Maciej Witkowski

uczeń klasy III b

Gimnazjum Nr 37 w Krakowie

os. Złotego Wieku 36

Świat brył matematycznych

Opiekun - mgr Teresa Sklepek

Kraków 2017 rok

Spis treści

Wstęp

1. Bryła
2. Ankieta
3. Droga do szkoły
4. Jakie kształty mają przedmioty użytku codziennego?
   a) Prostopadłościany
   b) Graniastosłupy
   c) Ostrosłupy
   d) Bryły obrotowe
5. „Galeria Wielościanów”
6. Wielościany foremne
7. Wielościany półforemne
8. Wielościany Catalana
9. Wielościany gwiaździste
10. Wielościany Keplera-Poinsota
11. Antygraniastosłupy
12. Wzór Eulera
13.Ciekawe wielościany
14. Inne "dziwne" bryły
15. Bryły niemożliwe

Zakończenie
Zagadka

Wstęp

Moja praca powstała w trakcie realizacji projektu edukacyjnego. Postanowiłem sprawdzić jakie bryły są w naszym najbliższym otoczeniu. Jakie spotykamy idąc np. do szkoły? Szukałem w różnych książkach i na stronach internetowych co ciekawego napisano na ten temat.

1. Bryła

W Wikipedii, znalazłem tylko informację, że bryła geometryczna to figura przestrzenna. Jest też wzmianka o bryłach w architekturze i kilku osobach, które mają takie nazwisko. W Wielkiej Encyklopedii Powszechnej PWN czytamy, że jest to dowolny ograniczony obszar przestrzeni wraz z powierzchnią ograniczającą, np. kula, sześcian.

Natomiast więcej informacji dotyczy wielościanów.
Wg Wikipedii **Wielościan** to bryła geometryczna ograniczona przez powierzchnię wielościenną, czyli powierzchnię utworzoną z wielokątów o rozłącznych wnętrzach i każdym boku wspólnym dla dwóch wielokątów. Każdy wielościan utworzony jest ze

- **ścian** – wielokątów, które razem tworzą *powierzchnię wielościanu,*
- **krawędzi**, będących bokami ściany,
- **wierzchołków**, będących końcami krawędzi wielościanu.

Wg Wielkiej Encyklopedii Powszechnej PWN, **Wielościan** to część przestrzeni składająca się z punktów leżących wewnątrz powierzchni wielościennej i na tej powierzchni.
W książce „Z geometrią za pan brat" podano ciekawą informację.

„W dawnych czasach za wielościan uważano każdą bryłę ograniczoną skończoną liczbą ścian płaskich. W czasach późniejszych zaczęto traktować wielościan jaki figurę utworzoną z wieloboków niezależnie czy ograniczała ona czy nie ograniczała jakiejś części przestrzeni. W rozmaitych badaniach przyjmuje się na ogół różne definicję wielościanu" Autorzy przedstawili zdanie dwóch znawców zagadnień dotyczących wielościanu, E. Steinitza i H. Rademachera:

,,Nie ma jednolitej, ogólnie przyjętej definicji wielościanu, a nawet nie jest wskazane jej ustalenie, do teorii wielościanów należą bowiem badania różnego rodzaju i w zależności od tego może się okazać celowe używanie raz jednej, kiedy indziej innej definicji".

Własności wielościanów zależą od przyjętej definicji. Trzeba ją konsekwentnie stosować, bo dowolna interpretacja może prowadzić do błędów.

W książce „Z geometrią za pan brat" przyjęto taką definicję wielościanu- *wielościanem* (powierzchnią wielościenną) nazywamy zbiór składający się ze skończonej liczby płaskich wielokątów, nazywanych ścianami wielościanu, zestawionych w przestrzeni w ten sposób, że spełnione są trzy następujące właściwości:

1) dowolny bok każdego z tych wielokąta jest również bokiem dokładnie jeszcze jednego wielokąta;

2) każde dwa wielokąty *a, b* tego zbioru można połączyć ze sobą za pomocą ciągu $a_1, a_2, ..., a_k$ takich wielokątów należących do tego zbioru, w ten sposób, że wielokąt *a* ma wspólny bok z wielokątem a_1, a_1 ma wspólny bok z a_2, ..., wielokąt a_k ma wspólny bok z *b*;

3) jeżeli jakiekolwiek dwa wielokąty *a, b* mają wspólny wierzchołek A, to zawsze można wybrać taki ciąg wielokątów $a_1, a_2, ..., a_k$ spełniających oba poprzednie warunki, aby każdy z nich miał wierzchołek A.

Wielokąty tworzące wielościan nazywamy jego ścianami, boki tych wielokątów nazywamy krawędziami wielościanu, a wierzchołki wielokątów - wierzchołkami wielościanu.

2. Ankieta

Byłem ciekawy, co moi rówieśnicy wiedzą na temat brył. Przygotowałem cztery pytania i poprosiłem koleżanki oraz kolegów z mojej szkoły o odpowiedzi. Ankietę przeprowadziłem we wrześniu.

1) Jaką znasz bryłę?

Odpowiedzi udzieliło 107 osób. Na pierwsze pytanie, tak jak oczekiwałem najwięcej osób – 46 odpowiedziało, że zna sześcian. Ale, co mnie zdziwiło, aż 28 osób nie udzieliło żadnej odpowiedzi lub napisało, że nie zna żadnej bryły. Osiem osób wymieniło prostopadłościan.

Pojawiły się odpowiedzi sześciokąt, kwadrat, romb, prostokąt czy czworokąt, Myślę, że w kilku przypadkach, nazwę sześciokąt pomylono z nazwą sześcian. Wymieniono łącznie 9 figur płaskich!

Bryła	Odpowiedzi klasy I	Odpowiedzi klasy II	Odpowiedzi klasy III	suma
sześcian	18	17	11	46
brak	10	9	9	28
prostopadłościan	5	3	0	8
graniastosłup	0	5	1	6
walec	3	1	0	4
ostrosłup	2	1	0	3
kwadrat	0	3	0	3
sześciokąt	0	2	0	2
stożek	0	2	0	2
prostokąt	0	2	0	2
romb	0	1	0	1
kulę	0	1	0	1
czworokąt	1	0	0	1
suma	39	47	21	107

2) Jakie bryły widzisz idąc do szkoły?

Najwięcej osób wymieniło tym razem prostopadłościan lub sześcian. Porównywalna liczba osób nie udzieliła odpowiedzi lub napisała, że nie wie. Niektórzy podali nazwę przedmiotu lub własność.

Bryła	Odpowiedzi klasy I	Odpowiedzi klasy II	Odpowiedzi klasy III	suma
prostopadłościan	10	6	6	22
sześcian	7	7	7	21
brak odpowiedzi	5	11	4	20
kwadrat	4	2	3	9
prostokąt	2	5	0	7
blok	3	3	0	6
koło	1	4	0	5
sześciokąt	1	2	0	3
walec	3	0	0	3
graniastosłup	0	2	0	2
stożek	0	2	0	2
okrągłe, trójkątne	0	1	0	1
znak drogowy	0	1	0	1
cegły	0	1	0	1

przestrzenne	0	0	1	1
czworokąt	1	0	0	1
śmietnik	1	0	0	1
kula	1	0	0	1
suma	39	47	21	107

3) Jakie znasz przykłady brył w architekturze?

W odpowiedziach na to pytanie pojawiło się więcej nazw brył. Budynki na naszym osiedlu są prostopadłościenne. W centrum Krakowa i na nowobudowanych osiedlach są bardziej urozmaicone.

Bryła	Odpowiedzi klasy I	Odpowiedzi klasy II	Odpowiedzi klasy III	suma
brak	20	13	8	41
blok	4	6	6	16
sześcian	4	7	3	14
prostopadłościan	5	2	0	7
stożek	1	3	0	4
walec	2	0	2	4
trójkąt	0	3	0	3
graniastosłup	0	1	2	3
ostrosłup	1	1	0	2
kwadrat	0	2	0	2
meble	0	2	0	2
sześciokąt	0	1	0	1
pięciokąt	0	1	0	1
romb	0	1	0	1
kopuła	0	1	0	1
budynki	0	1	0	1
koło	0	1	0	1
wielokąt	0	1	0	1
czworokąt	1	0	0	1
kula	1	0	0	1
suma	39	47	21	107

4) Jakie znasz przykłady brył w przyrodzie?

Połowa osób nie wypatrzyła w przyrodzie żadnej bryły. Pewnie udzielający odpowiedzi podając „drzewo” mieli na myśli walec. Może pod wpływem gier komputerowych za bryłę ktoś uznał kwiatki.

Bryła	Odpowiedzi klasy I	Odpowiedzi klasy II	Odpowiedzi klasy III	suma
brak	25	17	12	54
drzewo	1	8	0	9
walec	5	4	0	9
koło	0	4	3	7
stożek	2	1	2	5
kamień	0	4	0	4
trójkąt	0	1	2	3
okrąg	0	1	1	2
kwiatki	0	2	0	2
kryształki solne	2	0	0	2
geoida	2	0	0	2
grad	0	1	0	1
kula	0	1	0	1
płatki śniegu	0	1	0	1
sześcienne	0	1	0	1
ławka	0	1	0	1
owal	0	0	1	1
czworokąt	1	0	0	1
kwadrat	1	0	0	1
suma	39	47	21	107

Z ankiety wynika, że część uczniów myli figury płaskie i figury przestrzenne. Pod koniec I okresu uczniowie z klas trzecich przygotowywali modele różnych brył. Myślę, że wyniki ankiety byłyby inne, gdybym ankietę przeprowadził dziś.

