“Ekstremalna teoria grafów”

Filip Lurka
V Liceum ogólnokształcące w Krakowie

1 Ekstremalna Teoria Grafów

Filip Lurka

1.1 Teoria

Definicja 1.1 *Kliką nazywamy graf pełny; każde dwa wierzchołki są połączone krawędzią.*
Definicja 1.2 *Kliką k-wierzchołkową nazywamy klikę posiadającą k wierzchołków.*
Definicja 1.3 *Grafem k-wolnym nazywamy graf niezawierający kliki k-wierzchołkowej.*
Definicja 1.4 *Stopniem wierzchołka grafu nazywamy liczbę krawędzi sąsiadujących z wierzchołkiem. Oznaczany jako $degW_i$, gdzie W_i jest wierzchołkiem.*

Twierdzenie 1.1 (Twierdzenia Mantela)
Maksymalna liczba krawędzi w grafie o n wierzchołkach, w którym nie ma trójkątów, jest równa $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.

Dowód Przeprowadźmy dowód indukcyjny. Dla $n = 1$ i $n = 2$, teza jest oczywista. Załóżmy, że $n > 2$ i nasz graf G ma pewną krawędź AB. Z założenia indukcyjnego, podgraf W utworzony z pozostałych $n - 2$ wierzchołków (G bez A i B), ma co najwyżej $\lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \rfloor$ krawędzi. Zauważmy teraz, że każdy wierzchołek C należący do W, ma krawędź z co najwyżej jednym z wierzchołków A i B (inaczej powstałby trójkąt). Takich wierzchołków jest $n - 2$ i dodatkowo należy jeszcze policzyć krawędź AB, więc G ma co najwyżej:

$$\left\lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \right\rfloor + (n-2) + 1 = \left\lfloor \frac{(n-2)^2 + 4(n-2) + 4 \cdot 1}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$$

krawędzi - co kończy dowód.

□

Lemat 1.1 (Lemat Zarankiewicza)
Jeżeli G jest grafem niezawierającym k-wierzchołkowej kliki, to istnieje wierzchołek G, którego stopień nie przekracza $\left\lfloor \frac{k-2}{k-1} n \right\rfloor$.

Dowód Załóżmy przeciwnie. Oznaczmy zbiór wierzchołków połączonych z V_i przez A_i oraz weźmy pewien wierzchołek V_1. Z założenia:

$$|A_i| > \left\lfloor \frac{k-2}{k-1} n \right\rfloor \geq 1 + \left\lfloor \frac{k-2}{k-1} n \right\rfloor > 0$$

Zatem istnieje $V_2 \in A_1$. Następnie:

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cup A_2| \geq 2(1 + \left\lfloor \frac{k-2}{k-1} n \right\rfloor) - n > 0$$

Zatem istnieje $V_3 \in A_1 \cap A_2$. Kontynuując rozumowanie otrzymujemy, że dla każdego i:

$$|\bigcap_{i=1}^{j} A_i| \geq j(1 + \left\lfloor \frac{k-2}{k-1} n \right\rfloor) - (j-1)n$$

W szczególności, dla $j = k-1$:

$$|\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i| \geq (k-1)(1 + \left\lfloor \frac{k-2}{k-1} n \right\rfloor) - (k-2)n > 0$$

Zatem istnieje wierzchołek $V_k \in \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i$. Ale widzimy, że wtedy wierzchołki $V_1, ..., V_k$ tworzą klikę k-wierzchołkową. Uzyskaliśmy sprzeczność, co kończy dowód.

□

Twierdzenie 1.2 (Twierdzenie Turana)
Największą liczbą krawędzi, jaką może posiadać n-wierzchołkowy graf niezawierający k-wierzchołkowej kliki jest:

$$\frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2 - r^2}{2} + \binom{r}{2}$$

gdzie r jest resztą z dzielenia n przez $k-1$.

