Własności geometryczne elips

Małgorzata Frączek

Czym właściwie są elipsy? Krzywymi stożkowymi, obrazami okręgów w rzucie równoległym, najprostrzymi figurami Lisajoussa, a w językoznawstwie figurami retorycznymi. W tym artykule przyjrzymy się im jednak z geometrycznego punktu widzenia.

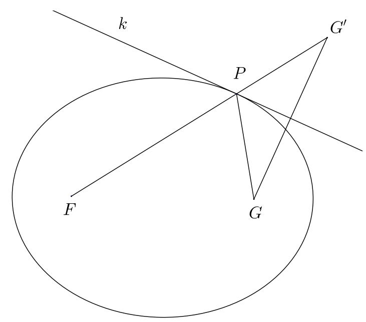
Definicja 1
Zgodnie z najprostszą definicją elipsa o ogniskach w punktach F, G i o stałej $2a$ to zbiór takich punktów P płaszczyzny, że $PF + FG = 2a$. Suma odległości dowolnego punktu P należącego do elipsy od ognisk elipsy jest równa stałej elipsy $2a$. Aby dobrze zrozumieć opisywane poniżej zagadnienia przypomnijmy sobie pojęcie izogonalnego sprzężenia. Jeżeli w kącie wypukłym BAC leżą dwie takie półproste AP i AK, że $BAP = CAK$ to mówimy, że półproste AP i AK są izogonalnie sprzężone w kącie BAC.

Przechodząc już do właściwego tematu przyjrzyjmy się kilku podstawowym własnościom elips.

Własność 1
Najbardziej podstawową z nich jest ta, że jeżeli prosta k jest dwusieczną kąta zewnętrznego trójkąta FPG (przy wierzchołku P), a F i G są ogniskami elipsy o stałej $2a$ oraz punkt P należy do elipsy, to obraz G' punktu G w symetrii względem prostej k jest współliniowy z F i P oraz $|FG'| = 2a$.

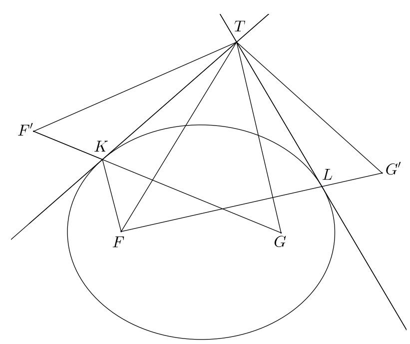
Dowód
Aby udowodnić tę własność należy wybrać punkt Q na prostej FP taki, że $\mid PQ \mid = \mid PG \mid$. Wtedy $\triangle PQG$ jest równoramienny i prosta k jest dwusieczną GPQ między ramionami, zatem prosta $k \perp GQ$. Punkt Q jest obrazem punktu G w symetrii względem prostej $k \Leftrightarrow Q = G'$. Skoro $Q = G'$ to

$$\mid PG' \mid = \mid PG \mid \text{ i } \mid FG' \mid = \mid FQ \mid = \mid FP \mid + \mid PG' \mid = \mid FP \mid + \mid PG \mid = 2a.$$



Własność 2
Kolejną interesującą własnością jest to, że jeśli z punktu T spoza elipsy poprowadzimy styczne k i l do elipsy odpowiednio w punktach K i L, to FTK będzie równa GTL i TFK będzie równa TFL.

Dowód
Przeprowadźmy dowód tej własności, Niech punkt F' będzie obrazem punkty F w symetrii względem prostej k i punkt G' będzie obrazem punktu G w symetrii prostej l. Z własności pierwszej wiemy, że punkt F' należy do prostej KG, a punkt G' należy do prostej FL. Zatem $\mid FT \mid = \mid F'T \mid$, bo prosta k jest symetralną odcinka FF' oraz $\mid GT \mid = \mid G'T \mid$, bo prosta l jest symetralną GG'. , $\mid F'G \mid \ = 2a$ i $\mid FG' \mid = 2a$. Zauważmy, że $\triangle F'GT \equiv \triangle FG'T$ z cechy bok bok bok. $F'TG = FTG'$ zatem $FTK = GTL$. Ponownie korzystając z przystawania $\triangle F'TG$ i $\triangle FTG'$ widzimy, że $TF'K = TFL$. Również $\triangle F'KT \equiv \triangle TKF$, czyli $TF'K = TFK$ zatem $TFK = TFL$, co kończy dowód.



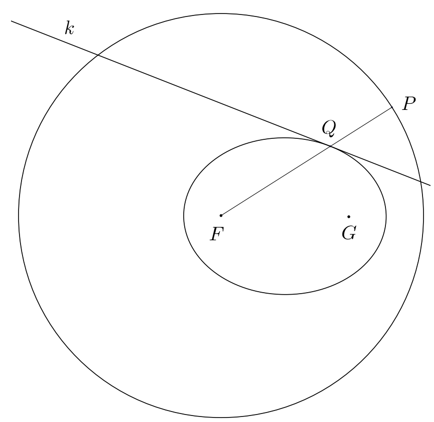
Własność 3
Z dwóch poprzednich własności wynika trzecia. Dla dowolnych punktów F i G izogonalnie sprzężonych względem prostych k i l istnieje elipsa o ogniskach w punktach F i G i stałej $2a = \mid F'G \mid$ (gdzie F' jest obrazem punktu F w symetrii względem prostej k) styczna do tych prostych.