3. Droga do szkoły

Sprawdziłem jakie bryły spotykam idąc co dzień na lekcje. Mieszkam niedaleko mojej szkoły. W bloku.

Po drodze mijam kilka obiektów. Najpierw przechodzę obok śmietnika. Ma on kształt prostopadłościanu z dachem w kształcie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego.

Następnie przechodzę obok sklepu połączonego z „Klubem Kuźnia”. Cała budowla składa się z wielu mniejszych i większych prostopadłościanów.

Na końcu mijam kiosk w kształcie dwóch prostopadłościanów połączonych ze sobą - budowli i dachu.

Chodzę do szkoły codziennie i nie zauważyłem, że blisko niej stoi pomnik. Dzięki tej pracy go zobaczyłem! Składa się kilku prostopadłościanów. Na jednym z nich jest płaskorzeźba Jana Kochanowskiego. Dowiedziałem się, że pomnik

postawiono w 1974 r., a autorem wieloelementowej kompozycji z reliefowym portretem poety jest Jan Danielak.

Przed szkołą kosz na śmieci ma kształt walca, a nad nim jest stożek ścięty.

A wreszcie moja szkoła! Zestaw prostopadłościanów.

4. Jakie kształty mają przedmioty użytku codziennego i te, które nas otaczają?

a) Prostopadłościany

Nic dziwnego, że w omawianej ankiecie najczęściej wymienianą bryłą był prostopadłościan. Prostopadłościany towarzyszą nam już od najmłodszych lat. Małe dziecko, tuż po urodzeniu, podobno nie widzi kształtów, ale kolory. Mój pokój ma kształt prostopadłościanu o podstawie prostokąta. Większość z nas też mieszka w „prostopadłościanie". Kiedy byłem mały bawiłem się sześciennymi i prostopadłościennymi klockami z drewna. Budowałem z nich różne budowle o rozmaitych kształtach.

W moim domu jest wiele przedmiotów mających kształt prostopadłościanu: szafa, komputer, głośniki, lodówka, piekarnik, pralka.

Opakowania mają najczęściej kształt prostopadłościanów, bo łatwo je układać w większych paczkach. Prostopadłościennych. Paczki przewozimy w kontenerach o podobnym kształcie. Mają ustalone znormalizowane wymiary.

Pudełka mają kształt prostopadłościanu.

Natomiast szkoła, do której chodzę zbudowana jest z kilku prostopadłościanów różnej wielkości połączonych ze sobą.

b) graniastosłupy

Pudełko z czekoladkami ma kształt prostopadłościanu o podstawie sześciokąta, ale nie jest to sześciokąt foremny.

Dolna część wieży kościoła ma kształt prostopadłościanu o podstawie kwadratu. Budynki to graniastosłupy o podstawie pięciokąta – front kościoła.

Ośmiokątna wieża kościoła św. Andrzeja

Zabytkowy budynek dworca kojowego.

c) ostrosłupy

U góry wieży jest ostrosłup prawidłowy sześciokątny.

Pudełko z czekoladkami to ostrosłup ścięty.

d) Bryły obrotowe

Znicz w kształcie walca.

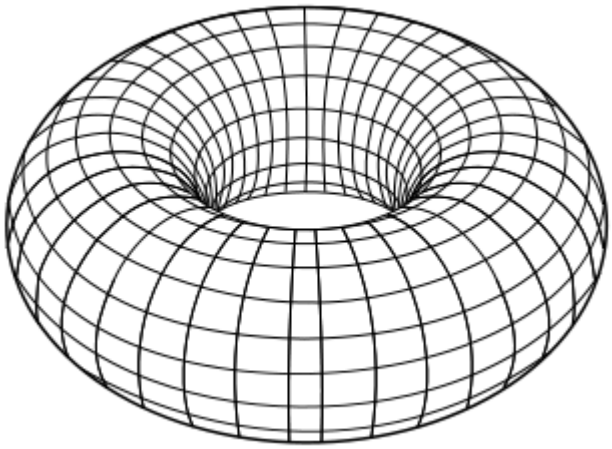
Słup ogłoszeniowy.

Moja piłka – kula

Bombka świąteczna.

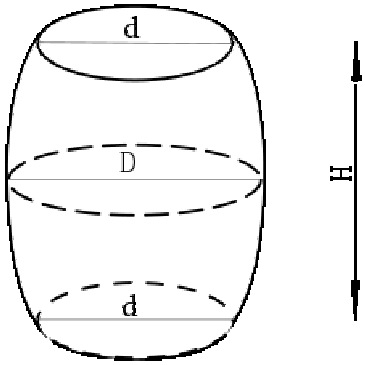
Choinka, która stała przed Galerią Kazimierz ma kształt stożka.

Innymi bryłami obrotowymi są: torus,



-

beczka



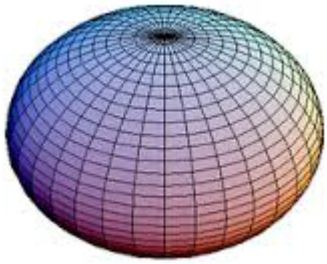
D - średnica beczki w jej najszerszym miejscu;

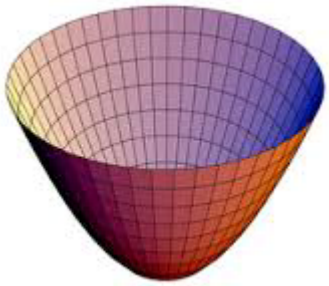
– średnica beczki w jej najwęższym miejscu

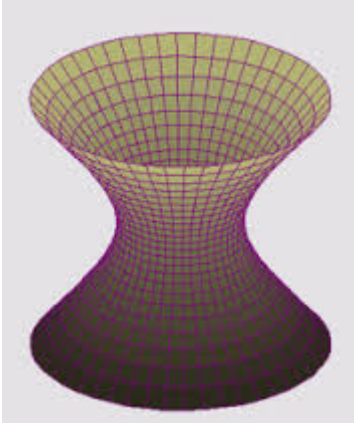
H - wysokość beczki

Tauron Arena Kraków

elipsoida obrotowa paraboloida obrotowa hiperboloida obrotowa.







-,

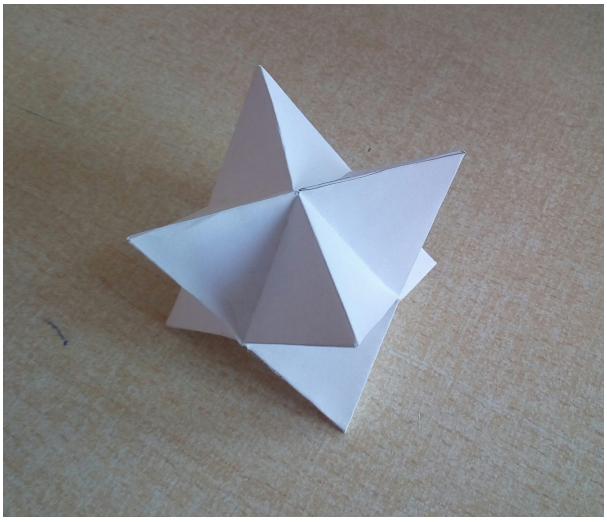
-

Kościół św. Barbary

5. „Galeria Wielościanów”

Przeglądając „Galerię Wielościanów” Zdzisława Pogody zainteresował mnie dział „Kompozycje wielościanów foremnych”. Pokazane jest w nim np. jak wykonać stellę octangulę.

Różne wielościany foremne połączone ze sobą, dają niekiedy bardzo ciekawe efekty. Spodobało mi się jak różnorodnie oraz ciekawie wyglądające kompozycje można tworzyć. Najbardziej moim zdaniem na uwagę zasługuje zestawienie pięciu czworościanów wpisanych w dwunasto- ścian foremny.
Okazuje się, że w przyrodzie występują minerały mające kształt wielościanów foremnych.



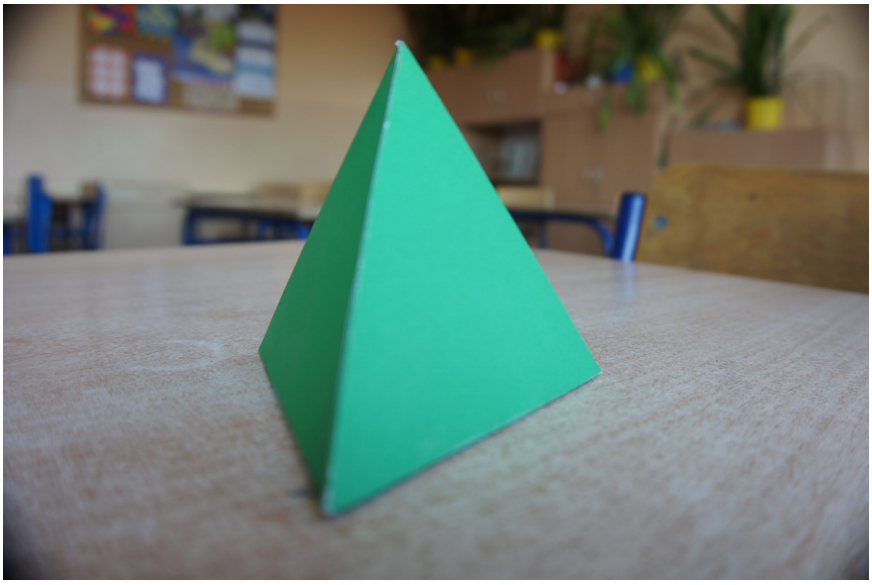
6. Wielościan foremny

Wielościan foremny, zwany jest też bryłą platońską, to wielościan spełniający następujące trzy warunki:

