“Zliczanie na dwa sposoby ze szczególnym uwzględnieniem metody Fubiniego”

Karol Rutkowski
V Liceum ogólnokształcące w Krakowie

# 1 Zliczanie na dwa sposoby ze szczególnym uwzględnieniem metody Fubiniego

*Karol Rutkowski*

## 1.1 Teoria

W zadaniach kombinatorycznych często spotykamy się z koniecznością wyznaczenia liczby pewnych obiektów, operacji i tym podobnych.

Do tego typu problemów warto czasem podejść od drugiej strony i nie liczyć bezpośrednio żądanych przedmiotów, ale znaleźć pewne zależności, dzięki którym można będzie ułożyć równanie bądź nierówność pozwalające otrzymać oczekiwany wynik.

Na tym właśnie polega metoda zliczania na dwa sposoby. Aby swobodnie się nią posługiwać, warto przyswoić sobie zasadę Fubiniego.

Na początek należy objaśnić jedno z używanych oznaczeń. Niech $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ i $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$. Wtedy:

$$A \times B = \{(a, b) \ \mid \ a \in A, \quad b \in B\}$$

Dalej, niech $S$ będzie podzbiorem $A \times B$. Dla $a_i$ oznaczmy: $S(a_i, *) = \{(a_i, b) \in B\}$.

**Twierdzenie 1.1 (Fubiniego)**

Niech $m$ i $n$ będą całkowitymi liczbami dodatnimi i niech $A = a_1, a_2, ..., a_m$ oraz $B = b_1, b_2, ..., b_n$ będą dwoma zbiorami skończonymi.

Jeśli $S$ jest podzbiorem zbioru $A \times B$, wtedy:

$$|S| = \sum_{j=1}^{n} |S(*, b_j)| = \sum_{i=1}^{m} |S(a_i, *)|.$$

**Dowód 1.1**

Dowód jest bardzo prosty, jeśli rozważymy problem jako zliczanie wypełnionych (oznaczających elementy podzbioru $S$) komórek tabeli $M$ o wymiarach $m \times n$.

Sumę tę można wyrazić jako sumę liczb wypełnionych komórek w każdym z $m$ wierszy, tj.

$$\sum_{i=1}^{m} |S(a_i, *)|$$

lub jako sumę liczb takich komórek w każdej z $n$ kolumn, tj.

$$\sum_{j=1}^{n} |S(*, b_j)|.$$

Widać, że

$$|S| = \sum_{j=1}^{n} |S(*, b_j)| = \sum_{i=1}^{m} |S(a_i, *)|.$$

## 1.2 Zadania

**Problem 1**
Na balu były 42 osoby. Pani $A_1$ tańczyła z 7 panami, pani $A_2$ tańczyła z 8 panami, ..., pani $A_n$ tańczyła ze wszystkimi panami. Ilu panów było na balu?

**Rozwiązanie**
Liczba pań na balu jest równa $n$, w takim razie liczba panów jest równa $42 - n$. Pani o numerze $k$, gdzie $1 \leq k \leq n$, tańczyła z $k+6$ panami. Stąd, pani o numerze $n$ tańczyła z $n+6$ panami, czyli wszystkimi panami znajdującymi się na balu. To daje nam: $42-n = n+6$, czyli $n = 18$ i $42-n = 24$. W takim razie w balu wzięło udział 24 panów.

**Problem 2**
Kwadrat o wymiarach 15x15 jest podzielony na kwadraty jednostkowe. Wierzchołki każdego z nich pokolorowane są na czerwono lub niebiesko. Czerwonych punktów jest 133, w tym dwa znajdują się w wierzchołkach dużego kwadratu, zaś 32 na jego bokach. Krawędzie każdego z kwadratów jednostkowych kolorujemy w następujący sposób: Jeśli oba końce odcinka są czerwone, na czerwono, jeśli oba niebieskie – na niebiesko, jeśli zaś różne – na żółto. Ile jest krawędzi niebieskich, jeśli żółtych jest 196?