Dowód Przeprowadźmy dowód indukcyjny ze względu na n. Dla $n = 1$, teza jest oczywista. Załóżmy teraz, że teza jest prawdziwa dla wszystkich grafów o $n-1$ wierzchołkach niezawierających kliki k-wierzchołkowej. Z lematu Zarankiewicza, z danego grafu G (niezawierającego k-wierzchołkowej kliki) możemy wybrać wierzchołek o stopniu nie wiekszym niż $\lfloor \frac{k-2}{k-1} n \rfloor$. Z założenia indukcyjnego, podgraf utworzony z pozostałych $n-1$ wierzchołków nie zawiera kliki k-wierzchołkowej. Zatem liczba krawędzi grafu G nie przekracza:

$$\left\lfloor \frac{k-2}{k-1} n \right\rfloor + \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2 - s^2}{2} + \binom{s}{2}$$

gdzie $s \equiv n-1 \pmod{k-1}$. Widzimy, że: $n \equiv r \pmod{k-1}, r < k-1$ oraz $n-1 \equiv s \pmod{k-1}, s < k-1 \leftrightarrow n \equiv s+1 \pmod{k-1}$.
Rozważmy 2 przypadki. W pierwszym, $s < k-2$, czyli $s+1 < k-1$, więc $s+1 = r$, $s = r-1$. W drugim przypadku, $s = k-2 \equiv -1 \pmod{k-1}$, czyli $r = 0$. Po podstawieniu s widzimy, że:

$$\left\lfloor \frac{k-2}{k-1} n \right\rfloor + \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2 - s^2}{2} + \binom{s}{2} = \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2 - r^2}{2} + \binom{r}{2}$$

Pozostało pokazać, że da się skonstruować graf o n-wierzchołkach niezawierający k-wierzchołkowej kliki, który ma tyle krawędzi. Niech $n = (k-1)q + r$. Rozważmy $k-1$ grup wierzchołków, z których r ma po $q+1$ elementów, a $k-1-r$ (reszta) ma po q elementów i połączmy wierzchołki, które nie znajdują się w tych samych grupach.

Jedyne krawędzie, które nie zostały narysowane, to te w obrębie poszczególnych grup. Jest ich dokładnie: $r \cdot \binom{q+1}{2} + (k-1-r) \cdot \binom{q}{2}$. Podstawmy x za $k-1$. Zatem całkowita liczba krawędzi jest równa:

$$\binom{n}{2} - (r \cdot \binom{q+1}{2} + (x-r) \cdot \binom{q}{2}) = \frac{n^2 - n - rq(q+1) - (x-r)q(q-1)}{2} =$$

$$= \frac{n^2 - n - 2rq - xq^2 + xq}{2} = \frac{n^2 - n - 2rq - xq^2 + n - r}{2} =$$

$$= \frac{(xq+r)^2 - (xq+r) - 2rq - xq^2 + n - r}{2} = \frac{x^2q^2 + 2xqr + xq^2 - 2rq + (r^2 - r)}{2} =$$

$$= \frac{(x-1)(q^2x + 2qr)}{2} + \binom{r}{2} = \frac{(x-1)(q^2x^2 + 2qrx)}{2x} + \binom{r}{2} =$$

$$= \frac{(x-1)(n^2 - r^2)}{2x} + \binom{r}{2} = \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2 - r^2}{2} + \binom{r}{2}$$

Widzimy, że skonstruowany graf ma maksymalną liczbę krawędzi oraz nie posiada kliki k-wierzchołkowej. Taki graf nazywamy grafem Turana i oznaczamy przez $T(n, k)$.

Uwaga 1: W wielu źródłach znajdujemy nieco inne sformułowanie tego twierdzenia, mówiące o tym, że maksymalną liczbą krawędzi jest $\frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2}{2}$. Zauważmy, że odpowiada to przypadkowi, gdy $r = 0$, czyli $k-1$ dzieli n i rzeczywiście $\frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2-r^2}{2} + \binom{r}{2} \leq \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2}{2}$.