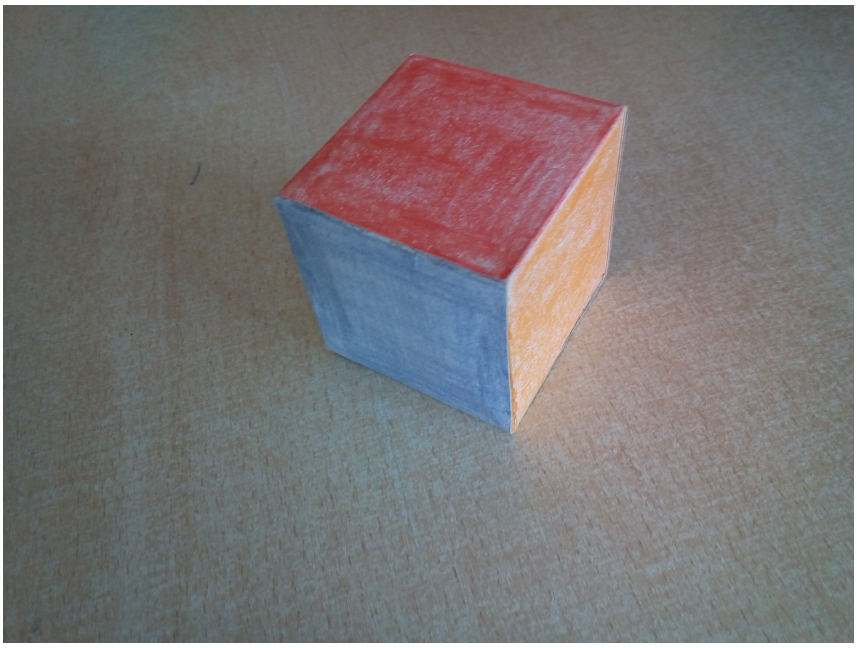
- ściany są przystającymi wielokątami foremnymi,
- w każdym wierzchołku zbiega się jednakowa liczba ścian,
- jest bryłą wypukłą.

Wielościanów foremnych jest tylko pięć:

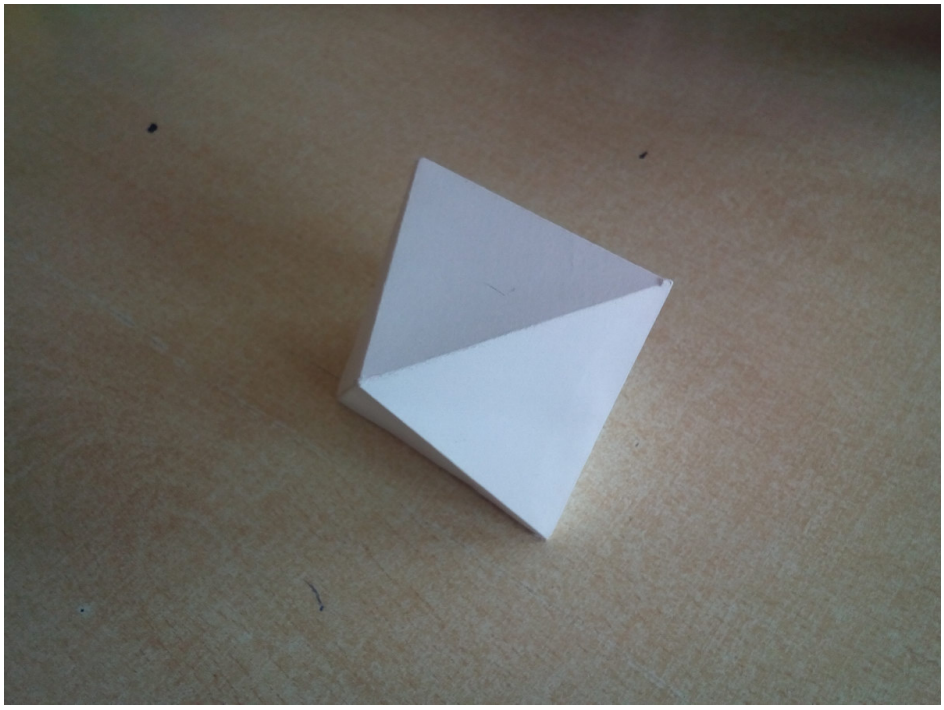
a) czworościan foremny ma 4 ściany, 6 krawędzi i 4 wierzchołki.



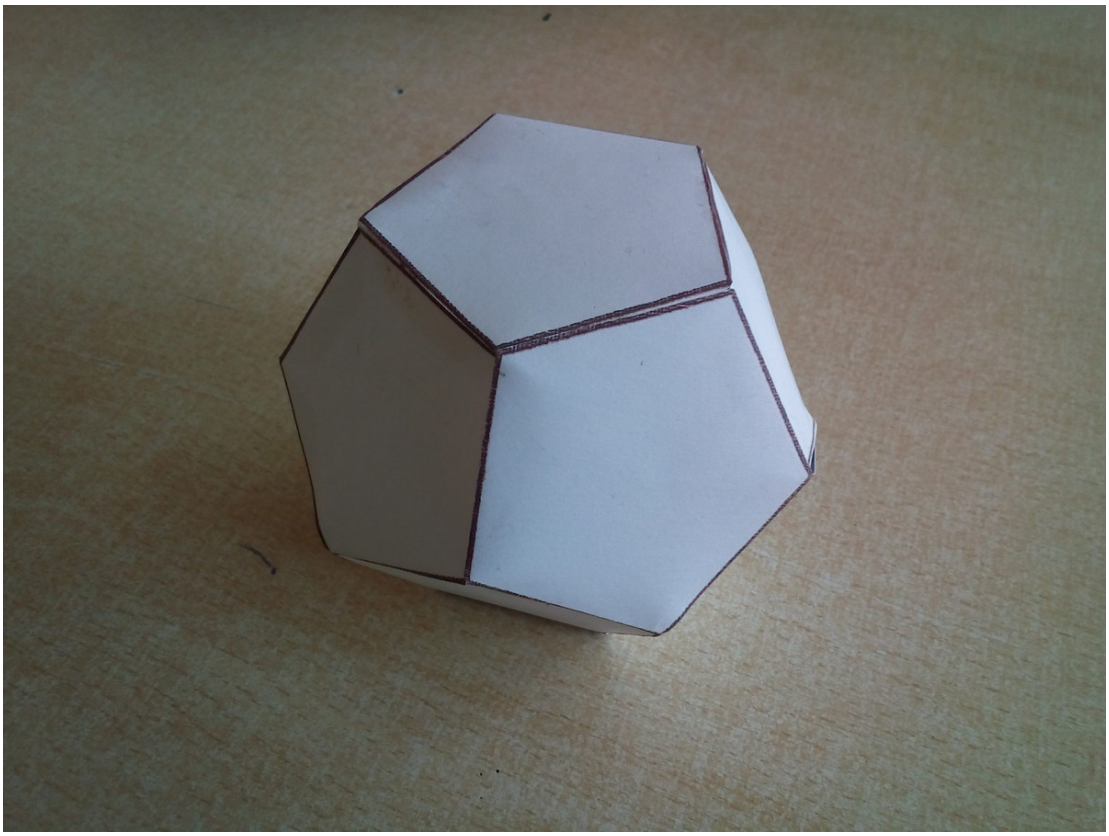
b) sześcian ma 6 ścian, 12 krawędzi i 8 wierzchołków.



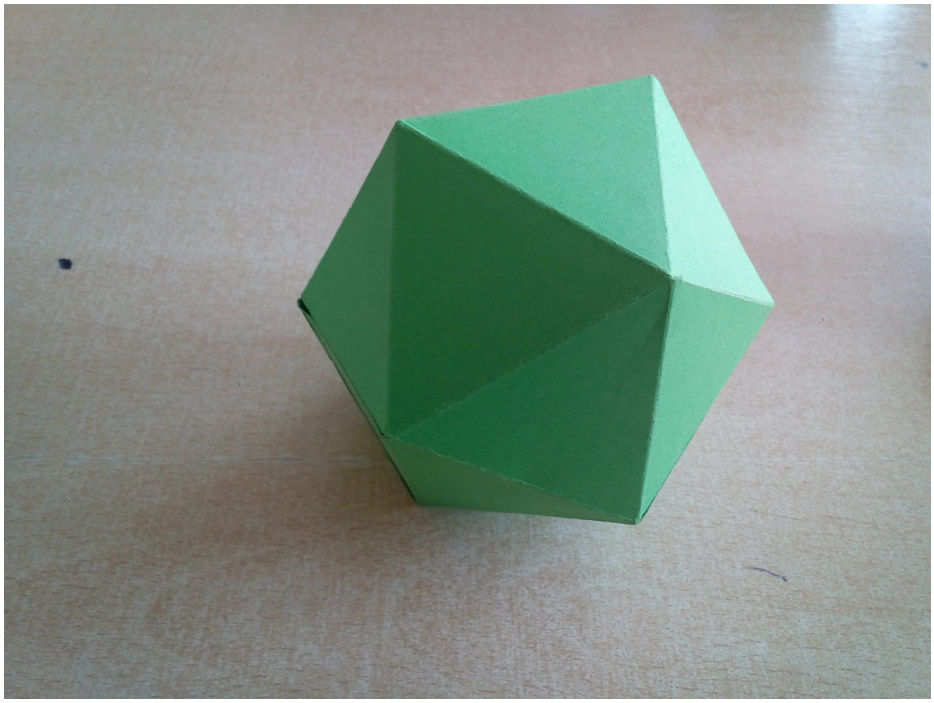
c) ośmiościan foremny ma 8 ścian, 12 krawędzi i 6 wierzchołków.



d) dwunastościan foremny ma 12 ścian, 30 krawędzi i 20 wierzchołków.



e) dwudziestościan foremny ma 20 ścian, 30 krawędzi i 8 wierzchołków.