**Rozwiązanie**
W Każdym wierszu jest 15 boków kwadratów jednostkowych. Łączna liczba poziomych boków tych kwadratów jest równa $15 \cdot 16$. Analogicznie jest z bokami pionowymi – ich liczba to $15 \cdot 16$. Mamy więc łącznie 480 boków kwadratów. Zliczyć można to też w inny sposób: jest 225 kwadratów, każdy z nich ma 4 boki. Wszystkie boki prócz 60 znajdujących się na bokach dużego kwadratu 15x15 są liczone dwa razy. Wszystkich boków mamy więc $(900 + 60)/2 = 480$. Jest $480 - 196 = 284$ boków czerwonych bądź niebieskich. Załóżmy, że samym czerwonych jest r, niebieskich zatem $284 - r$. Teraz policzmy, ile razy pojawiają się czerwone wierzchołki – ich liczbę oznaczymy $|S|$. Czerwony wierzchołek występuje: dwa razy przy czerwonym odcinku, raz przy żółtym i ani razu przy niebieskim. Stąd mamy $|S| = 196 + 2r$. Z drugiej strony, przy kolorowaniu boków każdy czerwony wierzchołek w rogu dużego kwadratu wzięliśmy pod uwagę dwa razy, na jego boku – 3 razy, a we wnętrzu 4. Stąd:

$$|S| = 2 \cdot 2 + 32 \cdot 3 + (133 - 2 - 32) \cdot 4 = 496$$

W takim razie $r = (496 - 196)/2 = 150$, a niebieskich boków jest $284 - 150 = 134$, co mieliśmy policzyć.

**Problem 3**

Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą i niech zbiór $(a_1, ..., a_n)$ będzie permutacją zbioru $1, 2, ...., n$. Dla $1 \leq k \leq n$ niech $F_k = a_i$, gdzie $a_i < a_k, i > k$ i $G_k = a_i$, gdzie $a_i > a_k, i < k$. Udowodnić, że:

$$\sum_{k=1}^{n} |F_k| = \sum_{k=1}^{n} |G_k|.$$

**Rozwiązanie**
Niech $A = B = (a_1, ..., a_n)$ i niech $S = (a_i, a_j)$, gdzie $a_i < a_j, i > j$. W takim razie $S(*, a_j) = F_j$ i $S(a_i, *) = G_i$. Żądany rezultat wynika więc bezpośrednio z twierdzenia Fubiniego.

**Problem 4**
Uczniów biorących udział w olimpiadzie matamatycznej należało umieścić w salach tak, by w każdej sali była ta sama liczba osób, przy czym nie więcej niż 32 osoby. Kiedy najpierw w każdej sali umieszczano po 22 osoby, dla jednego zawodnika zabrakło miejsca. Gdy zaś z jednej sali zrezygnowano, miejsc w pozostałych starczyło dla wszystkich. Ilu zawodników wzięło udział w olimpiadzie oraz ile sal przygotowano dla nich?

**Rozwiązanie**
Przypuśćmy, że sal było $k$ oraz, że po rezygnacji z jednej, w każdej z pozostałych $k-1$ sal umieszczono $n$ uczniów. Co oczywiste, $k \geq 2$ i $n \leq 32$. Wszystkich uczniów biorących udział w olimpiadzie było więc z jednej strony $22k + 1$, z drugiej zaś $n(k - 1)$. Stąd równanie $22k + 1 = n(k - 1)$, czyli $n = 22 + \frac{23}{k-1}$.
Zatem $k - 1 = 1$ lub $k - 1 = 23$. Kiedy jednak $k = 2$, $n = 45$, więc $k = 24$. W takim razie dochodzimy do wniosku, że w olimpiadzie brało udział 529 uczniów rozlokowanych w 24 salach.

**Problem 5**
Na zajęcia Profesora uczęszcza 12 studentów. Profesor na początku każdego tygodnia zadaje im pewne łamigłówki, które rozwiązują w sześciu dwuosobowych grupach. Studenci sami dobierają się w pary. Udowodnić, że niezależnie od sposobu, w który wybierają swoje grupy, istnieje zawsze takich dwóch studentów, że przynajmniej pięciu innych studentów pracowało z każdym lub nie pracowało z żadnym z tej pary.

