

Praca badawcza
Określi Carlyle'a
Małgorzata Majczak

Spis treści

<u>Tytuły</u>	<u>Strona</u>
1. Wstęp	3
2. Definicja i przykłady	4
3. Relacja między promieniem okręgu Carlyle'a a istnieniem pierwiastków	8
4. Czy każdy wielokąt może zostać skonstruowany metodą okręgu Carlyle?	9
5. Konstrukcje:	10
5.1 Konstrukcja pięciokąta	12
5.2 Konstrukcja siedmiokąta	15
6. Refleksja i Konkluzja	19
7. Appendix	20
8. Bibliografia	21

Wstęp

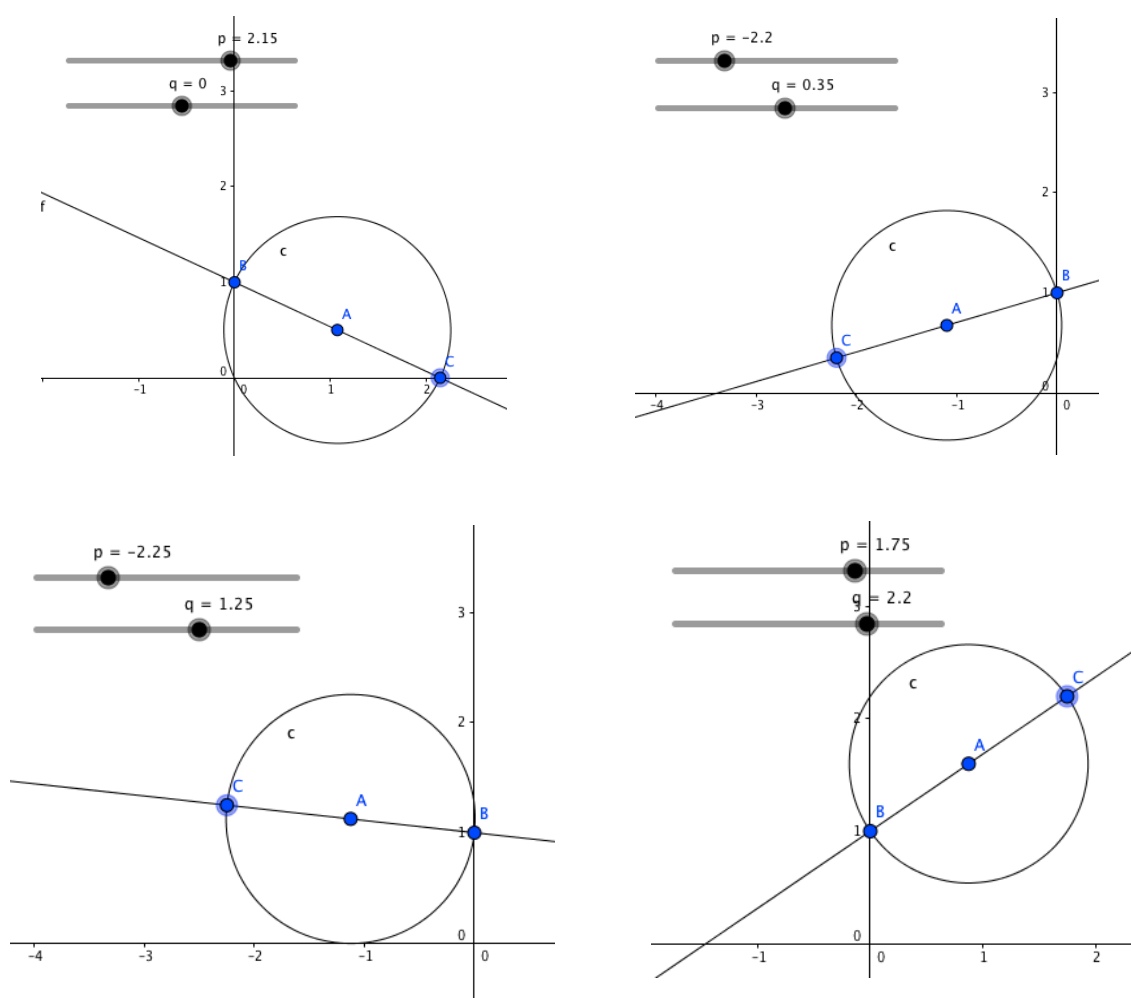
Problem rozwiązywalności równań kwadratowych za pomocą metod geometrycznych wywodzi się z antycznej Grecji. Pierwsze metody zostały zaprezentowane przez Euklidesa w jego Propozycji 11, Księdze 2, Elementów, i były poprawne tylko dla dodatnich rzeczywistych pierwiastków. Następnie, odkrycie istnienia pierwiastków negatywnych, spowodowało rozwój i adaptacje metod bazujących na rozumowaniu Euklidesa, które pozwalały uzyskać już wszystkie pierwiastki równania, zarówno te rzeczywiste jak i urojone.

Pod koniec XIX wieku, młody student matematyki, potem znany pisarz i historyk, Thomas Carlyle wymyślił metodę uzyskiwania pierwiastków równań kwadratowych, bazując na geometrii planarnej. Metoda ta została opublikowana w dobrze znanych „Elementach Geometrii” Sira Johna Leslie. Metoda Carlyle’a opiera się na odnajdywaniu pierwiastków równania $(x^2 - px + q = 0)$ poprzez identyfikację punktów przecięcia okręgu sprzymierzonego z równaniem, zwanego okręgiem Carlyle’a, z osią odciętych. Głównym zastosowaniem okręgów Carlyle’a jest graficzne odnalezienie i przedstawienie rozwiązań równania kwadratowego, co okazało się mieć duże zastosowanie w tworzeniu klasycznych konstrukcji regularnych wieloboków.

Temat mojej pracy wybrałam ze względu na moją fascynację historią matematyki i pierwotną geometrią, ponieważ uważam, że ona najlepiej ilustruje prawdziwą potęgę i piękno matematyki. W tym eseju zarówno właściwości okręgów Carlyle’a jak i ich użycie do konstrukcji klasycznych zostaną przestudiowane i udowodnione. Zostanie zbadane czy każdy regularny wielobok może zostać skonstruowany tą metodą i czy istnieje inna restrykcja co do konstrukcji inna niż regularność. Relacja wierzchołków wieloboku oraz pierwiastków równania kwadratowego zostanie poddana analizie.

Definicja

W matematyce okrąg Carlyle'a definiowany jest jako określony okrąg sprzymierzony z równaniem kwadratowym $x^2 - px + q = 0$, gdzie $p, q \in \mathbb{R}$, którego średnica jest odcinkiem łączącym punkty $(0,1)$ i (p,q) . Taki okrąg przecina oś odciętych w punktach, które są pierwiastkami równania kwadratowego. W zależności od równania kwadratowego okrąg może przecinać oś X w jednym punkcie lub w żadnym. Jeśli okrąg przecina oś X w dwóch punktach istnieją dwa rzeczywiste rozwiązania, którymi są odcięte punktów. Jeśli okrąg jest styczny z osią X, istnieje tylko jedno rozwiązanie, którym jest odcięta punktu styczności. Natomiast jeśli okrąg jest rozłączny z osią X, rzeczywiste rozwiązania nie istnieją. Poniżej przedstawione są możliwe położenia okręgów Carlyle'a względem osi X zależne od wartości p i q , ilustrując obecność rzeczywistych rozwiązań lub ich brak.