Uwaga 2: Należy jeszcze zauważyć, że $\frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2-r^2}{2} + \binom{r}{2}$ zwykle nie jest liczbą całkowitą. Wtedy oczywiście bierzemy pod uwagę podłogę z tego wyrażenia (takie sformułowanie też się pojawia w niektórych źródłach).

Uwaga 3: Udowodnione wcześniej Twierdzenie Mantela wynika wprost z Twierdzenia Turana.

□

Twierdzenie 1.3 (Twierdzenie Ramsaya)
W grafie pełnym o R_k wierzchołkach i pokolorowanym k kolorami można znaleźć jednokolorowy trójkąt; R_k jest dane wzorem rekurencyjnym: $R_1 = 3, R_k = k(R_{k-1} - 1) + 2$ i jest jednocześnie najmniejszą liczbą o tej zależności.

Dowód Przeprowadźmy dowód indukcyjny. Graf pokolorowany jednym kolorem ma oczywiście jednokolorowy trójkąt jeżeli ma co najmniej 3 wierzchołki. Zatem $R_1 = 3$. Załóżmy więc, że twierdzenie jest prawdziwe dla $k-1$ i weźmy graf pełny o R_k wierzchołkach pokolorowany k kolorami. Rozważmy dowolny wierzchołek tego grafu. Jest on połączony z każdym z pozostałych $k(R_{k-1} - 1) + 1$ wierzchołków jednym z k kolorów, więc z zasady szufladkowej, z pewnymi R_{k-1} wierzchołkami jest połączony tym samym kolorem (niech to będzie kolor niebieski). Jeżeli któreś 2 wierzchołki z tych R_{k-1} są połączone kolorem niebieskim, to mamy niebieski trójkąt. W przeciwnym wypadku, pośród R_{k-1} wierzchołków nie wystepuje kolor niebieski, więc są one połączone ze sobą tylko $k-1$ kolorami. Zatem z założenia indukcyjnego istnieje pośród nich jednokolorowy trójkąt - co kończy dowód.

$\square$

Problem 1
Ile krawędzi może zawierać graf o n wierzchołkach, w którym nie ma kliki 5-wierzchołkowej?

Dowód Z Twierdzenia Turana, graf niezawierający 5-wierzchołkowej kliki może mieć maksymalnie:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{n^2 - r^2}{2} + \binom{r}{2} \leq \frac{3n^2}{8}$$

krawędzi.

$\square$

Problem 2
W pewnym państwie jest 1998 miast. Dla każdych trzech miast, przynajmniej dwa z nich nie są bezpośrednio połączone. Największa liczba bezpośrednich połączeń jest równa 999^2.

Dowód Niech zbiór 1998 miast będzie grafem, gdzie każda krawędź jest bezpośrednim połączeniem. Z założenia wynika, że w tym grafie nie ma kliki 3-wierzchołkowej. Zatem, na mocy twierdzenie Turana, największa możliwa liczba bezpośrednich połączeń (krawędzi) jest równa:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1998^2}{2} = \frac{1998^2}{4} = 999^2$$

$\square$

Problem 3
Zbiór $1, 2, 3, ..., 65$ podzielono na cztery rozłączne zbiory. Istnieją takie liczby a, b, c (niekoniecznie różne) należące do jednego z tych zbiorów, że $a + b = c$.

Dowód Niech każdy podzbiór oznacza jeden kolor. Weźmy 66 punktów, ponumerujmy je liczbami od 1 do 66 i pomalujmy krawędź kolorem przyporządkowanym do zbioru, do którego należy różnica numerów przy tej krawędzi. Z twierdzenia Ramseya wynika, że 3 z tych punktów są połączone tym samym kolorem (ponieważ $R_4 = 66$). Ponumerujmy je a, b, c zakładając bez straty ogólności, że $a < b < c$ oraz niech: $x = b-a, y = c-b, z = c-a$. Wtedy x, y, z należą do jednego podzbioru oraz $x + y = z$.