**Rozwiązanie**
Oznaczmy $A = s_1, s_2, \ldots, s_{12}$ zbiór wszystkich studentów,
zaś $B = (s_i, s_j)$, gdzie $1 \leq i < j \leq 12$, zbiór wszystkich możliwych par studentów. $|B| = \binom{12}{2} = 66$. Mówimy, że $s_i$ i $(s_j, s_k)$ są połączone, jeśli $s_i$, $s_j$ i $s_k$ są rozłączne i

$s_i$ współpracował z dokładnie jednym spośród $s_j$ i $s_k$. Niech $S = [s_i, (s_j, s_k)]$, gdzie $s_i, (s_j, s_k)$ są połączone. Teraz udowodnimy żądany wynik. Załóżmy, że twierdzenie nie jest prawdziwe i, co tego wynika, możliwe jest, by każda z par $(s_j, s_k)$ była połączona z przynajmniej sześcioma studentami, czyli $|S(*, (s_j, s_k))| \geq 6$. Stąd mamy:

$$|S| = \sum_{s_j, s_k \in B} |S(*, (s_j, s_k))| = 396.$$

Z drugiej strony, jeśli $s_i$ pracował z $d$ partnerami, wtedy $s_i$ jest połączony z $(11-d)$ parami studentów (bo mamy $d$ możliwości wyboru jednego z jego wcześniejszych partnerów i $11 - d$ jednego z takich, z którymi jeszcze nie pracował). Dla liczb całkowitych $0 \leq d \leq 11$, maksymalna wartość $d(11-d)$ to 30, zakładając że $d = 5$ lub 6. Stąd $|S(s_i, *)| \leq 30$, z czego wynika, że

$$|S| = \sum_{s_i \in A} |S(s_i, *)| \leq 30|A| = 360.$$

Stąd mamy nierówność $396 \leq |S| \leq 360$, co jest oczywiście sprzeczne. W takim razie teza postawiona w zadaniu nie może być nieprawdziwa.

**Problem 6**

Niech $X$ będzie skończonym zbiorem, gdzie $|X| = n$ i niech $A_1, A_2, ..., A_m$ będą trzyelementowymi podzbiorami $X$ takimi, że $|A_i \bigcap A_j| \leq 1$ dla każdego $i \neq j$. Wykazać, że istnieje zbiór $A$ będący podzbiorem $X$ z przynajmniej $\lfloor \sqrt{2n} \rfloor$ elementami niezawierający żadnego z $A_i$.

**Rozwiązanie**

Niech $A$ będzie podzbiorem $X$ niezawierającym żadnego z $A_i$, z maksymalną liczbą elementów, a $|A| = k$. Co oczywiste, $|X \setminus A| = n - k$. Niech $x$ będzie elementem $X$ nienależącym do $A$. Z maksymalności $A$, $A \cup \{\ x\}$ nie spełnia warunków zadania, co znaczy, że istnieje $i(x)$ należące do $1, \ldots, m$ takie, że $A_{i(x)} \subseteq A \cup \{\ x\}$. W takim razie $x$ należy do $A_{i(x)}$ i zbiór $A_{i(x)} \setminus \{\ x\}$ jest podzbiorem $A$. Stąd, zbiór $L_x = A \cap A_{i(x)}$ musi mieć 2 elementy. Ponieważ $|a_i \cap A_j| \leq 1$ dla $i \neq j$, wszystkie zbiory $L_x$ muszą być rozłączne. Zdefiniowaliśmy injekcję $f(x) = L_x$ ze zbioru $X \setminus A$ w zbiór dwuelementowych podziobrów $A$. Z tego wniosek, że:

$$n - k \leq \binom{k}{2} = \frac{k^2 - k}{2},$$

czyli $k^2 - k \geq 2n$, więc $\lfloor \sqrt{2n} \rfloor \leq k$, co mieliśmy udowodnić.