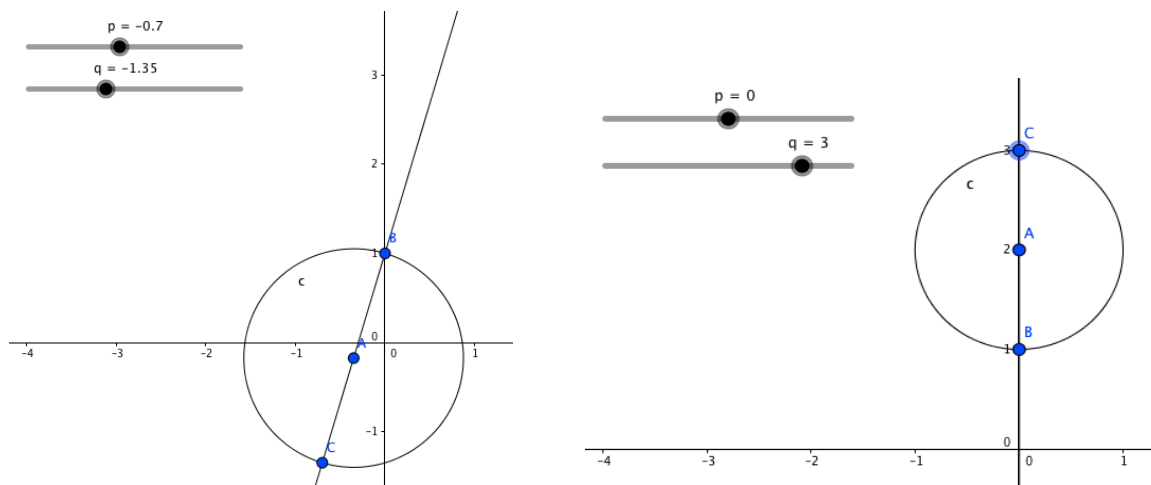


Figura 1. Różne okręgi Carlyle'a sprzymierzone z równaniem kwadratowym $x^2 - px + q = 0$ w zależności od wartości p i q .

Dowód na poprawność okręgów Carlyle'a zostanie przeprowadzony poniżej opierając się o równanie okręgu.

Twierdzenie 1.

Cyfra E jest rzeczywistym rozwiązaniem równania $x^2 - px + q = 0$, wtedy i tylko wtedy, kiedy okrąg Carlyle'a sprzymierzony z tym równaniem przecina oś odciętych w punkcie $(E, 0)$.

Dowód 1.

Dany jest okrąg Carlyle'a w układzie współrzędnych, którego średnica jest odcinkiem łączącym punkty $B(0,1)$ to $C(p,q)$, posiadającym promień r , o środku okręgu w punkcie $A(\frac{p}{2}, \frac{q+1}{2})$. (Figura 2)

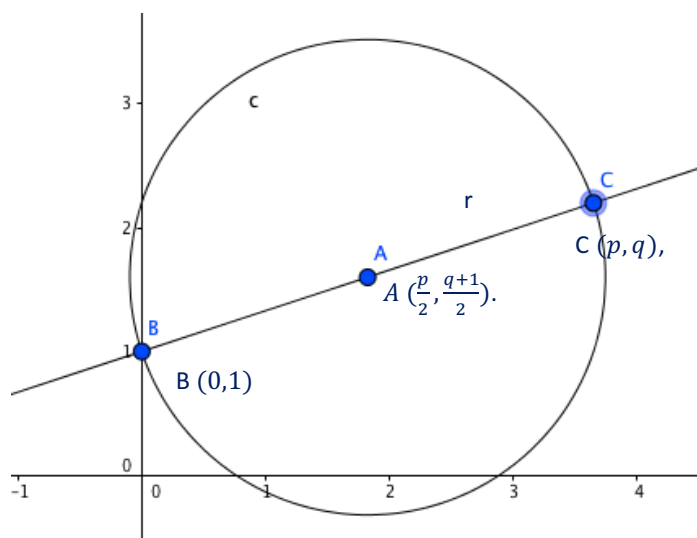


Figura 2. Okrąg Carlyle'a dla $x^2 - px + q = 0$, gdzie $\Delta > 0$.

Za pomocą twierdzenia Pitagorasa dostajemy promień okręgu równy $r = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2}$, patrz Figura 2.

Podkładając uzyskane wartości do równania okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, gdzie punkt (a, b) jest środkiem okręgu r jest promieniem, dostajemy

$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{q+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2$, co jest odpowiednim równaniem opisującym nasz okrąg Carlyle'a.

Jako, że poszukujemy punktów leżących zarówno na okręgu i na osi X, niech $y =$

0. Podkładając dostajemy $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2$

Upraszczając $x^2 - xp + \frac{p^2}{4} + \frac{q^2 + 2q + 1}{4} = \frac{p^2}{4} + \frac{q^2 - 2q + 1}{4}$

$$x^2 - xp + \frac{q^2 + 2q + 1 - q^2 + 2q - 1}{4} = 0$$

$$x^2 - xp + \frac{4q}{4} = 0$$

$$x^2 - px + q = 0$$

Osiągnięte równanie jest równorządne równaniu z Twierdzenia 1. Dowiedliśmy, że odcięte punktów przecięcia okręgu z osią X, a zarazem rzeczywiste pierwiastki równania możemy dostać dzięki równaniu $x^2 - px + q = 0$. Co za tym idzie, cyfra E jest rzeczywistym rozwiązaniem równania kwadratowego wtedy i tylko wtedy, kiedy sprzymierzony z nim okrąg przecina oś X w punkcie $(E, 0)$. Twierdzenie zostało udowodnione.

□

Z powyższego dowodu dowodzimy, że dla każdego równania typu $x^2 - px + q = 0$ istnieje określony okrąg Carlyle'a, który będzie przecinał oś odciętych w punktach, które są rzeczywistymi pierwiastkami tego równania, jeśli owe istnieją.

Przykłady

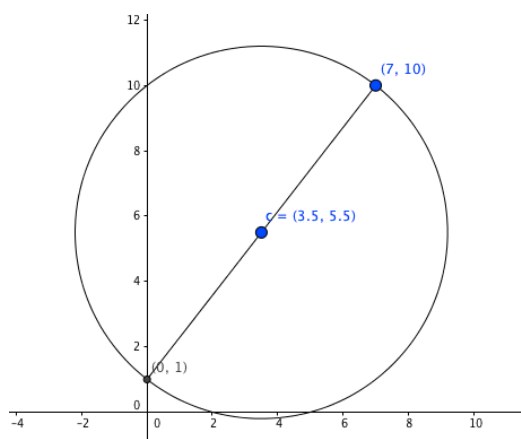


Figura 3. Okrąg Carlyle'a dla $x^2 - 7x + 10 = 0$.