$\square$

Problem 4
Zbiór liczb naturalnych podzielono na 6 parami rozłącznych podzbiorów. Istnieją takie liczby naturalne $1 \leq a < b < c \leq 2005$, że liczby $a^2 + b^2$, $a^2 + c^2$, $b^2 + c^2$ należą do tego samego podzbioru.

Dowód Rozpatrzmy graf pełny o 2005 wierzchołkach ponumerowanych liczbami od 1 do 2005. Przypiszmy każdemu z 6 rozłącznych podzbiorów jeden kolor i połączmy wierzchołki o numerach x i y kolorem podzbioru, do którego należy $x^2 + y^2$. Z twierdzenia Ramseya, istnieje trójkąt jednokolorowy, ponieważ $2005 < R_6 = 1958$. Zatem istnieją liczby a, b, c, dla których $a^2 + b^2$, $a^2 + c^2$ i $b^2 + c^2$ należą do tego samego podzbioru.

□

Problem 5

Na okręgu o promieniu 1 leży n różnych punktów ($n \geq 2$). Jeżeli q jest liczbą odcinków o końcach w tych punktach i długości większej niż $\sqrt{2}$, to $3q \leq n^2$.

Dowód Skonstruujmy graf mający wierzchołki w określonych w treści punktach i połączmy krawędziami punkty, których odległość jest większa niż $\sqrt{2}$. Pokażemy, że w tym grafie nie ma kliki 4-wierzchołkowej. Załóżmy nie wprost, że jest i nazwijmy jej wierzchołki w kolejności cyklicznej: A, B, C, D. Ponieważ promień okręgu wynosi 1, to odcinek o końcach na okręgu i długości $\sqrt{2}$ tworzy ze środkiem okregu kąt większy niż 90 stopni. Zatem odcinki AB, BC, CD, DA razem tworzą ze środkiem kąt większy niż 360 stopni, co jest niemożliwe. Zatem graf nie zawiera kliki 4-wierzchołkowej, więc z twierdzenia Turana może mieć co najwyżej $\frac{n^2}{3}$ krawędzi.

□

Problem 6

W pewnym państwie jest 2001 miast i każde jest połączone bezpośrednio z przynajmniej 1600 miastami. Największym n, dla którego musi być możliwe znalezienie n miast, z których każde dwa są bezpośrednio połączone, jest $n = 5$.

Dowód Niech 2001 miast (wierzchołków) tworzy graf G. Teza jest równoważna z tym, że należy znaleźć największe takie n, dla którego musi być możliwe znalezienie kliki n-wierzchołkowej. Z lematu Zarankiewicza wiemy, że jeżeli G nie zawiera takiej kliki, to istnieje wierzchołek, który ma stopień co najwyżej równy $\lfloor \frac{n-2}{n-1} \cdot 2001 \rfloor$. Zatem chcemy znaleźć największe n, dla którego $\lfloor \frac{n-2}{n-1} \cdot 2001 \rfloor < 1600$, ponieważ wtedy lemat nie będzie spełniony dla n. Widzimy, że najwiekszym rozwiązaniem jest $n = 5$. Pozostało pokazać, że dla $n > 5$, graf nie musi zawierać n-wierzchołkowej kliki. W szczególności, wystarczy skonstruować graf o 2100 wierzchołkach i stopniach wierzchołków równych co najmniej 1600 niezawierający 6-wierzchołkowej kliki. Takim grafem jest graf Turana - T(2001, 6), którego stopień jest równy $\lfloor \frac{4}{5} \cdot 2001 \rfloor = 1600$, i który nie zawiera 6-wierzchołkowej kliki.

□

Problem 7

Danych jest 21 punktów na okręgu. Istnieje przynajmniej 100 par punktów, takich, że para tworzy z środkiem okręgu kąt o wartości co najwyżej 120 stopni.