**Problem 7**

Niech $n \geq 4$ będzie ustaloną liczbą całkowitą, a $S = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$ zbiorem

$n$-punktów leżących na jednym okręgu. Przez okrąg $P_iP_jP_k$ rozumiemy okrąg opisany na trójkącie $P_iP_jP_k$. Niech $a_t, 1 \leq t \leq n$, określa liczbę okręgów $P_iP_jP_k$ zawierających $P_t$ we wnętrzu i niech $m(S) = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Udowodnić, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita $f(n)$ zależna tylko od $n$, że punkty $S$ są wierzchołkami wielokąta wypukłego wtedy i tylko wtedy, gdy $m(S) = f(n)$.

**Rozwiązanie**
Jeśli ABCD jest czworokątem wypukłym, na którym nie da się opisać okręgu, to $\angle A + \angle C \neq \angle B + \angle D$. Ponieważ zaś suma tych czterech kątów jest równa $360°$, bez straty ogólności możemy założyć, że $\angle A + \angle C > 180° > \angle B + \angle D$. Wtedy punkty $B$ i $D$ są na zewnątrz okręgów, odpowiednio, $ACD$ i $ABC$, a punkty $A$ i $C$ są wewnątrz okręgów, odpowiednio, $BCD$ i $BAD$. Jeśli $ABCD$ jest czworokątem wypukłym, bez straty ogólności możemy założyć, że $\angle A > 180°$. Wtedy $A$ znajduje się wewnątrz okręgu $BCD$, a $B$, $C$ i $D$ znajdują się na zewnątrz okręgów, odpowiednio, $ACD$, $ABD$ i $ABC$. Dla każdego zbioru $P_i, P_j, P_k, P_l$ istnieją cztery możliwe zestawienia dodające 1 do liczby $m(S)$, to jest $(P_i, P_jP_kP_l)$, $(P_j, P_iP_kP_l)$, $(P_k, P_iP_jP_l)$ i $(P_l, P_iP_jP_k)$. Jeśli podane cztery punkty tworzą wielokąt wypukły, dokładnie dwa z powyższych zestawień dodają do $m(S)$ 1, jeśli wklęsły - tylko jedno. Niech $a(S)$ i $b(S)$ określają, odpowiednio, liczbę wypukłych i wklęsłych czworokątów z wierzchołkami w zbiorze $S$. Mamy:

$$a(S) + b(S) = \binom{n}{4} \qquad 2a(S) + b(S) = m(S).$$

Dalej, $m(S) = \binom{n}{4} + a(S)$. Stwierdźmy teraz, że $f(n) = 2\binom{n}{4}$ to żądana wartość. Istotnie, jeśli punkty $S$ tworzą wielokąt wypukły, wtedy każdy czworokąt przez nie utworzony także jest wypukły, więc $a(S) = \binom{n}{4}$ i $m(S) = f(n)$. Z drugiej strony, jeśli $m(S) = f(n)$, wtedy $a(S) = \binom{n}{4}$, więc każdy czworokąt utworzony przez punkty ze zbioru $S$ jest wypukły, z czego wniosek, że punkty zbioru $S$ tworzą wielokąt wypukły.

**Problem 8**
Niech $n \geq 3$ będzie liczbą całkowitą. Załóżmy, że $P_1P_2...P_n$ jest foremnym $n$-kątem. Wyznaczyć liczbę nieprzystających trójkątów $P_iP_jP_k$, gdzie $i, j, k$ są parami różnymi liczbami całkowitymi należącymi do zbioru $1, 2, ..., n$.

**Rozwiązanie**
Co widać, wierzchołki dużego wielokąta są równomiernie rozłożone na okręgu. Ponieważ inne rozwiązania są symetryczne, rozważamy nieprzystające trójkąty, w których $P_1$ jest jednym z wierzchołków. Niech $N_1$ bedzie liczbą nieprzystających trójkątów równobocznych, $N_2$ liczbą nieprzystających, nierównobocznych trójkątów równoramiennych, a $N_3$ liczbą nieprzystających trójkątów różnobocznych. Musimy więc policzyć liczbę $N = N_1 + N_2 + N_3$.