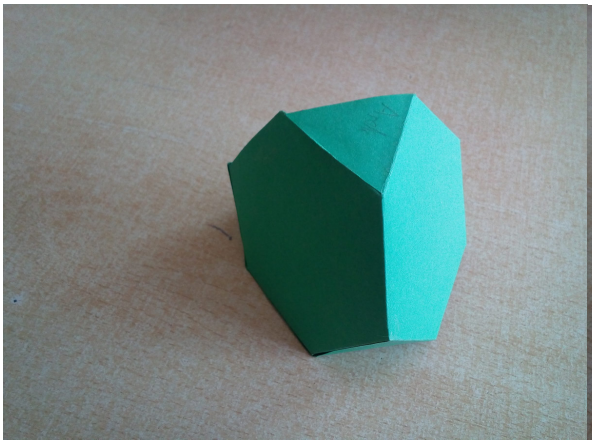


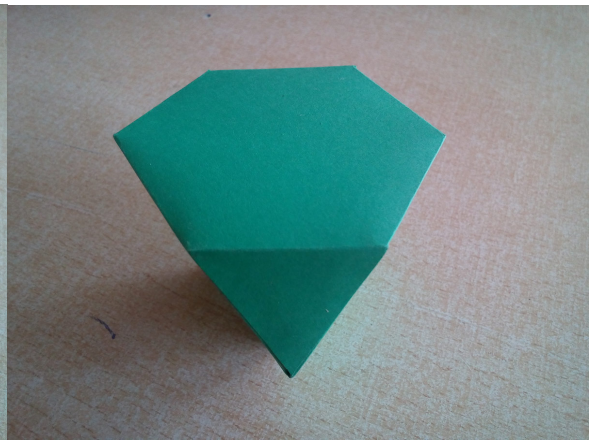
Ściany czworościanu foremnego, ośmiościanu foremnego i dwudziestościanu foremnego są trójkątami równobocznymi. Ściany sześcianu są kwadratami, a ściany dwunastościanu foremnego – pięciokątami foremnymi.

7. Wielościany półforemne

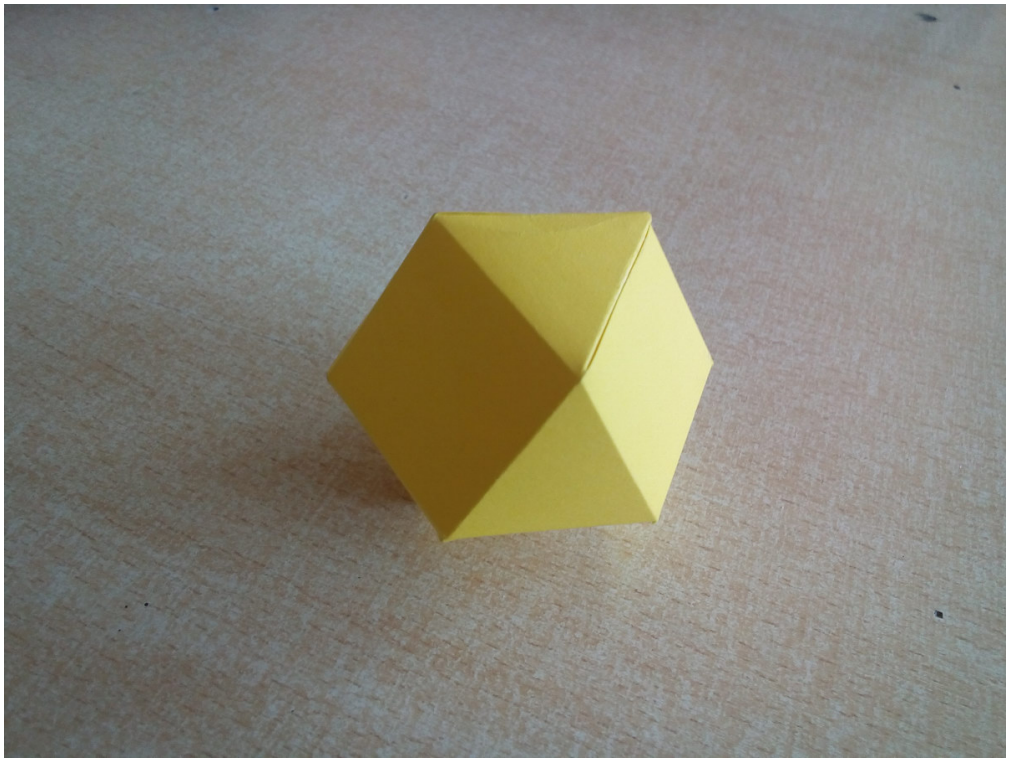
(nazywane również wielościanami archimedesowymi – to wielościany, których ściany są wielokątami foremnymi, w każdym wierzchołku zbiega się jednakowa liczba ścian, jednak ściany nie są wielokątami o tej samej liczbie wierzchołków. Istnieje 13 wielościanów półforemnych.

1) Czworościan ścięty otrzymujemy, gdy obetniemy wierzchołki czworościanu foremnego. Ściany to 4 sześciokąty foremne i 4 trójkąty równoboczne, czyli ma 8 ścian. 18 krawędzi i 12 wierzchołków.

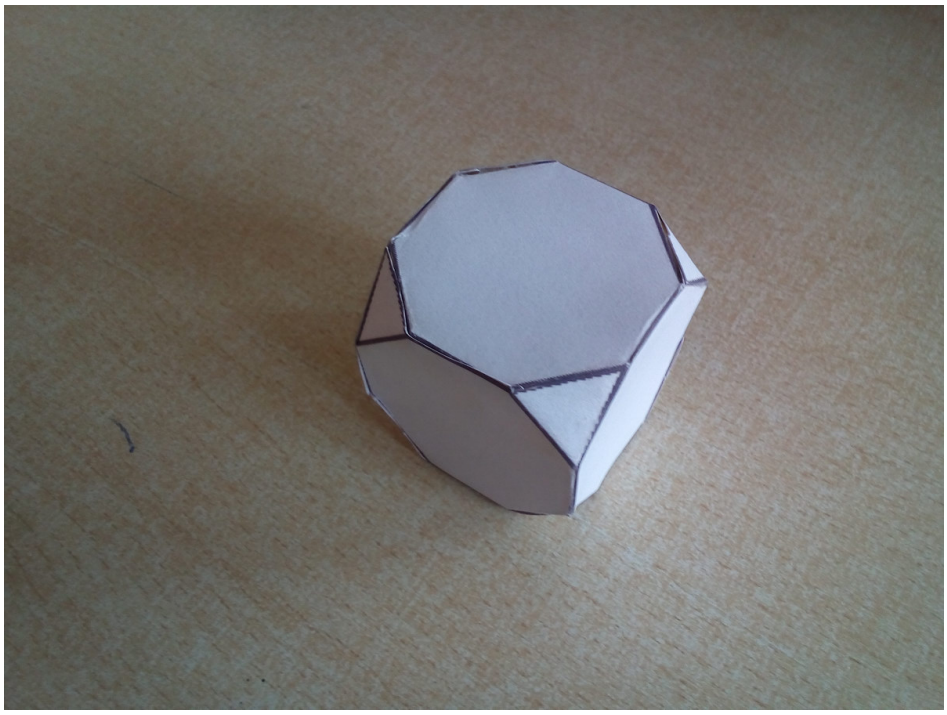




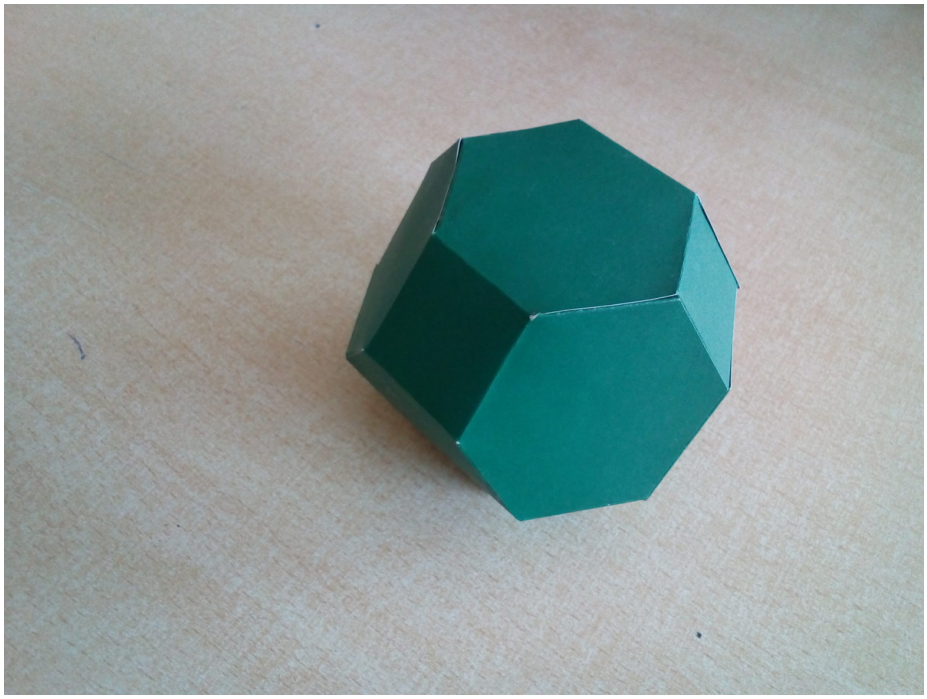
2) Sześcio-ośmiościan. Ściany to 6 kwadratów i 8 trójkątów równoboczne, czyli ma 14 ścian. 24 krawędzie i 12 wierzchołków.