Figura 3. Ilustruje okrąg Carlyle'a dla równania $x^2 - 7x + 10 = 0$.

Istnieją dwa pierwiastki rzeczywiste.

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$\Delta = 49 - 40 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = 3$$

$$x_1 = \frac{7 + 3}{2} = 5 \quad x_2 = \frac{7 - 3}{2} = 2$$

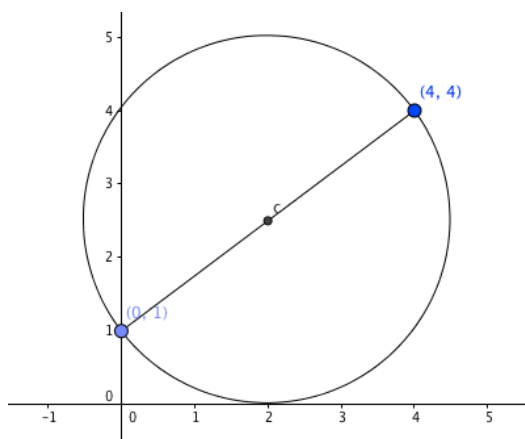


Figura 4. Okrąg Carlyle'a dla $x^2 - 4x + 4 = 0$

Figura 4. Ilustruje okrąg Carlyle'a dla równania $x^2 - 4x + 4 = 0$.

Istnieje podwójny pierwiastek rzeczywisty.

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 \cdot 4 = 0 \quad \sqrt{\Delta} = 0$$

$$x_1 = \frac{4 + 0}{2} = 2 \quad x_2 = \frac{4 - 0}{2} = 2$$

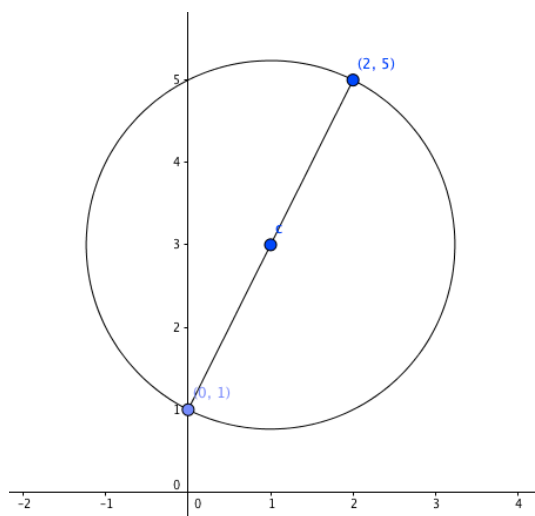


Figura 5. Okrąg Carlyle'a dla $x^2 - 2x + 5 = 0$.

Figura 5. Ilustruje okrąg Carlyle'a dla równania $x^2 - 2x + 5 = 0$.

Nie istnieją pierwiastki rzeczywiste.

Istnieją dwa rozwiązania będące liczbami urojonymi.

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot 5 = -16 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{-16} = 4i$$

$$x_1 = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i \quad x_2 = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i$$

Relacja między promieniem okręgu Carlyle'a a istnieniem pierwiastków

Wiadome jest, że różne wartości p i q mają wpływ na punkt przecięcia okręgu z osią X . Rozważając powyższe ilustracje możemy prosto zauważyć, że istnienie rozwiązań zależy od dystansu między środkiem okręgu, a osią X . Kiedy wartość promienia r jest większa niż dystans od środka okręgu do osi odciętych, to znaczy $\left|\frac{q+1}{2}\right|$, okrąg przecnie oś w dwóch punktach dając dwa rozwiązania (figura 3). Kiedy, kiedy wartość r jest równa $\left|\frac{q+1}{2}\right|$, okrąg jest styczny z osią x (figura 4). Natomiast kiedy wartość r jest mniejsza niż wartość $\left|\frac{q+1}{2}\right|$, punkty przecięcia nie istnieją (figura 5). Co interesujące, taki sam warunek istnienia pierwiastków możemy osiągnąć za pomocą wyróżnika równania Δ . Kiedy wyróżnik jest: większy niż 0 (dwa punkty przecięcia), istnieją dwa rzeczywiste rozwiązania; jest równy 0 (jeden punkt styczności), istnieje podwójny pierwiastek; kiedy wyróżnik jest mniejszy od 0 (brak punktów przecięcia), nie istnieją rzeczywiste pierwiastki, lecz dwa urojone. Co za tym idzie, możemy przypuszczać, że istnieje relacja między wyróżnikiem równania, a stosunkiem promienia okręgu do dystansu ze środka okręgu do osi x . Jako, że obydwie posiadają tę samą własność i dają równoważne rezultaty, najprawdopodobniej są sobie równorzędne. Spróbujmy wyprowadzić dowód.

Twierdzenie 2.

Relacja $r \geq \frac{|q+1|}{2}$ jest równorzędna $\Delta \geq 0$ for $x^2 - px + q = 0$, gdzie $p, q \in \mathbb{R}$ i $r \in \mathbb{R}^+$.

Dowód 2.

$r \geq \frac{|q+1|}{2}$, z twierdzenia Pitagorasa $r = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2}$ dla każdego okręgu Carlyle'a o średnicy $(0,1)$ do (p, q)

$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2} \geq \frac{|q+1|}{2}$, jako, że obydwie strony są nieujemne, możemy je spotęgować.

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{|q+1|}{2}\right)^2$$

$$\frac{p^2}{4} + \frac{(q-1)^2}{4} \geq \frac{|q+1|^2}{4}$$

$$p^2 + (q-1)^2 \geq (q+1)^2$$

$$p^2 + q^2 - 2q + 1 \geq q^2 + 2q + 1$$

$$p^2 - 4q \geq 0$$

$$\Delta = p^2 - 4q$$

□

Zatem możemy podsumować, że relacja między promieniem, a dystansem ze środka okręgu do osi x jest równorzędna z wyróżnikiem równania sprzymierzonego z tym okręgiem Carlyle'a.

Czy każdy regularny wielokąt może zostać skonstruowany metodą okręgu Carlyle'a?

We wstępie wspomnieliśmy, że okręgi Carlyle'a mają pokaźne zastosowanie w konstruowaniu regularnych wieloboków za pomocą i wyłącznie cyrkla i liniału. Takie konstrukcje nazywane są klasycznymi, a wielokąty skonstruowane tą metodą określane jako konstruowalne. Pierwsze zagadnienia odnośnie geometrycznych konstrukcji datowane są na okres antycznej Grecji. Grecy wiedzieli jak skonstruować regularny trójkąt, kwadrat i pięciokąt. Znali też metody na podwojenie boków wielokątów, jak i łączenie ich co pozwalało im na konstrukcję każdego wielokąta o formie: $N = 2^m 3^n 5^j$, gdzie $m \in \mathbb{Z}^+$ in j są 0 lub 1. Opierając się na tej definicji jedynymi konstruowalnymi wielokątami były: 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, Wśród nich jedynie 3 o nieparzystej liczbie wierzchołków 3, 5, 15. Niektóre z tych konstrukcji możemy znaleźć w księdze IV "Elementów" Euklidesa.¹

Do końca XVIII w. wielokąty o formie prezentowanej w "Elementach" były uważane za jedyne konstruowalne, regularne wielokąty. Problem konstruowalności wielokątów był inspirujący i imponujący dla wielu matematyków, między innymi dla Carla Friedricha Gaussa.