Mamy $\binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ trójkątów z $P_1$ jako jednym z wierzchołków. Niech $S = P_1P_iP_j$, gdzie $2 \leq i \leq j \leq n$. Wtedy $|S| = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. W $S$, każdy różnoboczny trójkąt pojawia się sześć razy, ponieważ jest 3! sposobów wyboru długości boków $P_1P_i$, $P_iP_j$, $P_jP_1$; każdy równoramienny trójkąt występuje trzy razy, bo mamy trzy sposoby wyboru $\overline{P_1P_i}$, $\overline{P_iP_j}$, $\overline{P_jP_1}$ jako podstawy tego trójkąta; każdy zaś równoboczny trójkąt, jeśli jest, występuje raz. Stąd równanie:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} = N_1 + 3N_2 + 6N_3. \qquad (*)$$

Jest też oczywiste, że istnieje maksymalnie jeden trójkąt równoboczny o wierzchołku w $P_1$. Stąd $N_1 = 1$ lub $N_1 = 0$, czyli $N_1 = 1 - p$ dla pewnego $p \in 0, 1$. Aby wyznaczyć $N_2$, możemy zawsze obrócić trójkąt tak, by $P_1$ nie był wierzchołkiem przy podstawie. Stąd, rozważamy takie trójkąty $P_1P_iP_j$, gdzie $P_1P_i = P_1P_j$. Jeśli liczba $n$ jest parzysta, jest $\frac{n-2}{2}$ takich równoramiennych trójkątów, pośród których jeden może być równoboczny. Jeśli liczba $n$ jest nieparzysta, mamy $\frac{n-1}{2}$ takich trójkątów, pośród których też mógł pojawić się jeden trójkąt równoboczny. Stąd:

$$N_1 + N_2 = \frac{n-2+q}{2}, \qquad (**)$$

gdzie $q \in 0, 1$. Z $(*)$ i $(**)$ mamy:

$$12N = 12(N_1 + N_2 + N_3) = 2(N_1 + 3N_2 + 6N_3) + 6(N_1 + N_2) + 4N_1 =$$

$$= (n-1)(n-2) + 3(n-1+q) + 4(1-p) = n^2 + 3q - 4p,$$

gdzie $p, q \in 0, 1$. Wiedząc, że $-4 \leq 3q - 4p \leq 3$, $N$ jest liczbą całkowitą najbliższą $\frac{n^2}{12}$, możemy zapisać: $N = \lfloor \frac{n^2}{12} + \frac{1}{2} \rfloor$.

**Problem 9**

Niech $n$ i $k$ będą dodatnimi liczbami całkowitymi spełniającymi następujące własności: Istnieje taki zbiór $T$ $n$ punktów płaszczyzny, że:

1) Żadne trzy nie są współliniowe.

2) Dla każdego punktu $P$ z $T$ istnieje maksymalnie $k$ równoodległych od $P$ punktów w $T$.

Udowodnić, że:

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

**Rozwiązanie**

Niech $A = T = P_1, P_2, ..., P_n$ i niech $B = l_{i,j}$ dla $1 \leq i < j \leq n$, gdzie $l_{i,j}$ jest symetralną $\overline{P_iP_j}$. Wtedy $|B| = \binom{n}{2}$. Niech $S = (P_i, l_{j,k})$, gdzie $P_i$ leży na $l_{j,k}$. Skoro żadne trzy punkty nie są współliniowe, mamy $|S(*, l_{j,k})| \leq 2$. Stąd

$$S = \sum_{l_{j,k} \in B} |S(*, l_{j,k})| \leq 2|B| = n^2 - n.$$

Z drugiej strony, ponieważ $P_i$ jest równoodległe od przynajmniej $k$ innych punktów, $P_i$ leży na symetralnych odcinków utworzonych przez każde dwa spośród tych punktów. Stąd $|S(P_i, *)| \geq \binom{k}{n}$, więc

$$S = \sum_{P_i \in A} |S(P_i, *)| \geq n\binom{k}{2} = \frac{n(k^2-k)}{2}.$$

Łącząc powyższe wyniki otrzymujemy

$$k^2 - k - 2(n-1) \leq 0.$$

Po wykonaniu obliczeń daje to:

$$\frac{1}{2} - \sqrt{2n - \frac{7}{4}} \leq k \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2n - \frac{7}{4}},$$

z czego bezpośrednio wynika teza zadania.