Dowód Rozważmy dwa grafy, jeden (G) utworzony z par punktów, które tworzą ze środkiem okręgu kąt nie większy niż 120 stopni, a drugi (W), uzupełniający G do grafu pełnego (utworzonego z danych 21 punktów). W G, połączmy 2 wierzchołki jeżeli tworzą ze środkiem kąt nie większy niż 120 stopni, a odpowiednio w W, połączmy 2 wierzchołki jeżeli tak nie jest. Widzimy, że w ten sposób połaczyliśmy parami wszystkie 21 punktów, czyli otrzymaliśmy w sumie $\binom{21}{2} = 210$ krawędzi. Zauważmy, że W jest grafem, który nie posiada trójkątów (gdyby posiadał, to w danym trójkącie któreś 2 punkty spełniałyby warunek kątowy - co wynika z tego, że kąt przy środku okręgu opisanego na trójkącie jest pełny), więc z twierdzenia Turana , W ma maksymalnie $\frac{21^2-1}{4} = 110$ krawędzi. Zatem G ma co najmniej $210 - 110 = 100$ krawędzi, co kończy dowód.

$\square$

Problem 8

Niech A będzie podzbiorem zbioru $S = \{1, 2, ..., 1000000\}$ mającym dokładnie 101 elementów. Istnieją $t_1, t_2, ..., t_{100} \in S$ takie, że zbiory $A_j = \{x + t_j | x \in A\}, j = 1, 2, ..., 100$ są parami rozłączne.

Dowód Niech $A = a_1 < a_2 < ... < a_{101}$. Narysujmy graf mający 10^6 wierzchołków i połączmy wierzchołki i oraz j jeżeli zbiory $(A + i)$ i $(A + j)$ są rozłączne. Widzimy, że żeby wierzchołek k był połączony z wierzchołkiem l, to $k - l$ nie może być równe $a_i - a_j$ $(a_i \neq a_j)$. Liczb takiej postaci jest $101 \cdot 100$, zatem każdy wierzchołek jest stopnia co najmniej $10^6 - 101 \cdot 100$. Zatem graf ma co najmniej $\frac{10^6(10^6-101\cdot100)}{2}$ (*) krawędzi. Teza będzie zachodzić, jeżeli w danym grafie można znaleźć klikę 100-wierzchołkową. Z twierdzenia Turana wiemy, że istnieje klika 100-wierzchołkowa jeżeli graf ma więcej niż:

$$\frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2 - r^2}{2} + \binom{r}{2} = \frac{98}{99} \cdot \frac{10^{12} - 1}{2} + \binom{1}{2}$$

krawędzi. Można sprawdzić, że powyższa liczba jest mniejsza niż (*), zatem teza zachodzi.

$\square$

Problem 9

Na konferencji jest n delegatów i każdy zna co najwyżej k języków. W każdej trójce, co najmniej dwóch delegatów mówi wspólnym językiem. Najmniejszym n, takim że dla jakiejkolwiek konfiguracji spełniającej powyższe kryteria, możliwe jest znalezienie języka, którym mówi co najmniej trzech delegatów, jest $n = 2k + 3$.

Dowód Najpierw pokażemy, że teza zachodzi dla $n = 2k + 3$. Skonstruujmy graf, w którym wierzchołkami będą delegaci i połączmy krawędzią parę delegatów, jeżeli nie mówią tym samym językiem. Z założenia, w grupie trzech delegatów, przynajmniej dwóch mówi wspólnym językiem, zatem nasz graf nie zawiera kliki 3-wierzchołkowej. Z lematu Zarankiewicza, istnieje pewien wierzchołek A, którego stopień nie przekracza $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Wynika z tego, że nie jest połączony z przynajmniej $k+1$ wierzchołkami. Zatem delegat A, może się dogadać w pewnym języku z każdym z pewnej grupy $k+1$ delegatów. Ale ponieważ A zna co najwyżej k języków, to porozumiewa się z przynajmniej dwoma delegatami z tej grupy tym samym językiem. Znaleźliśmy więc grupę 3 delegatów mówiących tym samym językiem. Pozostało wykazać, że można tak rozdzielić języki pomiędzy $2k+2$ delegatów, żeby teza nie zachodziła (ponieważ wtedy będziemy wiedzieć, że $2k+3$ jest najmniejszą liczba spełniającą warunki zadania). Podzielmy ich na 2 grupy po $k+1$ delegatów każda i przydzielmy każdej parze w obrębie grupy, inny język, w którym się komunikuje. Widzimy, że każdy delegat mówi k-językami oraz dla każdej grupy trzech delegatów, dwóch znajdzie się w tej samej grupie, więc mówi wspólnym językiem. Widać, że w tej sytuacji teza nie zachodzi, ponieważ każdym językiem mówi co najwyżej dwóch delegatów.