¹ Construction of regular polygons, <http://dynamicsofpolygons.org/PDFs/Constructions.pdf>.

Ten niemiecki matematyk w roku 1796 mając zaledwie 19 lat wykazał, że metodą klasyczną można skonstruować regularny 17-kąt. 5 lat później opublikował *Disquisitiones Arithmeticae*, w których rozprawia o problemie konstruowalności wielokątów i podaje warunek umożliwiający skonstruowanie każdego regularnego n -kata. Gauss pisze:

“Aby móc podzielić okrąg geometrycznie na N części, N musi być: liczba 2 lub wyższą potęgą liczby 2, lub liczba pierwsza o formie $2^m + 1$, gdzie $m \in \mathbb{N}$, lub iloczynem kilku liczb pierwszych o takiej formie, lub iloczynem jednej lub kilku takich liczb pierwszych do 2 lub wyższej potęgi 2.”²

Metoda Gaussa bazuje na własności, iż rozwiązanie równania $x^p = 1$ może zostać zredukowane do ciągu of równań kwadratowych. Takie równanie nazywane jest cyklotomicznym, a jego rozwiązaniami są pierwiastki z jedynki.³ Liczby pierwsze spełniające powyższy warunek Gaussa należą do liczb Fermata, czyli liczb o formie $F_n = 2^{2^n} + 1$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, nazywanych liczbami pierwszymi Fermata.⁴ Do teraz znaleziono jedynie pięć takich liczb pierwszych, co implikuje, iż dopóki nowe liczby pierwsze Fermata nie zostaną odkryte, dopóty istnieje jedynie pięć konstruowalnych wielokątów o liczbie wierzchołków będących liczbami pierwszymi.⁵

Konstrukcje

Jak już zostało pokazane i udowodnione w poprzednich sekcjach, konstrukcje za pomocą okręgów Carlyle'a są prostą metodą na znalezienie pierwiastków trójmianu kwadratowego. Jednakże myśląc o konstrukcjach wielokątów foremnych użycie okręgów Carlyle'a może

² Duane W. De Temple, Carlyle Circles and the Lemoine Simplicity of Polygon Constructions, The American Mathematical Monthly, Volume 98, Issue 2 (Feb., 1991), 97.

³ Weisstein, Eric W. "Cyclotomic Equation." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/CyclotomicEquation.html>.

⁴ Weisstein, Eric W. "Fermat Number." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/FermatNumber.html>

⁵ Duane W. De Temple, Carlyle Circles and the Lemoine Simplicity of Polygon Constructions, The American Mathematical Monthly, Volume 98, Issue 2 (Feb., 1991), 97.

wydawać się dość absurdalne. Aby móc poprawnie zrozumieć konstrukcję, potrzebna będzie podstawowa wiedza odnośnie liczb zespolonych i ich geometrycznych reprezentacji na płaszczyźnie. Po pierwsze liczby zespolone mogą być prezentowane na płaszczyźnie przy użyciu diagramu Arganda, gdzie oś OX będzie reprezentować część rzeczywistą, a oś OY część urojoną danej liczby. Po drugie pierwiastki n -stopnia z 1 odnalezione na płaszczyźnie będą zawsze reprezentować wierzchołki wielokąta foremego. Dowód na poprawność powyższego stwierdzenia możemy odnaleźć dzięki twierdzeniu De Moivre'a, które pozwala nam na odnalezienie pierwiastków n -stopnia z każdej liczby zespolonej.

Twierdzenie De Moivre'a ⁶

$[r(\cos\theta + i \sin\theta)]^n = r^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$, gdzie $r \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$,

co implikuje: $z^n = r \operatorname{cis} \theta \Rightarrow z = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$, $k \in \mathbb{Z}$

W formie Eulera: $z^n = r e^{i\theta} \Rightarrow z = \sqrt[n]{r} e^{i \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)}$, $k \in \mathbb{Z}$

Bazując na twierdzeniu możemy odnaleźć wierzchołki każdego wielokąta foremnego bazując na okręgu jednostkowym, licząc $z^n = 1$, gdzie n jest liczbą wierzchołków wielokąta np. $z^7 = 1$ dostaniemy wierzchołki siedmiokąta. Jako że w tym eseju skupiamy się na problemie konstrukcji klasycznych, naszym zadaniem jest nie tylko obliczenie pierwiastków, ale także odnalezienie ich na płaszczyźnie używając jedynie cyrkla i liniału. Zatem możemy stwierdzić, że musi istnieć relacja między równaniem cyklotomicznym i równaniem kwadratowym pozwalająca na użycie twierdzenia De Moivre'a wraz z metodą okręgów Carlyle'a umożliwiając konstrukcję wielokątów foremnych.

Ta relacja została odkryta w 1801 roku, gdy Carl Friedrich Gauss stwierdził, iż każde równanie cyklotomiczne $x^p = 1$, gdzie $p = 2k + 1$, może zostać zmienione w ciąg równań kwadratowych. Dzięki temu metoda okręgów Carlyle'a może zostać użyta w celu znalezienia

⁶Martin, David., De Moivre Theorem, Complex Number, Mathematics HL (Core), 3rd ed., Haese Mathematics, p.497.

pierwiastków równania kwadratowego, toteż pierwiastków równania cyklotomicznego, które są także wierzchołkami wielokąta n -foremnego. Bazując na tej metodzie, wykorzystamy pięciokąt foremny jako przykład wielokąta konstruowalnego oraz przedstawimy odpowiednie rozumowanie algebraiczne. Dodatkowo przeanalizujemy podobną próbę konstrukcji siedmiokąta foremnego jako przykładu wielokąta niespełniającego warunku Gaussa.

Konstrukcja pięciokąta foremnego

Poniższa konstrukcja pięciokąta będzie opierała się na rozwiązaniach równania $z^5 = 1$, wskazujących wierzchołki pięciokąta foremnego na płaszczyźnie.

Niech $z = a + bi$ gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $z^n = \varepsilon$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$. Wtedy rozwiązaniami równania są $z_k = \sqrt[n]{|\varepsilon|} \left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \right)$ dla wszystkich $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, gdzie θ jest argumentem liczby urojonej ε .

Dla $\varepsilon = 1$, jak w naszym przypadku, $z_k = \text{cis}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$,

ponieważ $1 = \cos(0) + i \sin(0) = 1 + 0 \cdot i = 1$.

Obliczając pierwiastki dla $z^5 = 1$

$$k = 0, z_0 = \text{cis}(0) = 1, \quad k = 1, z_1 = \text{cis}\left(\frac{2\pi}{5}\right), \quad k = 2, z_2 = \text{cis}\left(\frac{4\pi}{5}\right),$$

$$k = 3, z_3 = \text{cis}\left(\frac{6\pi}{5}\right), \quad k = 4, z_4 = \text{cis}\left(\frac{8\pi}{5}\right)$$

Celem naszej konstrukcji jest lokalizacja pierwiastków równania na płaszczyźnie przy pomocy okręgów Carlyle'a. Aby móc użyć metody okręgów, musimy stworzyć równanie kwadratowe, które pozwoli nam na wyznaczenie dwóch pierwiastków, będących wierzchołkami figury.