**Problem 10**

Mając danych $n$ współliniowych punktów rozważmy odległości między nimi. Załóżmy, że każda odległość występuje maksymalnie 2 razy. Udowodnić, że istnieje co najmniej $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ odległości występujących dokładnie raz.

**Rozwiązanie**

Niech $x$ będzie liczbą odległości występujących raz, a $y$ - odległości występujących dwa razy. Chcielibyśmy znaleźć dolne ograniczenie całkowitej liczby różnych odległości, czyli $x + y$. Aby to zrobić, policzymy odcinki od lewej do prawej ze względu na ich lewy koniec. Oznaczmy punkty $P_1, P_2, ..., P_n$ od lewej do prawej. $P_1$ jest lewym końcem $n-1$ odcinków różnych długości. Dalej, $P_2$ jest lewym końcem $n-2$ odcinków, z których jednak niektóre mogły zostać policzone przy rozważaniu $P_1$. Zauważmy, że dwa razy policzona została maksymalnie jedna długość - w innym wypadku, jeśli $P_1P_i = P_2P_j$ i $P_1P_k = P_2P_l$, otrzymujemy równość $P_1P_2 = P_iP_j = P_kP_l$, co jest sprzeczne z warunkami zadania. Stąd, co najwyżej jedna długość została powtórzona przy rozważaniu $P_2$, więc w tym przypadku mamy przynajmniej $n-3$ nowych długości. Przy rozważaniu $P_3$ jako lewego końca otrzymujemy przynajmniej $n-5$ nowych długości, to jest $n-3$ pomniejszone o możliwe powtórzenia z $P_1$ i $P_2$. Prowadzimy dalej to rozumowanie i dochodzimy do wniosku, że róznych długości odcinków jest przynajmniej

$(n-1)+(n-3)+(n-5)+(n-7)+...$ . Jeśli liczba $n$ jest nieparzysta, suma ta jest równa $\frac{n^2-1}{4}$, a jeśli jest parzysta - $\frac{n^2}{4}$.
Wiemy, że całkowita liczba odcinków jest równa $x+2y$, czyli $\frac{n(n-1)}{2}$. Z powyższych obserwacji wynika zaś, że $x+y \geq \lfloor\frac{n^2}{4}\rfloor$, więc $2x+2y \geq \lfloor\frac{n^2}{2}\rfloor$. W takim razie $x \geq \lfloor\frac{n^2}{2}\rfloor - (\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}) = \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$, co było do udowodnienia.

**Problem 11**
Hrabia Ludwik rozkazał upiec 68 różnych różnych ciast z różnych cukierniczych mikstur. Niektóre z mikstur są słodkie. Każde ciasto zrobione jest z pięciu mikstur, z których co najmniej jedna jest słodka. Wiadomo, że dla każdych trzech mikstur istnieje dokładnie jedno ciasto je zawierające. Udowodnić, że przynajmniej jedno z ciast jest wyjątkowo słodkie - składają się na nie przynajmniej cztery słodkie mikstury.