3) Sześcian ścięty otrzymujemy, gdy obetniemy wierzchołki sześcianu. Ściany to 6 ośmiokątów foremnych i 8 trójkątów równobocznych, czyli ma 14 ścian. 36 krawędzi i 24 wierzchołki.



4) Ośmiościan ścięty otrzymujemy, gdy obetniemy wierzchołki osmiościanu. Ściany to 6 kwadratów i 8 sześciokątów foremnych, czyli ma 14 ścian. 36 krawędzi i 24 wierzchołki.



5) Sześcio-ośmioscian rombowy mały ma 26 ścian (8 trójkątów i 18 kwadratów), 48 krawędzi i 24 wierzchołki.

6) Sześcio-ośmiościan rombowy wielki

7) Sześcio-ośmiościan przycięty

8)Dwudziesto-dwunastościan

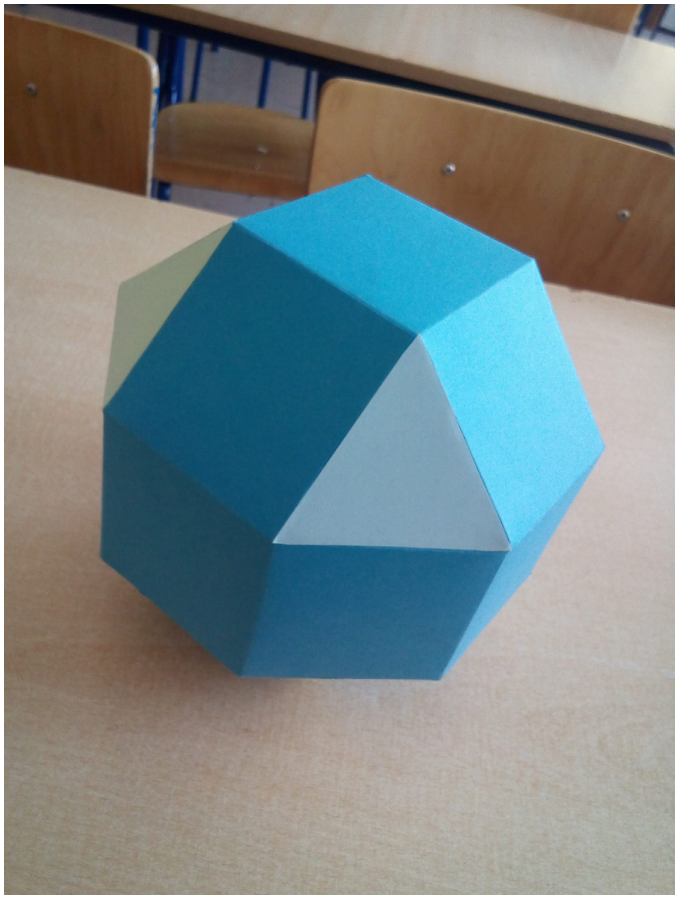
9) Dwunastoscian ścięty

10) Dwudziestscian ścięty

11) Dwudziesto-dwunastoscian rombowy mały

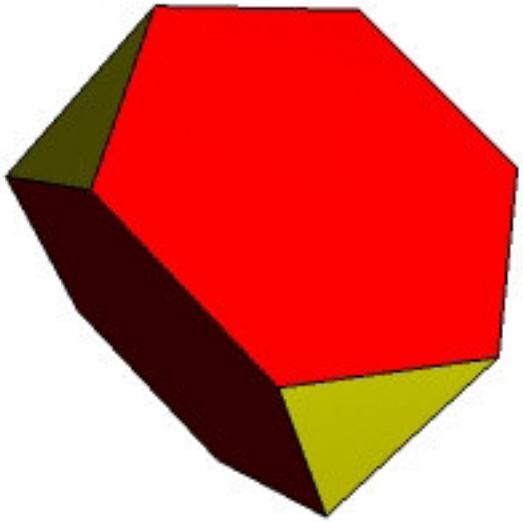
12) Dwudziesto-dwunastoscian rombowy wielki

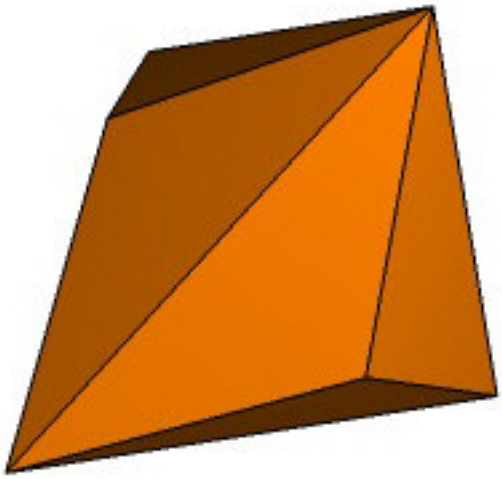
13) Dwudziesto-dwunastoscian przycięty



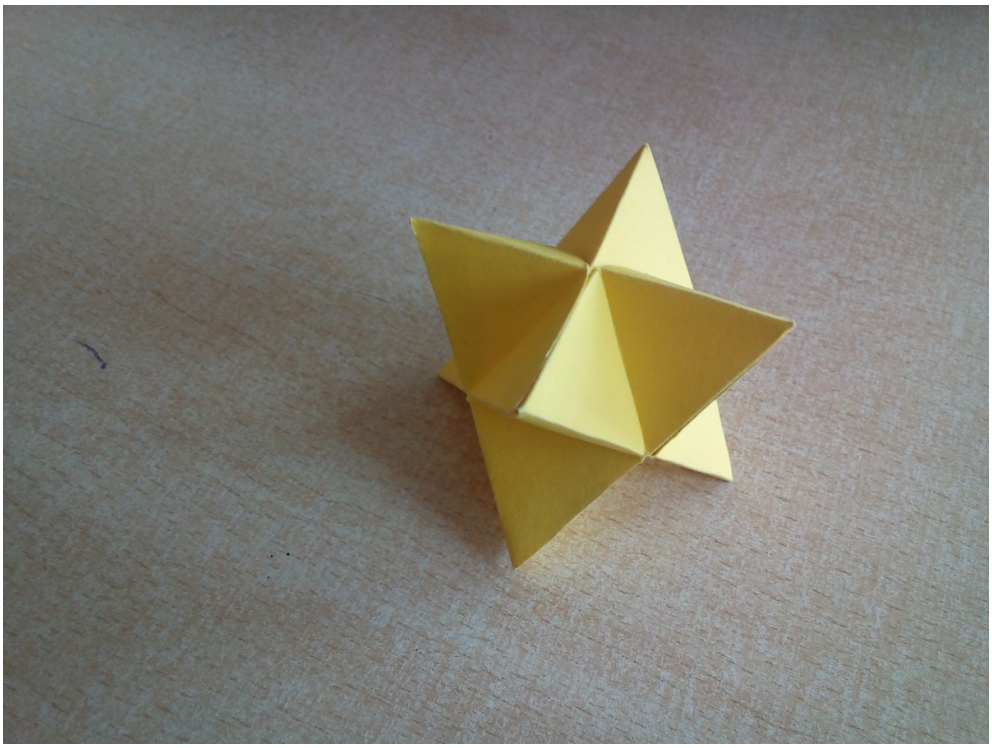
8. Wielościany Catalana (bryły Catalana) to wielościany dualne do wielościanów półforemnych. Wielościan Catalana powstaje przez zastąpienie każdej ściany wierzchołkiem, a każdego wierzchołka ścianą.

Nazwa pochodzi od nazwiska belgijskiego matematyka Eugena Charlesa Catalana.





9. Wielościany gwiaździste



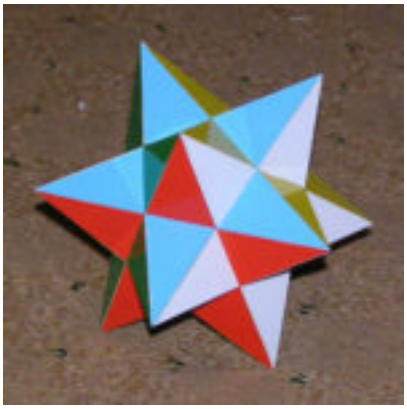
Stella octangula z dwóch czworościanów foremnych.

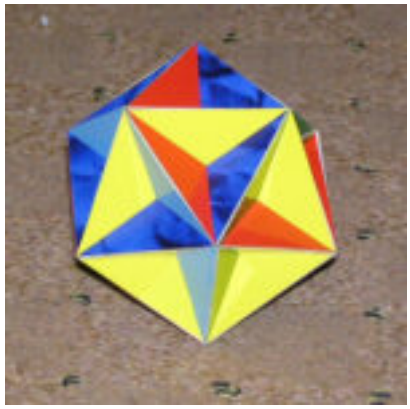
Mały stellowany dwunastościan foremny.

10. Wielościany Keplera-Poinsota

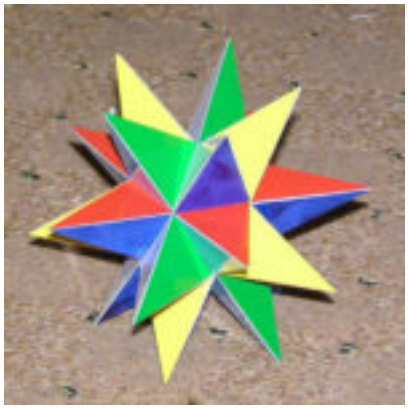
Wielościany Keplera-Poinsota są odpowiednikami brył platońskich w świecie wielościanów niewypukłych. Również ich ściany są przystającymi wielokątami foremnymi i w każdym wierzchołku spotyka się taka sama liczba ścian. Tym razem jednak ściany mogą być wielokątami gwiaździstymi. Dopuszczona jest także możliwość przenikania ścian (tzn. przecinania się poza krawędziami).