Jako, że $z_0 = 1$, możemy podzielić $z^5 = 1$ przez $(z - 1)$, skąd dostaniemy

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

Patrząc na wartości z_1 i z_4 , oraz z_2 i z_3 , możemy zauważyć, że posiadają one taką samą wartość odciętej i przeciwną rzędną. Dzięki temu, dodając te pary liczb zespolonych dostaniemy wyniki

będące rzeczywiste (część urojona liczb się zniesie).

$$\varepsilon_1 = z_1 + z_4 = 2\operatorname{Re}(z_1) = 2\cos\frac{2\pi}{5}, \quad \varepsilon_2 = z_2 + z_3 = 2\operatorname{Re}(z_2) = 2\cos\frac{4\pi}{5}$$

Od teraz, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ będziemy uznawać za dwa pierwiastki równania kwadratowego, użyjemy więc wzorów Viete'a o sumie i iloczynie pierwiastków, aby znaleźć ich pierwotne równanie w postaci prostszej niż $(x - 2\operatorname{cis}\frac{2\pi}{5})(x - 2\operatorname{cis}\frac{4\pi}{5}) = 0$.

Ze wzorów Viete'a o sumie i iloczynie pierwiastków wielomianu⁷ :

Dla równania wielomianowego w postaci

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0,$$

suma pierwiastków to: $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$, iloczyn pierwiastków to: $\frac{(-1)^n a_0}{a_n}$.

Zatem (bazując na $z^5 - 1 = 0$) $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = -1$ oraz

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 = (z_1 + z_4)(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_4 z_2 + z_4 z_3 = z_3 + z_4 + z_1 + z_2 = -1$$

(mnożąc $z_1 z_3, z_4 z_2, \dots$, które leżą na tym samym okręgu, iloczynem jest inny z pierwiastków).

Jako, że suma i iloczyn są równe -1, dla pierwiastków $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, odpowiadający im trójmian to $x^2 + x - 1 = 0$. Dzięki takiemu uproszczeniu równania kwadratowego, możemy stworzyć okrąg Carlyle'a, o średnicy w punktach $E(-1, -1)$ i $B(0,1)$, oraz środka w punkcie $F(-\frac{1}{2}, 0)$.

Taki okrąg będzie przecinał oś OX w dwóch punktach P_1, P_2 , jako, że wyróżnik jest większy od zera, odcięte tych punktów będą równe wartościom ε_1 i ε_2 . Obydwie wartości były podwojone, musimy więc przeprowadzić symetralną odcinka, między P_1 i początkiem układu współrzędnych, oraz P_2 i początkiem układu współrzędnych, dzieląc odcinki na pół. Symetralne te przetnie okrąg Carlyle'a w czterech punktach, którymi będą z_1, z_2, z_3, z_4 . Zaznaczając poprzednio otrzymany pierwiastek z_0 , i łącząc go z pozostałymi, otrzymujemy pięciokąt

⁷ Martin, David., Sum and product of roots theorem, Complex Number and Polynomial, Mathematics HL (Core), 3rd ed., Haese Mathematics, p.199.

foremny.

Bazując na powyższym algebraicznym rozumowaniu, konstrukcja zostanie przeprowadzona za pomocą ołówka i liniału (Appendix Figura 6.2.), jak i zarówno za pomocą technologii (Figura 6.1) Instrukcja konstrukcji dla obydwu metod przedstawiona jest poniżej.

Instrukcja:

1. Narysuj okrąg jednostkowy, o promieniu $r = 1$. Oznacz każdy punkt przecięcia okręgu z osią OX i osią OY oraz początkiem układu współrzędnych $O(0, 0), A(1, 0), B(0, 1), C(-1, 0), D(0, -1)$.
2. Wyznacz punkt $E(-1, -1)$, tworząc dwusieczną kąta $\angle COD$ oraz kręśląc okrąg o promieniu $r = 1$ i środku w punkcie D . Okrąg i dwusieczna przetną się w punkcie E .
3. Połącz punkt E z punktem B odcinkiem, który będzie średnicą naszego okręgu Carlyle'a. Punkt przecięcia średnicy z osią OX oznacz jako punkt F , będzie to środek naszego okręgu Carlyle'a.
4. Narysuj okrąg Carlyle'a o środku w punkcie F i o wcześniej wyznaczonej średnicy. Punkty przecięcia tego okręgu z osią OX oznacz jako P_1, P_2 , są to punkty o odciętych równych odpowiednio ε_1 i ε_2 .
5. Narysuj symetralną odcinka OP_1 , oraz OP_2 . Punkty, w których symetralna przetnie oś OX oznacz P_3, P_4 , a punkty, w których symetralnej przetnie okrąg jednostkowy, oznacz kolejno V_1, V_2, V_3, V_4 (odwrotnie do kierunku obrotu wskazówek zegara). Jako, że punkty $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ posiadają podwojoną wartość względem pierwiastków równania $z^5 = 1$, symetralna dzieli je dokładnie na pół. Zauważmy, że punkty P_3, P_4 posiadają odciętą równą wartości pierwiastków równania $z^5 = 1$, to jest z_1, z_4 oraz z_2, z_3 , bez części urojonej. Zatem, poruszając się po symetralnej, punkty jej przecięcia z okręgiem jednostkowym dostarczają nam brakującą część urojoną i wskazują cztery wierzchołki pięciokąta, które w połączeniu z wcześniej uzyskanym V_0 tworzą pięciokąt foremny.

