w internecie -24 października 2013
4. „Bezmiar matematycznej wyobraźni” – Krzysztof Cesielski, Zdzisław Pogoda, wyd. Prószyński i S-ka, 2005 r.
5. <http://mathworld.wolfram.com/Deltahedron.html>
6. <http://blog.plover.com/math/missing-deltahedra.html> - Marc Dominus
7. <http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/deltahedra-info.html> - „Convex Deltahedra”
8. <https://pl.wikipedia.org>

Przypisy:

¹ Origami i matematyka, Focus – Poznać i zrozumieć świat, publikacja w internecie -24 października 2013

² „Bezmiar matematycznej wyobraźni” – K. Cesielski, Zdzisław Pogoda, wyd. Prószyński i S-ka, 2005 r.

³ <http://www.redbor.pl/encyklopedia/wlasciwosci/krystalografia.htm>

⁴ „Galeria wielościanów”- Zdzisław Pogoda, Wyd. Uniwersytetu Warszawskiego, 2005 r.