□

Problem 10

Dany jest graf G posiadający n^2+1 krawędzi i $2n$ wierzchołków ($n \geq 3$). G zawiera dwa trójkąty dzielące wspólny bok.

Dowód Przeprowadźmy dowód indukcyjny. Dla $n=3$, nasz graf (G) ma 6 wierzchołków i 10 krawędzi. Z twierdzenia Turana, jeżeli graf 6-wierzchołkowy nie zawiera trójkąta, to ma co najwyżej $\frac{36}{4}=9$ krawędzi. Zatem graf G zawiera trójkąt. Możemy wybrać 2 wierzchołki A i B tego trójkąta o stopniu tej samej parzystości. Jeżeli graf utworzony z pozostałych 4 wierzchołków zawiera co najmniej 5 krawędzi, to teza zachodzi. Załóżmy, więc, że zawiera co najwyżej 4 krawędzie. Wtedy, co najmniej 6 krawędzi ma końce w A i B. Ponieważ pomiędzy A i B już jest krawędź, to z A lub B wychodzi co najmniej 5 krawędzi, ale ponieważ stopnie A i B są tej samej parzystości, to wychodzi z A lub B co najmniej 6 krawędzi. Ale ponieważ łączą one A i B z 4 pozostałymi wierzchołkami, to z zasady szufladkowej, co najmniej 2 z tych 4 wierzchołków, są połączone zarówno z A, jak i z B - co dowodzi tezy dla $n=3$. Załóżmy, że teza zachodzi dla n i stosując analogiczne rozumowanie pokażmy, że zachodzi też dla $n+1$ (graf W). Ponieważ W ma $2(n+1)$ wierzchołków i $(n+1)^2+1$ krawędzi, to z twierdzenia Turana zawiera trójkąt. Ponownie, wybieramy z trójkąta 2 wierzchołki o stopniach tej samej parzystości. Jeżeli pozostałe $2n$ wierzchołków (*) zawiera co najmniej n^2+1 krawędzi, to na mocy założenia indukcyjnego, teza zachodzi. W przeciwnym wypadku, co najmniej $2n+2$ krawędzi ma końce w A lub B, ale ponieważ jest krawędź pomiędzy A i B oraz ich stopnie są tej samej parzystości, to przynajmniej $2n+2$ krawędzi wychodzi z A lub B do (*). Tak jak dla $n=3$, istnieją dwa wierzchołki z (*), z których każdy jest połączony z A i B - co kończy dowód.

□

Problem 11
Graf o n wierzchołkach i k krawędziach zawiera co najmniej $\frac{k}{3n}(4k - n^2)$ trójkątów.

Dowód Ponumerujmy wierzchołki grafu od 1 do n, oznaczmy je v_i i niech wierzchołek v_i ma stopień d_i. Weźmy v_i oraz v_j : v_i jest połączony z $(d_i - 1)$ spośród pozostałych $(n-2)$ wierzchołków, a v_j - z $(d_j - 1)$. Ponieważ innych wierzchołków niż v_i oraz v_j jest tylko $(n - 2)$, to liczba wierzchołków połączonych zarówno z v_i, jak i z v_j jest równa przynajmniej:

$$(d_i - 1) + (d_j - 1) - (n - 2) = (d_i + d_j - n)$$

Tyle jest też przynajmniej trójkątów o krawędzi v_iv_j. Zatem całkowita liczba trójkątów jest równa $\frac{1}{3} \cdot \sum_{v_iv_j \in E} (d_i + d_j - n)$, gdzie E to jest zbiór krawędzi. Ale $\sum_{v_iv_j \in E} (d_i + d_j) = \sum_{i=1}^{n} (d_i)^2$, ponieważ każdy wierzchołek i pojawia się w dokładnie d_i wyrazach. Zatem całkowita liczba trójkątów jest równa:

$$\frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^{n} (d_i)^2 - \frac{1}{3} \cdot nk$$

Z nierówności Cauchy'ego Schwarza:

$$\sum_{i=1}^{n} (d_i)^2 \geq \frac{(\sum_{i=1}^{n} d_i)^2}{n} = \frac{(2k)^2}{n} = \frac{4k^2}{n}$$

Skąd w oczywisty sposób uzyskujemy tezę.

□

Problem 12
Niech $A_1, A_2, ..., A_{101}$ będą różnymi podzbiorami zbioru $1, 2, ..., n$, że suma którychkolwiek 50 podzbiorów ma więcej niż $\frac{50}{51}n$ elementów. Pośród nich są takie trzy, że dowolne dwa z tych trzech mają element wspólny.

Dowód Rozważmy graf G, którego wierzchołkami są dane podzbiory i połączmy dwa podzbiory jeżeli mają wspólne elementy. Załóżmy, że G nie zawiera kliki 3-wierzchołkowej (w przeciwnym wypadku teza jest oczywista). Udowodnijmy, że istnieje grupa przynajmniej 51 wierzchołków, z których każdy ma stopień co najwyżej 50. Załóżmy nie wprost, że tak nie jest, czyli istnieje grupa 51 wierzchołków, każdy o stopniu równym co najmniej 51 (*). Wybierzmy wierzchołek A należący do tej grupy. A jest połączone z co najmniej 51 wierzchołkami, więc z (*) wiemy, że A musi być połączone z pewnym wierzchołkiem B, którego stopień też jest co najmniej 51. Ponieważ A i B są połączone z co najmniej 51 wierzchołkami, a wierzchołków innych niż A i B jest 99, to musi istnieć wierzchołek C, który jest połączony zarówno z A, jak i z B. Uzyskaliśmy sprzeczność, ponieważ w G nie ma trójkąta. Zatem możemy znaleźć wierzchołki $A_{i_1}, ..., A_{i_{51}}$, z których każdy ma stopień co najwyżej 50. Wynika z tego, że podzbiór A_{i_1} jest rozłączny z co najmniej pięćdziesięcioma podzbiorami. Ponieważ iloczyn tych 50 podzbiorów ma więcej niż $\frac{50}{51}n$ elementów, wnioskujemy, że $|A_{i_1}| < n - \frac{50}{51} \cdot n = \frac{n}{51}$. W podobny sposób: $|A_{i_j}| < \frac{n}{51}$ dla każdego $j \in 1, 2, ..., 51$. Zatem:

$$|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup ... \cup A_{i_{50}}| \leq |A_{i_1}| + ... + |A_{i_{50}}| < 50 \cdot \frac{n}{51} = \frac{50}{51}n$$

Co jest sprzeczne z założeniami zadania.

□

Problem 13

Niech G będzie grafem niezawierającym trójkątów (1), takim, że żaden jego wierzchołek nie jest przystający do wszystkich pozostałych wierzchołków (2) oraz jeżeli A i B nie są połączone krawędzią, to istnieje taki wierzchołek C, że AC i BC są krawędziami (3). Wszystkie wierzchołki mają ten sam stopień.