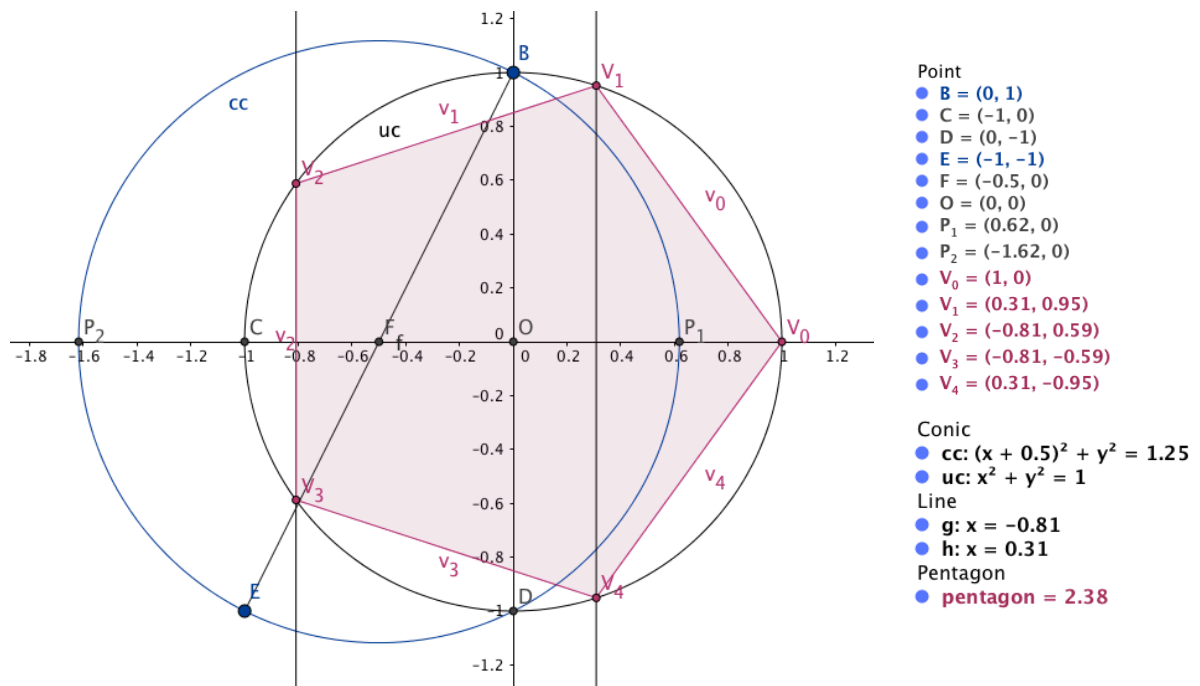


Figura 6.1 Konstrukcja pięciokąta za pomocą metody okręgów Carlyle'a.

Konstrukcja siedmiokąta foremego

Do dzisiaj nie istnieje metoda pozwalająca na stworzenie konstrukcji klasycznej siedmiokąta. Liczba 7 nie należy do dziedziny liczb określonej przez Euklidesa jako $N = 2^m 3^n 5^j$, gdzie $m \in \mathbb{Z}^+$ oraz n i j są równe 0 lub 1, nie spełnia ona też warunku Gaussa $p = 2^k + 1$, stąd stwierdzenie, że nie możemy skonstruować siedmiokąta foremego przy pomocy metody okręgów Carlyle'a. Jednakże, spróbujmy przeprowadzić rozumowanie algebraiczne takiej konstrukcji i odnaleźć moment, w którym metoda jest niesprawna lub pojawia się problem. Rozwiązania równania $z^7 = 1$ wskazują wierzchołki siedmiokąta foremego na płaszczyźnie.

Obliczając pierwiastki dla $z^7 = 1 \Rightarrow z_k = \text{cis} \frac{2k\pi}{7}$

$$k = 0, z_0 = \text{cis}(0) = 1 \quad k = 1, z_1 = \text{cis} \frac{2\pi}{7} \quad k = 2, z_2 = \text{cis} \frac{4\pi}{7}$$

$$k = 3, z_3 = \text{cis} \frac{6\pi}{7} \quad k = 4, z_4 = \text{cis} \frac{8\pi}{7} \quad k = 5, z_5 = \text{cis} \frac{10\pi}{7}$$

$$k = 6, z_6 = \text{cis} \frac{12\pi}{7}$$

Jak poprzednio z pięciokątem, musimy wyznaczyć pierwiastki na płaszczyźnie za pomocą okręgów Carlyle'a, a więc musimy stworzyć trójmian kwadratowy. Jednak, w tym przypadku

posiadamy jeden pierwiastek $z_0 = 1$, który można łatwo odnaleźć oraz pozostałe pierwiastki zespolone $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$. Jako, że $z_0 = 1$, $z^7 = 1$ dzielimy przez $(z - 1)$, dostając $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. Grupując pierwiastki w pary tak, aby wyeliminować ich części zespolone, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 = z_1 + z_6 &= 2\operatorname{Re}(z_1) = 2\cos\frac{2\pi}{7} & \varepsilon_2 = z_2 + z_5 &= 2\operatorname{Re}(z_2) = 2\cos\frac{4\pi}{7} \\ \varepsilon_3 = z_3 + z_4 &= 2\operatorname{Re}(z_3) = 2\cos\frac{6\pi}{7}\end{aligned}$$

Od teraz $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ będą uznawane za trzy pierwiastki pewnego równania. Jako, że posiadamy trzy pierwiastki, sugeruje to stworzenie równania sześciennego, jednakże, aby móc użyć metody Carlyle'a potrzebujemy równania kwadratowego. Musimy więc stworzyć dwa okręgi Carlyle, żeby wykorzystać wszystkie trzy pierwiastki. Następnie użyjemy wzorów Viete'a.

Zatem (bazując na równaniu $z^7 - 1 = 0$)

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 + \varepsilon_2 &= -1 - \varepsilon_3 = -1 - 2\cos\frac{6\pi}{7} \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_3 &= -1 - \varepsilon_2 = -1 - 2\cos\frac{4\pi}{7} \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 &= (z_1 + z_6)(z_2 + z_5) = z_1 z_2 + z_1 z_5 + z_6 z_2 + z_6 z_5 = z_3 + z_6 + z_1 + z_4 \\ &= 2\cos\frac{2\pi}{7} + 2\cos\frac{6\pi}{7} \\ \varepsilon_1 \varepsilon_3 &= (z_1 + z_6)(z_3 + z_4) = z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_6 z_3 + z_6 z_4 = z_4 + z_5 + z_2 + z_3 \\ &= 2\cos\frac{4\pi}{7} + 2\cos\frac{6\pi}{7}\end{aligned}$$

Dla pierwiastków $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, suma jest równa $\left(-1 - 2\cos\frac{6\pi}{7}\right)$, oraz iloczyn jest równy $\left(2\cos\frac{2\pi}{7} + 2\cos\frac{6\pi}{7}\right)$. Otrzymane równanie kwadratowe to:

$$x^2 + \left(1 + 2\cos\frac{6\pi}{7}\right)x + \left(2\cos\frac{2\pi}{7} + 2\cos\frac{6\pi}{7}\right) = 0.$$

Możemy stworzyć okrąg Carlyle'a o średnicy w punktach

$$E_1\left(\left(-1 - 2\cos\frac{6\pi}{7}\right), \left(2\cos\frac{2\pi}{7} + 2\cos\frac{6\pi}{7}\right)\right) \text{ i } B(0,1).$$

Dla pierwiastków $\varepsilon_1, \varepsilon_3$, suma jest równa $\left(-1 - 2\cos\frac{4\pi}{7}\right)$, natomiast iloczyn jest równy

$\left(2\cos\frac{4\pi}{7} + 2\cos\frac{6\pi}{7}\right)$. Odpowiedni trójmian to:

$$x^2 + \left(1 + 2\cos\frac{4\pi}{7}\right)x + \left(2\cos\frac{4\pi}{7} + 2\cos\frac{6\pi}{7}\right) = 0.$$

Możemy stworzyć okrąg Carlyle'a o średnicy w punktach

$$E_2\left(\left(-1 - 2\cos\frac{4\pi}{7}\right), \left(2\cos\frac{4\pi}{7} + 2\cos\frac{6\pi}{7}\right)\right) \text{ oraz } B(0,1).$$

Jak, możemy zaobserwować, metoda sama w sobie jest poprawna, dostajemy dwa równania, na podstawie których możemy skonstruować okręgi Carlyle'a. Jednak, problemem staje się fakt, że musimy skonstruować okrąg o środku w punkcie, którego nie jesteśmy w stanie wyznaczyć jedynie przy użyciu cyrkla i liniału. Zatem, możemy podsumować, że niemożliwe jest stworzenie konstrukcji klasycznej dla siedmiokąta, przy pomocy metody okręgów Carlyle'a. Jednak, dodając użycie linijki ze skalą oraz technologii, w celu przybliżenia wartości punktów, siedmiokąt może zostać skonstruowany. Spróbujmy.