Własność 4

Następna własnością jest to, że zbiór obrazów G' ogniska G w symetriach względem stycznych do elipsy, to okrąg o środku w punkcie F i promieniu $2a$.

Dowód

Przejdźmy do dowodu. Z własności pierwszej wiadomo, że $\forall_{G'} \mid FG' \mid = 2a$, czyli wszystkie obrazy punktu G należą do okręgu o promieniu $2a$ i środku w punkcie F. Niech punkt P należy do okręgu o promieniu $2a$ i środku w punkcie S. Wówczas prosta FP przecina elipsę w pewnym punkcie Q. Styczna do elipsy w punkcie Q jest dwusieczną PQG, ponieważ $\mid FP \mid = 2a = \mid FQ \mid + \mid QP \mid$. Wiemy też, że z własności elipsy $\mid FQ \mid + \mid QG \mid = 2a$ zatem $\mid QP \mid = \mid QG \mid$, czyli punkt P jest obrazem punktu G w symetrii względem prostej k. Zatem zbiorem obrazów G' jest cały okrąg o środku w punkcie F i promieniu $2a$.

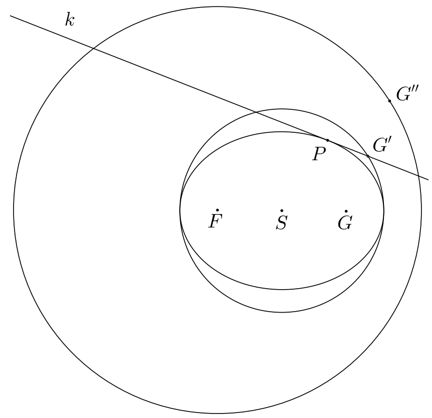


Własność 5

Teraz ostatnia własność, którą się zajmiemy. Zbiór rzutów prostokątnych ogniska G na proste styczne do tej elipsy to okrąg opisany na elipsie.

Dowód

Aby ją udowodnić skorzystamy z poprzedniej własności. Wiemy, że jeśli punkt G' będący obrazem punktu G w symetrii względem prostej k należy do okręgu o środku w punkcie F i promieniu $2a$, to punkt G" w jednokładności o środku w punkcie G i skali $k = 1/2$ punktu G' należy do prostej k. Zatem punkt G" jest rzutem prostokątnym punktu G na styczną k.
Zbiór punktów G" to w jednokładności o skali $k = 1/2$ i środku w punkcie G, okręgu o środku w punkcie F i promieniu $2a$ to okrąg o środku w punkcie S, gdzie S jest środkiem odcinka $\mid FG \mid$ i promieniu a (jest to okrąg styczny do elipsy).



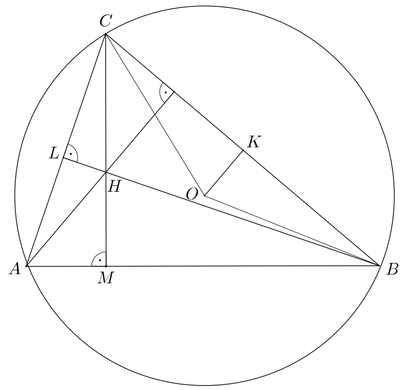
Przejdźmy teraz do wykorzystania powyższych własności w rozwiązywaniu problemów.

Problem 1.
Rozważmy punkty P i Q izogonalnie sprzężone względem każdej z dwóch par prostych zawierających boki trójkąta, chcemy pokazać, że są sprzężone również względem trzeciej pary.

Rozwiązanie
Skorzystamy z własności trzeciej, o której mowa była powyżej. W ACB i CAB można wpisać elipsę o ogniskach w punktach P i Q i stałej $2a =\mid P'Q \mid$. Jest ona styczna do par boków AC i BC oraz do AC i AB, czyli elipsa jest styczna do wszystkich boków $\triangle ABC$. Z własności czwartej wiemy, że $ABQ = QBC$.

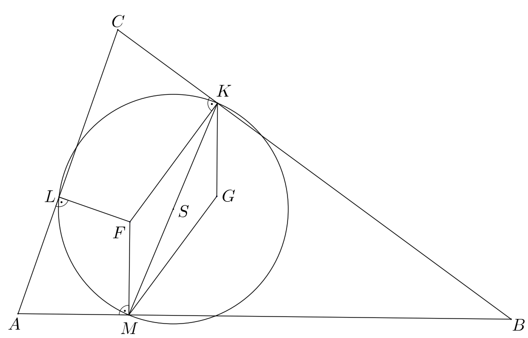
Problem 2.
Zastanówmy się czy w dowolny trójkąt ostrokątny można wpisać elipsę o ogniskach O, H, gdzie O jest środkiem okręgu opisanego, a H ortocentrum trójkąta.