Dowód Rozpatrzmy punkt A tego grafu o stopniu m i sąsiadach $B_1, ..., B_m$. Z (1), dla $i \neq j$, B_i i B_j nie są połączone i z (3), punkt $C \neq A$ nie może być połączony z B_i oraz B_j jednocześnie. Zatem sąsiadów B_i postaci C_{ij} (różnych od A i różnych od pozostałych B_j) jest dokładnie $\deg B_i - 1$. Jedynymi punktami, które mogą być połączone z C_{ij} (nie licząc B_i) są inne C_{hk}, ponieważ z (3) wynika, że każdy wierzchołek grafu jest połączony z A ścieżką długości 1 lub 2 (Innymi słowy, jedynymi punktami tego grafu są: A, sąsiedzi A, czyli B_i, oraz sąsiedzi punktów B_i - oznaczane jako C z odpowiednim indeksem). Ale z (2), C_{ij} nie może być połączone z C_{ik} oraz nie może być połączone z różnymi C_{kh} i $C_{kh'}$ z (3), zatem jest połaczone z co najwyżej jednym punktem postaci C_{kh} dla każdego $k \neq i$ (*). Dodatkowo, zauważmy, że z (3) wynika, że musi istnieć punkt X połączony z B_k i C_{ij} $(k \neq i)$ oraz jedynymi punktami połączonymi z B_k są A i C_{kh}. Zatem C_{ij} musi być połączone z przynajmniej jednym punktem C_{kh} dla każdego $k \neq i$ (**). Z (*) oraz (**) wnioskujemy, że stopień C_{ij} jest równy m.
Ale gdybyśmy wystartowali z punktu B_i zamiast A i powtórzyli analogiczne rozumowanie, to uzyskalibyśmy, że stopień B_i jest taki sam jak stopień C_{hk}, gdzie C_{hk} jest jednym z sąsiadów C_{i1}. Zatem wszystkie punkty mają ten sam stopień.

□

Problem 14

Graf o n wierzchołkach i k krawędziach nie zawiera trójkątów. Można wybrać taki wierzchołek, że podgraf utworzony z pozostałych wierzchołków ma co najmniej $k(1 - \frac{4k}{n^2})$ krawędzi.

Dowód Dla danego punktu P, podzielmy krawędzie grafu na trzy kategorie: (1) odcinki PQ, gdzie Q jest sąsiadem P; (2) odcinki QQ' (Q jest sąsiadem P, więc Q' nim nie może być, ponieważ w tym grafie nie ma trójkątów); (3) odcinki Q'Q", gdzie Q' i Q" nie są sasiadami P. Widzimy, że dla danego P, liczba krawędzi w kategoriach (1)

i (2) jest równa $\sum' degQ$, gdzie $\sum'$ oznacza, że sumujemy tylko po sąsiadach P. Zatem liczba krawędzi w kategorii (3) jest równa: $k - \sum' degQ$. Chcemy więc pokazać, że $\sum' degQ \geq \frac{4k^2}{n^2}$.
Sumując krawędzie w kategoriach (3) dla wszystkich P, otrzymujemy: $\sum P \sum' degQ$ (*), co jest równe $\sum deg^2 Q$ (suma po wszystkich punktach Q), ponieważ każdy degQ liczyliśmy w sumie (*) dokładnie degQ razy. Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza:

$$(\sum degQ)^2 \leq (\sum 1^2)(\sum deg^2 Q) = n \cdot \sum deg^2 Q$$

Ale $\sum degQ = 2k$, więc:

$$\sum P \sum^{'} degQ = \sum deg^2 Q \geq \frac{(\sum degQ)^2}{n} = \frac{4k^2}{n}$$

Ale ponieważ suma n wyrazów jest równa co najmniej $\frac{4k^2}{n}$, to przynajmniej jeden wyraz jest wiekszy lub równy $\frac{4k^2}{n^2}$. Zatem można znaleźć takie P, dla którego $\sum' degQ \geq \frac{4k^2}{n^2}$ - co chcieliśmy pokazać.

$\square$

Bibliografia

1. "Problems from the book", Titu Andrescu, Gabriel Dospinescu
2. Olimpiady matematyczne z całego świata