Istnieją tylko 4 wielościany foremne niewypukłe:





dwunastościan gwiaździsty mały



dwunastościan wielki

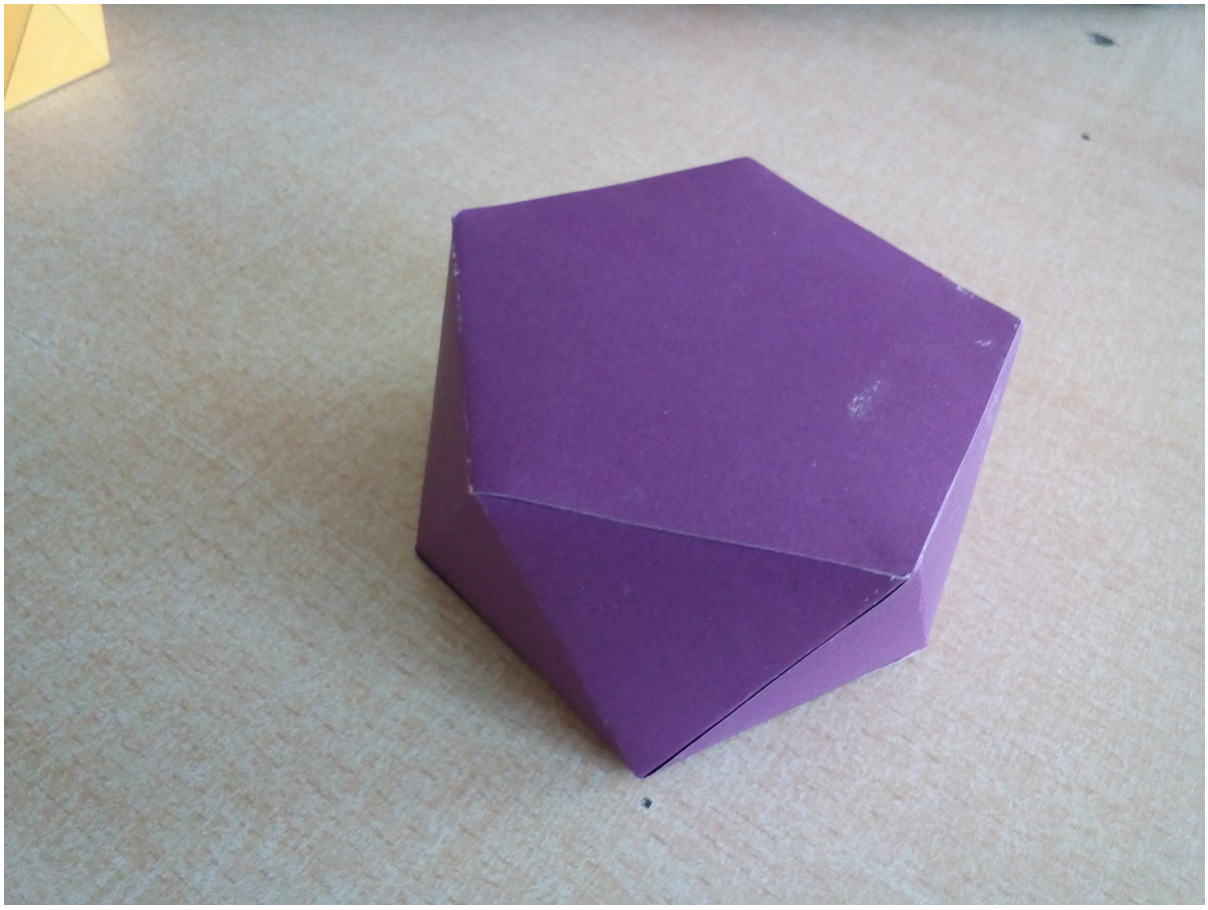
dwunastościan gwiaździsty wielki

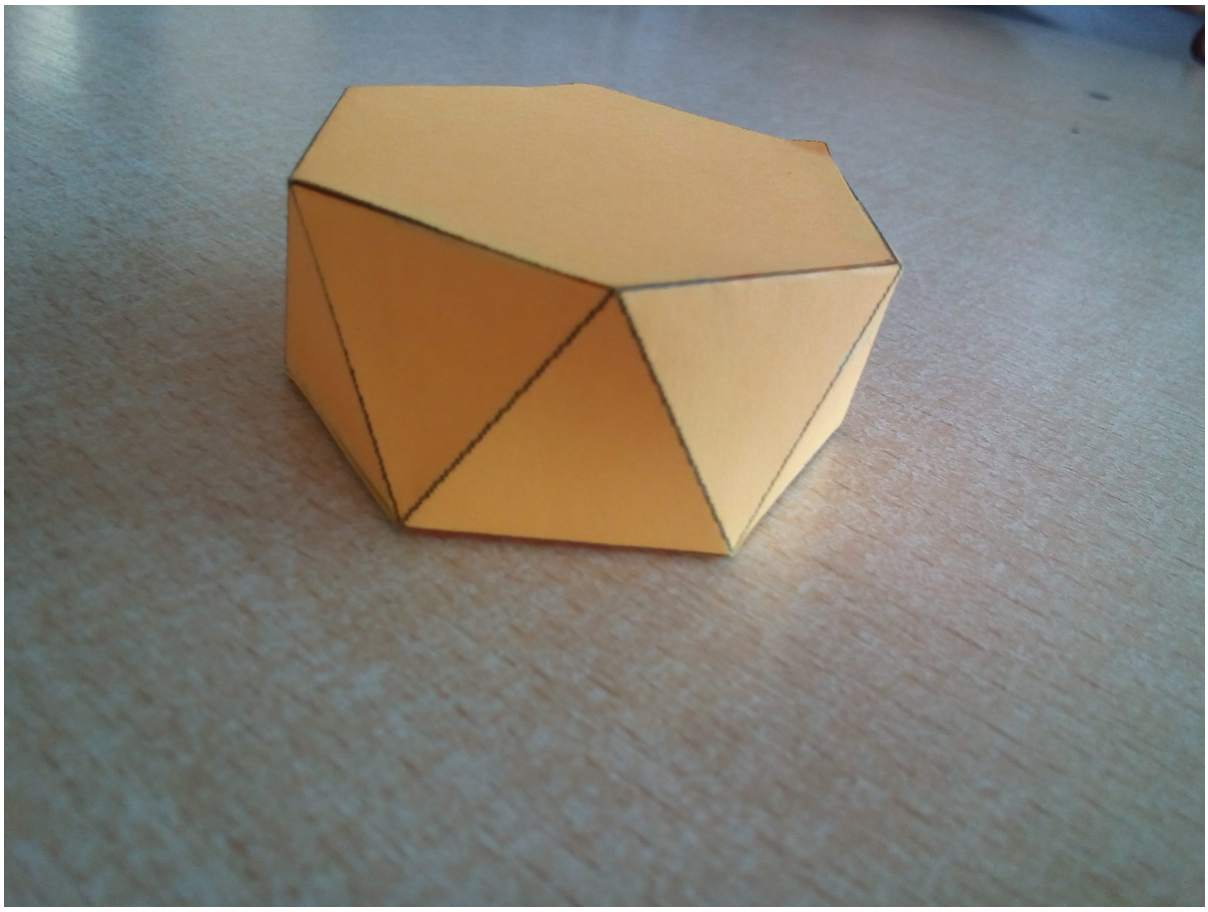
dwudziestościan wielki

Rysunki pochodzą ze strony http://www.matematyka.wroc.pl/

11. Antygraniastosłupy

Dwie ściany są jednakowymi wielokątami foremnymi, a pozostałe ściany są trójkątami równobocznymi. W tej „galerii" jest antygraniastosłup pięciokątny i sześciokątny.





12. Wzór Eulera

Dla wielościanów prawdziwy jest wzór:

W+S=K+2

W — liczba wierzchołków

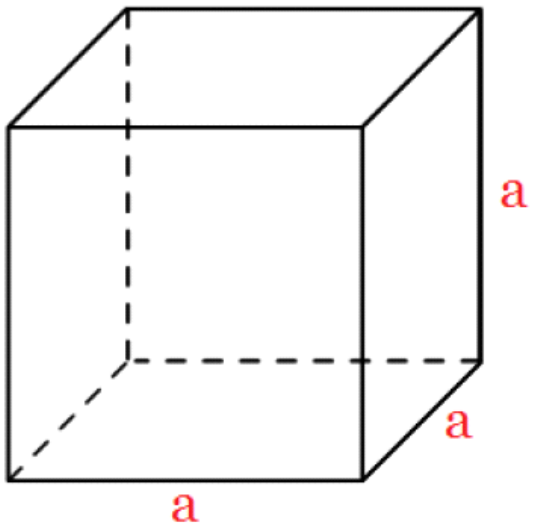
S — liczba ścian

K — liczba krawędzi

Dal sześcianu:

8 wierzchołków+6 ścian=12 krawędzi+2

8+6=12+2=14



Dla graniastosłupa

n-liczba wierzchołków podstawy

W — liczba wierzchołków

S — liczba ścian

K — liczba krawędzi

W=2n

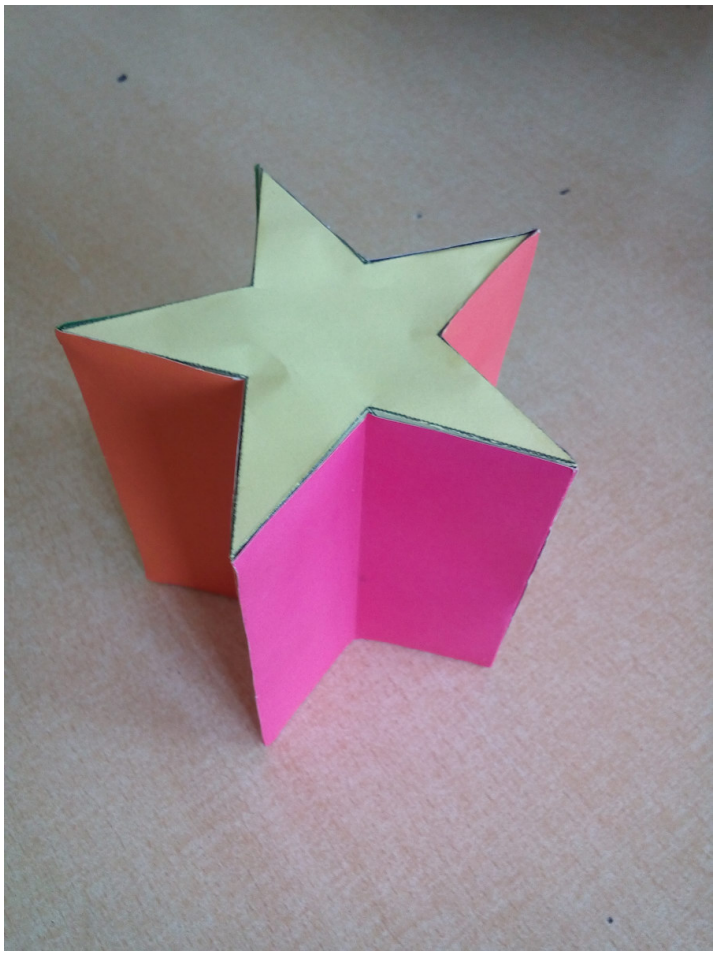
S=n+2

K=3n

W+S=K+2

2n+(n+2)=3n+2

3n+2=3n+2



Dla ostrosłupa

W=n+1 S=n+1 K=2n

W+S=K+2

(n+1)+(n+1)=2n+2

2n+2=2n+2

Dla antygraniastosłupa

W=2n S=2n+2 K=4n

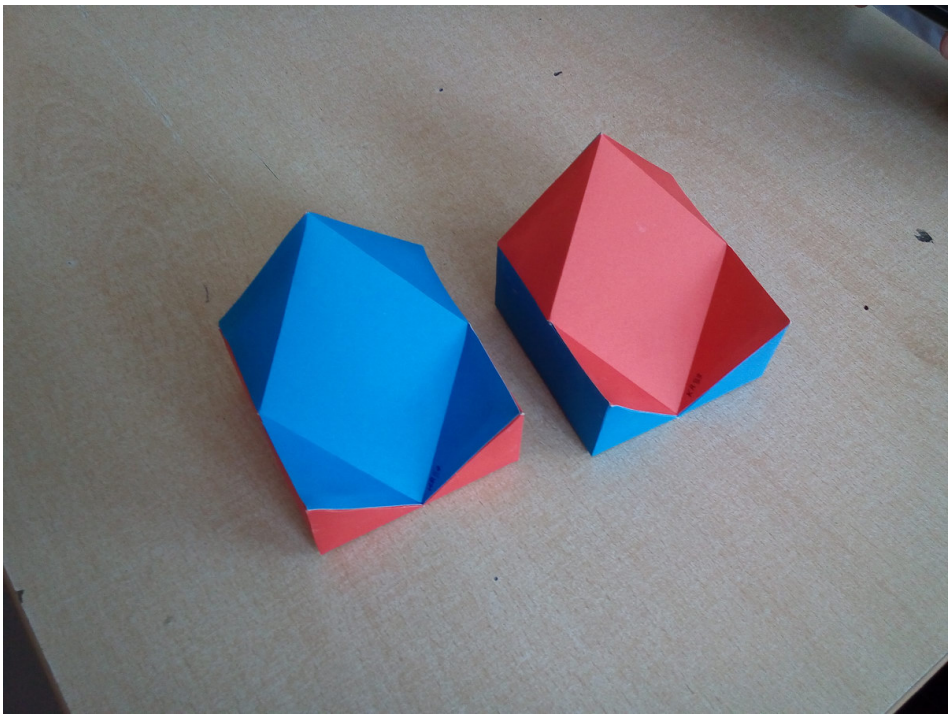
W+S=K+2

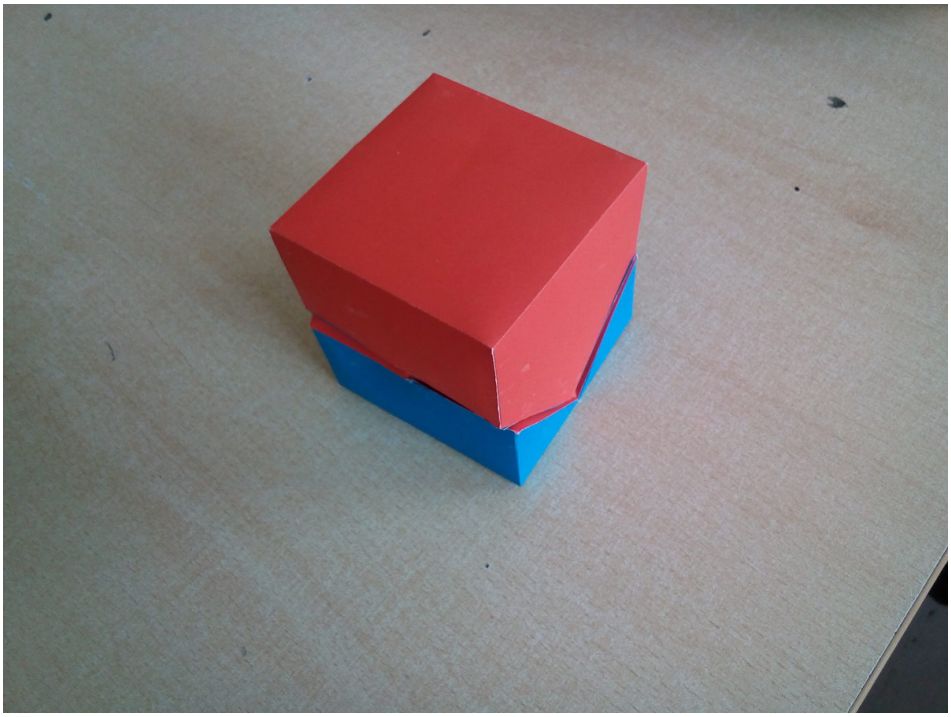
2n+(2n+2)=4n+2

4n+2=4n+2

13. Ciekawe wielościany

K-dron – jedenastościenna bryła geometryczna odkryta przez Janusza Kapustę w 1985 roku. W skład K-dronu wchodzi powierzchnia k-dronowa, będąca rombem z dołączonymi trójkątami prostokątnymi i bazy k-dronu. Dwa k-drony złożone ze sobą dają sześcian.





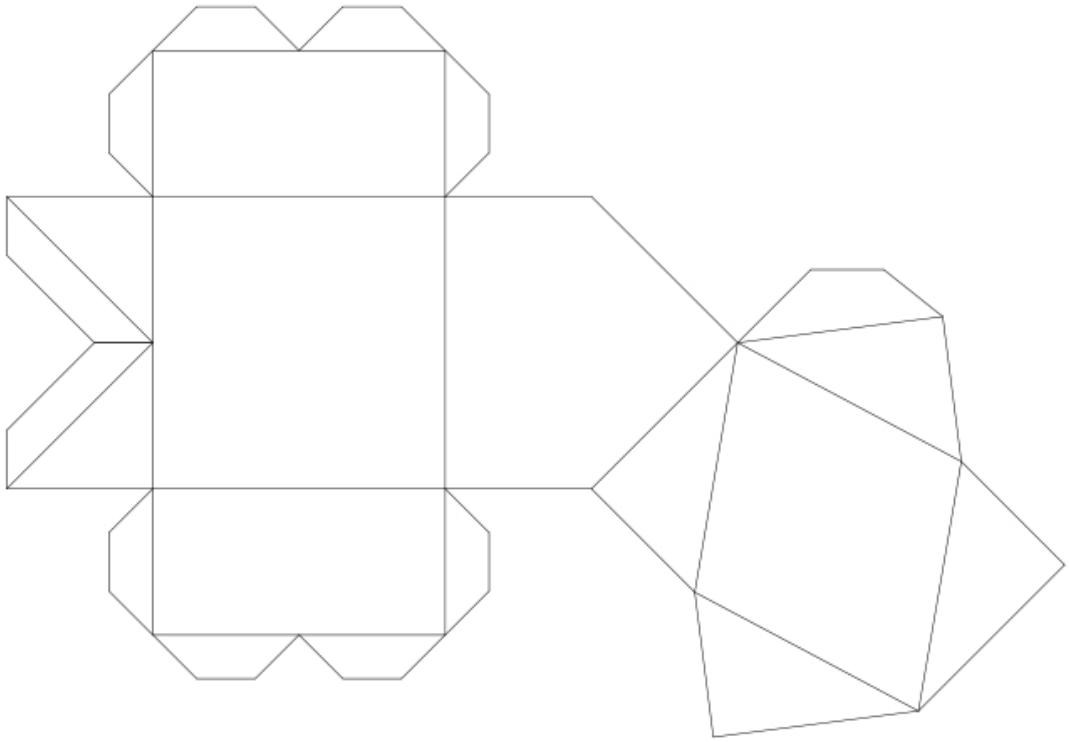
K-dron jest obiektem geometrycznym odkrytym pewnej styczniowej nocy 1985 r. w Nowym Jorku przez polskiego architekta Janusza Kapustę, który wyemigrował do Stanów Zjednoczonych w 1981 r. miesiąc przed ogłoszeniem stanu wojennego w Polsce. Janusz Kapusta wraz z kolegą przygotowywali wystawę w Nowym Jorku. Po wydrukowaniu prospektów wystawowych, przedstawiających dwa kwadraty - jeden wpisany w drugi, pan Kapusta dostrzegł w nich formę przestrzenną. Uplastycznił ją przez odpowiednie zacieniowanie wnętrz kwadratów i wykonał model przestrzenny bryły. Tak zrodził się ten osobliwy wielościan.