Rozwiązanie
Wystarczy pokazać, że $ACM = OCK$, czyli że punkty O i H są izogonalnie sprzężone w dowolnym kącie $\triangle ABC$. Zauważmy, że $\triangle CLH \sim \triangle CAM$ z cechy kąt kąt kąt. $COB = 2CAM$, ponieważ są to kąty środkowy i wpisany oparte na tym samym łuku. Zatem $COK = CAM$, bo prosta OK jest dwusieczną COB. Widzimy, że $\triangle COK \sim \triangle CAM$, czyli $ACM = OCK$, a co za tym idzie, w dowolny trójkąt ostrokątny można wpisać elipsę.



Problem 3.
Punkty F i G leżą wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC, przy czym $ACF = BCG$ i $CAF = BAG$. Punkty K, L, M są rzutami prostokątnymi punktu F odpowiednio na boki BC, CA, AB. Spróbujmy udowodnić, że kąt KLM jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy punkt G jest punktem przecięcia wysokości trójkąta BKM.

Rozwiązanie
Zauważmy, że punkty F i G są izogonalnie sprzężone w $\triangle ABC$, czyli są ogniskami elipsy o stałej $2a$ wpisanej w ten trójkąt. Z własności szóstej wiemy, że rzuty punktu F na styczne (boki trójkąta) leżą na okręgu o środku w punkcie S (środku odcinka FG) i promieniu a. $KLM = 90°$ wtedy i tylko wtedy, gdy MK jest średnicą okręgu o środku w punkcie S i promieniu a. Zatem punkt S musi być środkiem boku MK, a czworokąt $FMGK$ równoległobokiem. $\overline{KG} \perp \overline{AB} \parallel \overline{FM} \wedge \overline{MG} \perp \overline{BC} \parallel \overline{KF}$, czyli G jest punktem przecięcia wysokości $\triangle BKM$.



Definicja 2

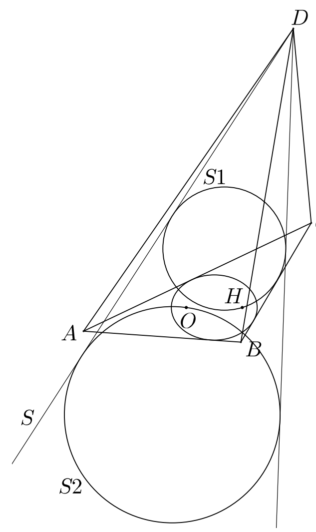
Istotnym zagadnieniem związanym z elipsami są również **sfery Dandelina**. Są to sfery o środkach leżących na osi obrotu obrotowej powierzchni stożkowej i styczne zarówno do tej powierzchni, jak i do pewnej płaszczyzny nie przechodzącej przez wierzchołek tej powierzchni. Płaszczyzna ta, gdy kąt, jaki tworzy z kierunkiem osi obrotu powierzchni stożkowej jest większy od, kąta między osią a tworzącą powierzchni stożkowej, przecina tę powierzchnię wzdłuż elipsy. Istnieją po dwie takie sfery, ich punkty styczności z płaszczyzną tnącą są ogniskami elipsy.

Problem 4

Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ściany ABC w punkcie H, a sfera dopisana do tego czworościanu jest styczna do ściany ABC w punkcie O. Wiemy, że punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, zatem czy punkt H jest punktem przecięcia wysokości tego trójkąta?

Rozwiązanie

Rozpatrywane sfery oznaczmy $S1$ i $S2$, a S stożek o wierzchołku D, w który wpisane są sfery $S1$ i $S2$ (każda tworząca stożka S jest wspólną styczną sfer $S1$ i $S2$). Posługując się sferami Dandelina, wnioskujemy, że część wspólna płaszczyzny ABC i stożka S jest elipsą wpisaną w trójkąt ABC, a punkty O i H są jej ogniskami. Widzimy zatem, że $ABH = CBO$ oraz $BCH = ACO$. Wiemy, że jeśli punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, a H punktem przecięcia jego wysokości, to powyższe równości są spełnione. Z drugiej strony dla danego punktu O punkt H jest jednoznacznie wyznaczony przez powyższe zależności. Zatem skoro O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, to H musi być punktem przecięcia wysokości tego trójkąta.



Problem 5
Dany jest ostrosłup czworokątny $ABCDS$ o podstawie czworokąta wypukłego $ABCD$. Sfera wpisana w ten ostrosłup jest styczna do ściany $ABCD$ w punkcie P. Czy $APB + CPD = 180°$?

Rozwiązanie
Niech s będzie stożkiem o wierzchołku S, w który wpisana jest sfera wpisana w ostrosłup $ABCDS$. Część wspólna tego stożka z płaszczyzną podstawy jest elipsą wpisaną w czworokąt $ABCD$, a punkt P jest jej ogniskiem. Z własności trzeciej wynika, że $APK = APN$, $BPK = BPL$, $CPL = CPM$ i $DPM = DPN$. Wiemy, że suma miar tych kątów jest równa $360°$, zatem $APK + BPK + CPM + DPM = 180°$. Więc $APB + CPD = 180°$.