Za pomocą kalkulatora przybliżamy wartości:

Dla pierwiastków $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, suma jest równa $\left(-1 - 2\cos\frac{6\pi}{7}\right) \approx 0.802$, oraz iloczyn jest równy

$$\left(2\cos\frac{2\pi}{7} + 2\cos\frac{6\pi}{7}\right) \approx -0.555.$$

Dla pierwiastków $\varepsilon_1, \varepsilon_3$, suma jest równa $\left(-1 - 2\cos\frac{4\pi}{7}\right) \approx -0.555$ oraz iloczyn jest równy

$$\left(2\cos\frac{4\pi}{7} + 2\cos\frac{6\pi}{7}\right) \approx -2.247.$$

Średnice okręgów Carlyle'a wyznaczone są przez punkty $E_1((0.802), (-0.555))$ i $B(0,1)$ oraz punkty $E_2((-0.555), (-2.247))$ do $B(0,1)$.

Konstrukcja siedmiokąta foremnego wykonana jest w ten sam sposób jak ta dla pięciokąta, za pomocą technologii (Figura 7.1) oraz za pomocą metody klasycznej, z użyciem linijki ze skalą (Appendix Figura 7.2).

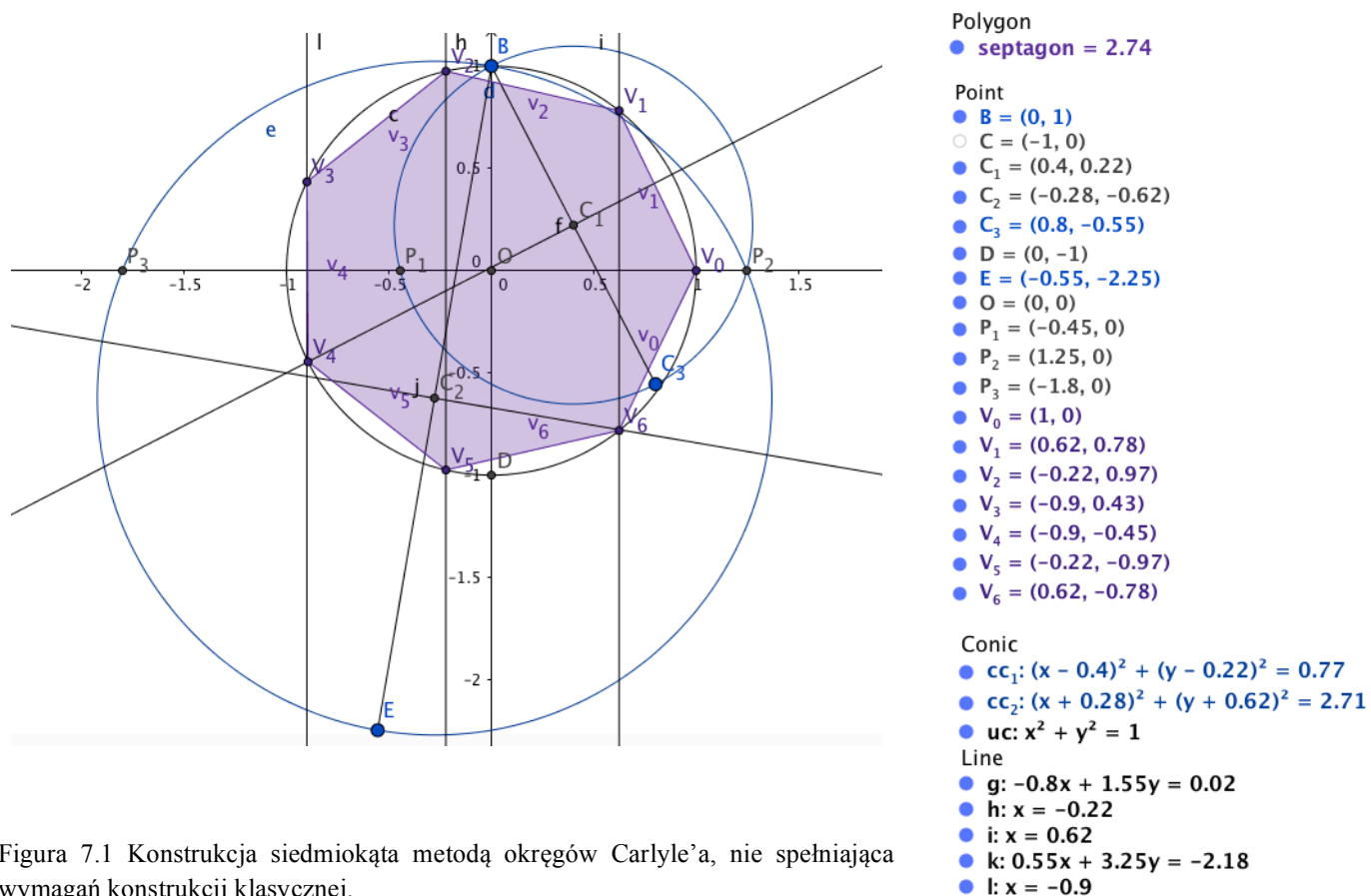


Figura 7.1 Konstrukcja siedmiokąta metodą okręgów Carlyle'a, nie spełniająca wymagań konstrukcji klasycznej.

Zatem, możemy podsumować, że tak naprawdę każdy wielokąt foremny, mógłby zostać skonstruowany przy użyciu metody okręgów Carlyle'a, o ile istniałyby konstrukcje liczby $\cos \frac{2\pi}{n}$ dla dowolnego n naturalnego. Jednakże, możliwe, że wtedy trzeba by było użyć nie jeden, lecz wiele okręgów, w zależności od liczby kątów wielokąta.