**Rozwiązanie**
Przeprowadzimy dowód nie wprost, przypuszczając, że nie ma wyjątkowo słodkich ciast. Załóżmy, że mamy $n$ rodzajów mikstur, oznaczonych $s_1, s_2, ..., s_n$, spośród których $s_1, s_2, ..., s_m$ to mikstury słodkie.
Każdą trójkę mikstur nazywijmy *wywarem*. Policzymy całkowitą liczbę wywarów na dwa sposoby. Co oczywiste, mamy $\binom{n}{3}$ wywarów. Z drugiej strony, każde ciasto zawiera w sobie $\binom{5}{3} = 10$ wywarów. Ponieważ każdy wawar występuje tylko w jednym z ciast, mamy $68 \cdot 10 = \binom{n}{3}$, więc $n = 17$.
Załóżmy, że mikstura $s_i$ została użyta do $c_i$ ciast. Dla każdego z tych ciast, jest $\binom{4}{2} = 6$ wywarów zawierających $s_i$. W takim razie mamy $6c_i$ wywarów zawierających $s_i$. Z drugiej strony, $\binom{16}{2} = 120$ wywarów zawiera $s_i$. Stąd $c_i = 20$, czyli każda mikstura została użyta do dokładnie 20 ciast.
Przypuśćmy, że $s_i$ i $s_j$, dla $1 \leq i < j \leq 17$, zostały użyte do $c_{i,j}$ ciast. Dla każdego z tych ciast są dokładnie $\binom{3}{1} = 3$ wywary zawierające zarówno $s_i$, jak i $s_j$. W takim razie jest $3c_{i,j}$ wywarów zawierających $s_i$ i $s_j$. Z drugiej strony $\binom{15}{1} = 15$ wywarów zawiera $s_i$ i $s_j$. Stąd $c_{i,j} = 3$, czyli każda para mikstur została użyta w dokładnie 5 ciastach.
Załóżmy, że $s_i, s_j, s_k$, dla $1 \leq i < j < k \leq 17$, są użyte razem do $c_{i,j,k}$ ciast - z warunków zadania wiemy, że $c_{i,j,k} = 1$. Dalej, załóżmy, że $s_i, s_j, s_k, s_l$ są użyte do $c_{i,j,k,l}$ ciast. Z początkowego założenia mamy $c_{i,j,k,l} = 0$, jeśli $1 \leq i < j < k < l \leq m$.
Teraz skorzystajmy z wiedzy, że każde ciasto zawiera przynajmniej jedną słodką miksturę. Policzmy więc całkowitą liczbę ciast na dwa sposoby. Wiadomo, że jest ich 68. Z drugiej strony, z zasady włączeń i wyłączeń mamy

$$68 = \sum_{i=1}^{m} c_i - \sum_{1\leq i<j\leq m} c_{i,j} + \sum_{1\leq i<j<k\leq m} c_{i,j,k} =$$

$$= 20m - 5\binom{m}{2} + \binom{m}{3} = \frac{1}{6}m(m^2 - 18m + 137),$$

czyli $68 \cdot 6 = m(m^2 - 18m + 137)$. Teraz wystarczy udowodnić, że nie istnieje $m \leq n = 17$ spełniające powyższą równość. W tym celu rozważymy reszty z dzielenia przez 5 obu stron równania.

$$3 \equiv m(m^2 - 3m + 2) \equiv m(m-1)(m-2) \qquad (mod\ \ 5).$$

Co widać, powyższe równanie nie ma rozwiązań całkowitych, z czego wynika, że początkowe założenie o nieistnieniu wyjątkowo słodkiego ciasta jest zwyczajną, acz fatalną pomyłką. Owiane legendą wyjątkowo słodkie ciasto istnieje więc naprawdę.

**Problem 12**

Znaleźć największą liczbę naturalną $k$ o następującej własności:
Istnieje $k$ takich różnych podzbiorów zbioru $n$-elementowego, że każde dwa mają niepustą część wspólną.

**Rozwiązanie**

Oznaczmy szukaną liczbę przez $k(n)$. Niech $a$ będzie ustalonym elementem zbioru $n$-elementowego $X$. Rodzina $R$ wszystkich pozbiorów zbioru $X$ postaci $B \cup a$, gdzie $B$ jest podzbiorem zbioru $X \setminus a$, ma niepustą część wspólną - $a$ należy do każdego z tych podzbiorów. Rodzina $R$ składa się z $2^{n-1}$ podzbiorów $B$ zbioru $(n-1)$-elementowego $X \setminus a$ jest równa $2^{n-1}$. Zatem $k(n) \geq 2^{n-1}$.
Z drugiej strony, jeżeli zbiór $A$ należy do pewnej rodziny $R$ podzbiorów zbioru $X$, w której każde dwa podzbiory mają niepustą część wspólną, to zbiór $X \setminus A$ nie należy do $R$. W takim razie liczba podzbiorów należących do rodziny $R$ nie przekracza połowy liczby wszystkich podzbiorów $X$, czyli $k(n) \leq \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$. Z obu nierówności wynika, że $k = 2^{n-1}$.