K-dron ma **n**azwę wywodzącą się od litery "**K**" , która jest 11-tą literą w alfabecie (k-dron ma 11 ścian) i słowa "**DRON**" oznaczającego w języku greckim ścianę. Pierwsza litera nazwiska twórcy K-dronu to też litera "K". Patrząc z ukosa na k-dron można też dostrzec literę "K".

K-dron został opatentowany w USA 29 maja 1985 przez biuro United States Patent pod numerem 4681481 i przez kolejne 10 lat wykorzystywany był przez inżynierów amerykańskich do projektowania elewacji budynków, dachówek, sufitów, mebli, zabawek, gier a nawet wyrobów jubilerskich. Obecnie spotyka się go we wzorcach budowanych również w Polsce (np. Środa Wlkp).

Siatka **K**-dronu składa się z jedenastu wielokątów: rombu, kwadratu, pięciokąta,

dwóch prostokątów i sześciu trójkątów prostokątnych.



14. Inne dziwne bryły

Gąbka Mengera – bryła fraktalna, trójwymiarowy odpowiednik zbioru Cantora i dywanu Sierpińskiego.

Gąbka Mengera powstaje w następujący sposób:

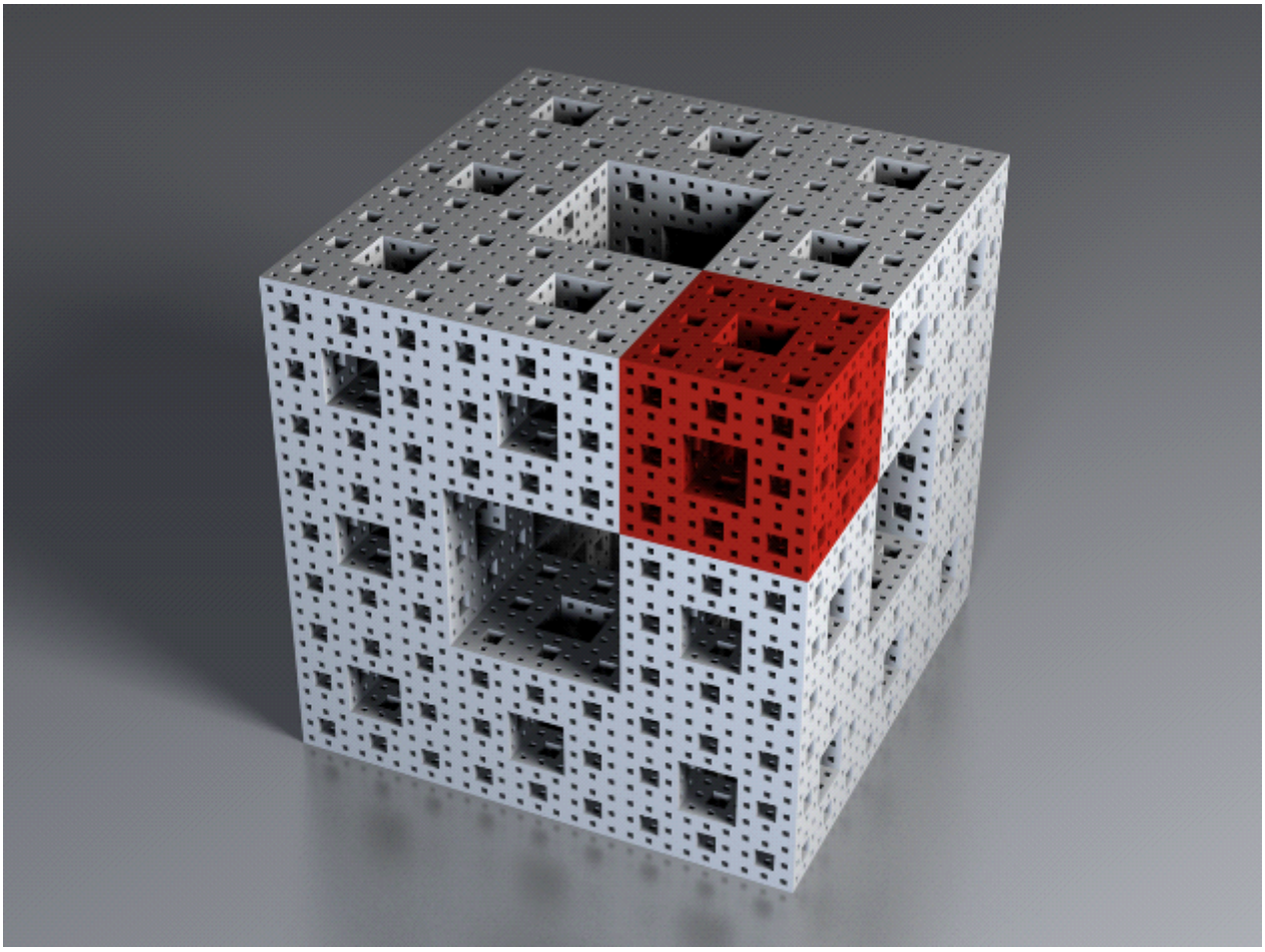
1. Dany jest sześcian

2. Tniemy go na 27 sześcianów równej wielkości płaszczyznami równoległymi do ścian

3. Usuwamy wszystkie sześciany przyległe do środków ścian pierwotnego sześcianu oraz sześcian znajdujący się w jego środku

4. Do każdego z pozostałych sześcianów stosujemy poprzednią procedurę

Po nieskończonej liczbie powtórzeń opisanych operacji otrzymujemy kostkę Mengera.



Piramida Sierpińskiego– zbiór fraktalny, trójwymiarowy odpowiednik trójkąta Sierpińskiego.

Piramida Sierpińskiego powstaje z czworościanu foremnego przez wykonanie następującego algorytmu:

1.Weź ostrosłup o krawędzi długości x.

2.Utwórz 4 ostrosłupy o krawędzi długości 1/2x i umieść je w przestrzeni tak, by zawierały się w dużym ostrosłupie oraz każdy miał wspólny jeden wierzchołek z dużym ostrosłupem.

3.Usuń ośmiościan foremny, który pozostaje w środku dużego ostrosłupa (o wierzchołkach w 1/2x).

4.Do każdego z 4 małych ostrosłupów zastosuj ten algorytm.

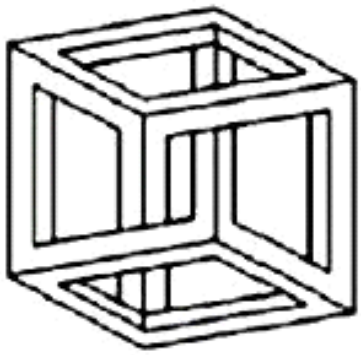
Po nieskończonej liczbie powtórzeń opisanych operacji otrzymujemy piramidę Sierpińskiego.

Ciekawostką jest, że objętość obu brył jest równa 0.

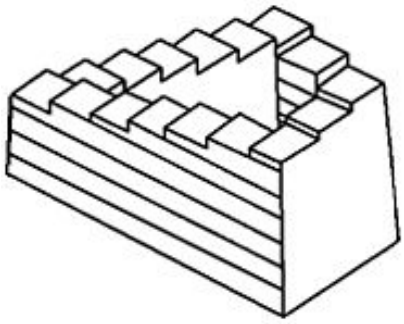
15. Figury (bryły) niemożliwe

Figury niemożliwe to figury, które można narysować zgodnie ze wszystkimi zasadami perspektywy, ale nie można ich skonstruować w rzeczywistości.

Trójkąt Penrose'a



Sześcian Neckera



Schody Penrose'a

Zakończenie

Choć nie zawsze zdajemy sobie z tego sprawę, wielościany wypełniają cały nasz świat. W tej fantastycznej matematycznej krainie znajdują się przeróżne bryły, często takie, o których istnieniu nie mieliśmy nawet pojęcia. Warto je poznać oraz wiedzieć, jak się nazywają. Mam nadzieję, że dzięki tej pracy inne osoby zdecydują się poznać świat wielościanów jeszcze dokładniej.

Zagadka.

Jaką bryłę może przedstawiać ten rysunek?

Literatura i pomoce:

„Galeria Wielościanów” Zdzisław Pogoda
„Z geometrią za pan brat” Włodzimierz Krysicki, Helena Pisarewska, Tadeusz Świątkowski Warszawa 1992 r.
„Wikipedia, wolna encyklopedia. https://pl.wikipedia.org
http://www.matematyka.wroc.pl/
http://www.interklasa.pl/pabich/s5e.htm

Zdjęcia wykonałem sam.
Niektóre z fotografowanych brył wykonały koleżanki lub koledzy.