Refleksja i konkluzja

Okręgi Carlyle'a są inspirującą metodą wyznaczania pierwiastków równania kwadratowego. Pomimo, iż proste w swojej formie, posiadają szerokie spectrum własności i wielki potencjał w tworzeniu konstrukcji klasycznych regularnych wielokątów. Fakt, iż każde równanie typu $x^2 - px + q = 0$ posiada graficzną reprezentację w formie prostego okręgu o średnicy w punktach $(0,1)$ do (p,q) , przecinającego oś OX w punktach, które są pierwiastkami tego równania, wzbudziło moje zainteresowanie. Podczas mojej pracy badawczej odkryłam bardzo ciekawą własność, że tak naprawdę relacja między promieniem okręgu Carlyle i odległością między środkiem a osią OX , jest równoważna z wyróżnikiem równania kwadratowego związanego z danym okręgiem. Ponadto, metoda okręgów Carlyle'a umożliwia nam tworzenie konstrukcji p -kąta foremego, gdzie $p = 2^k + 1$ oraz $k \in \mathbb{Z}^+$, co zostało zaprezentowane na przykładzie pięciokąta. Co ciekawe, pozwala ona też stworzyć nam metodą klasyczną każdy n -kąć foremny, gdzie n jest liczbą pierwszą Fermata, a więc 3, 5, 17, 257 oraz 65537, co ukazuje prawdziwe piękno i moc matematyki, jednak wymaga skomplikowanej wiedzy matematycznej. Co więcej, okazuje się też, że za pomocą okręgów Carlyle'a możemy wykonać przybliżoną konstrukcję dowolnego wielokąta foremnego. Taka konstrukcja została wyprowadzona dla siedmiokąta. Jednak, rozważając użycie tej metody dla n -kąta foremnego, gdzie $n = 2^k$, i $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$, metoda okręgów Carlyle'a byłaby zupełnie nieefektywna, jako, że wymagała by stworzenia kilku okręgów Carlyle'a, kiedy prościej taki wielokąt możemy uzyskać wielokrotnie dzieląc okrąg jednostkowy na połowy. Podsumowując, metoda okręgów Carlyle jest fascynującą teorią, dzięki, której mogłam poszerzyć swoją wiedzę z zakresu matematyki, powiększyć mój szacunek do tej dziedziny wiedzy oraz przestudiować jej piękno.

Appendix

Figura 6.2

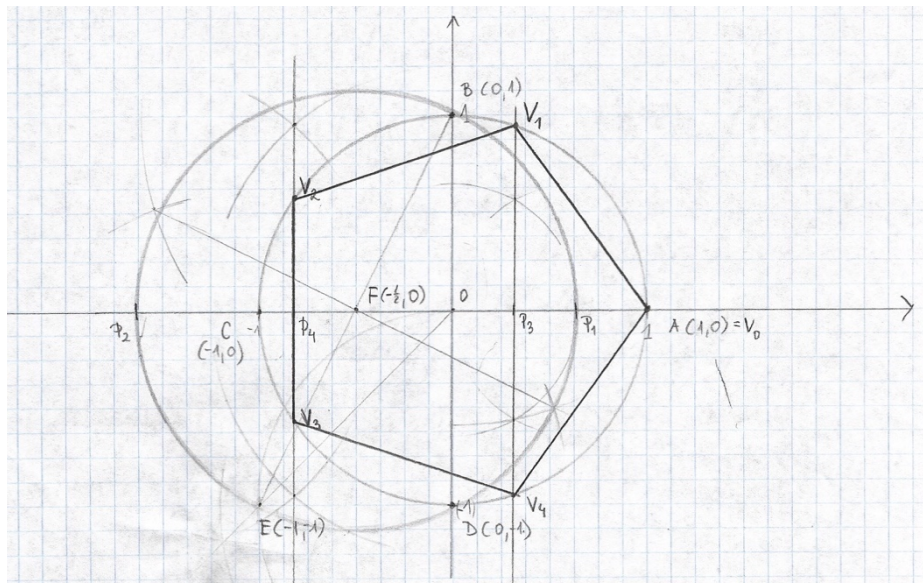
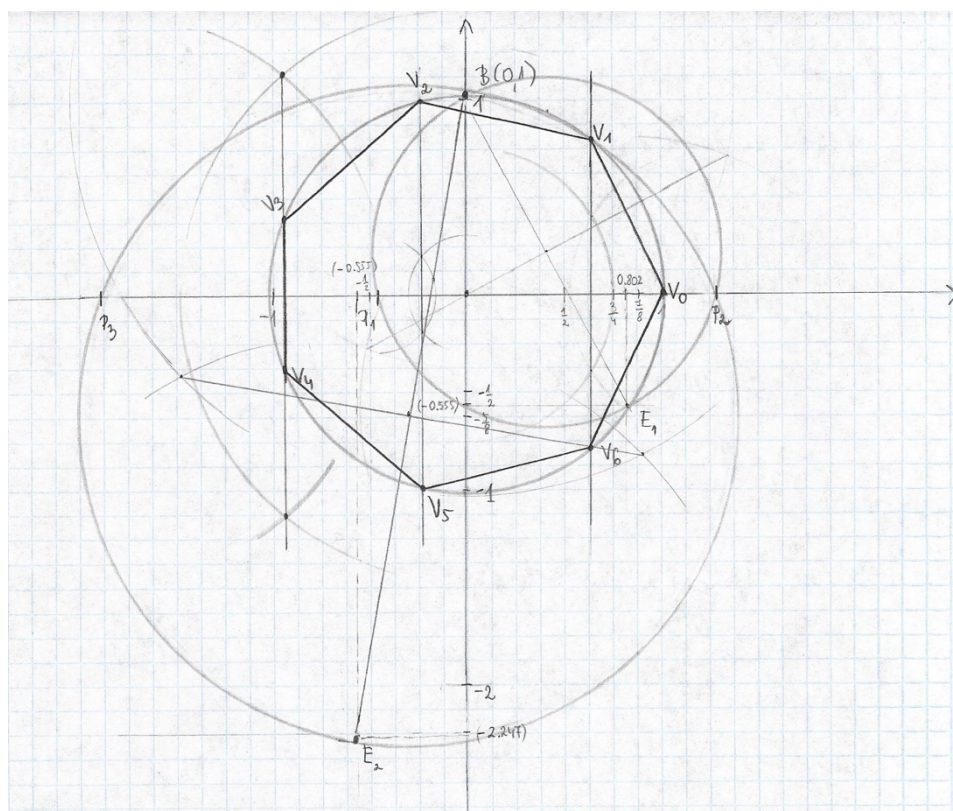


Figura 7.2



Bibliografia

Allaire, Patricia R., and Robert E. Bradley. *Geometric Approaches to Quadratic Equations from Other Times and Places*. The National Council of Teachers of Mathematics, 2001.

"Construction of Regular Polygons." *DynamicsOfPolygons.org*, dynamicsofpolygons.org/PDFs/Constructions.pdf. Accessed 10 Jan. 2017.

DeTemple, Duane W. "Carlyle Circle and the Lemoine Simplicity of Polygon Constructions." *The American Mathematical Monthly*, vol. 98, no. 2, Feb. 1991, pp. 97-108.

Gryszka, Karol. "Okregi Carlyle" ["Carlyle Circle"]. *Delta*, www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/algebra/2015/07/22/Okregi_Carlyle_a/. Accessed 6 Dec. 2016.

Hornsby Jr., E. John. "Geometrical and Graphical Solutions of Quadratic Equations." *The College Mathematics Journal*, vol. 21, no. 5, Nov. 1990, pp. 362-69. Published by Mathematical Association America.

Martin, David, et al. "Complex Number and Polynomials." *Mathematics HL (Core)*, 3rd ed., Haese Mathematics, 2012, pp. 173-212.

Martin, David, et al. "Complex Number." *Mathematics HL (Core)*, 3rd ed., Haese Mathematics, 2012, pp. 480-506.

Wszystkie grafiki robione samodzielnie za pomocą GeoGebra Maths App.