2016

Problem konika szachowego

Jędrzej Miklaszewski

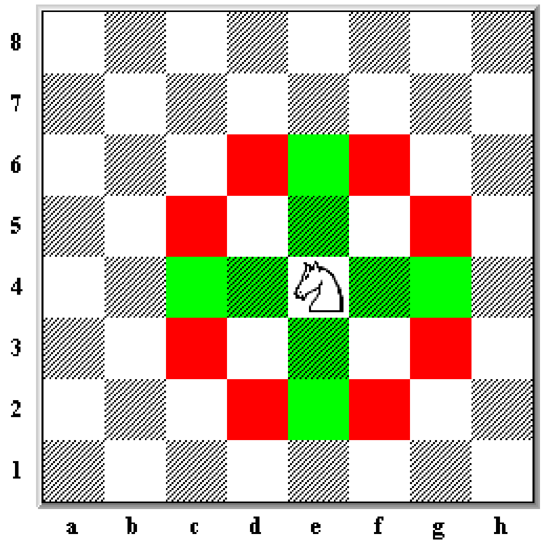
VIII Prywatne Akademickie Liceum Ogólnokształcące w Krakowie

Problem konika szachowego

Wstęp:

Szachy to jedna z najpopularniejszych gier planszowych w historii rodzaju ludzkiego. Gra jest często postrzegana jako skomplikowana, ponieważ wymaga ciągłej koncentracji nad każdym wykonywanym ruchem. Na przestrzeni wieków szachiści stworzyli mnóstwo problemów związanych z szachami. Jednym z najdłużej badanych zagadnień szachowych (od ponad tysiąclecia) jest problem skoczka szachowego, który opiera się na ruchu tej figury na szachownicy. Porusza się on po szachownicy w kształcie litery L, to znaczy przemierzając kolejno dwa pola pionowo, jedno poziomo, lub dwa pola poziomo oraz jedno pionowo. Ruch ten został przedstawiony na załączonym poniżej obrazku.

Zielone pola na rysunku odnoszą się do kierunku oraz pierwszych dwóch pól, przez które porusza się figura, podczas gdy pola zaznaczone na czerwono przedstawiają pozycję konika pod koniec każdego możliwego ruchu na szachownicy.

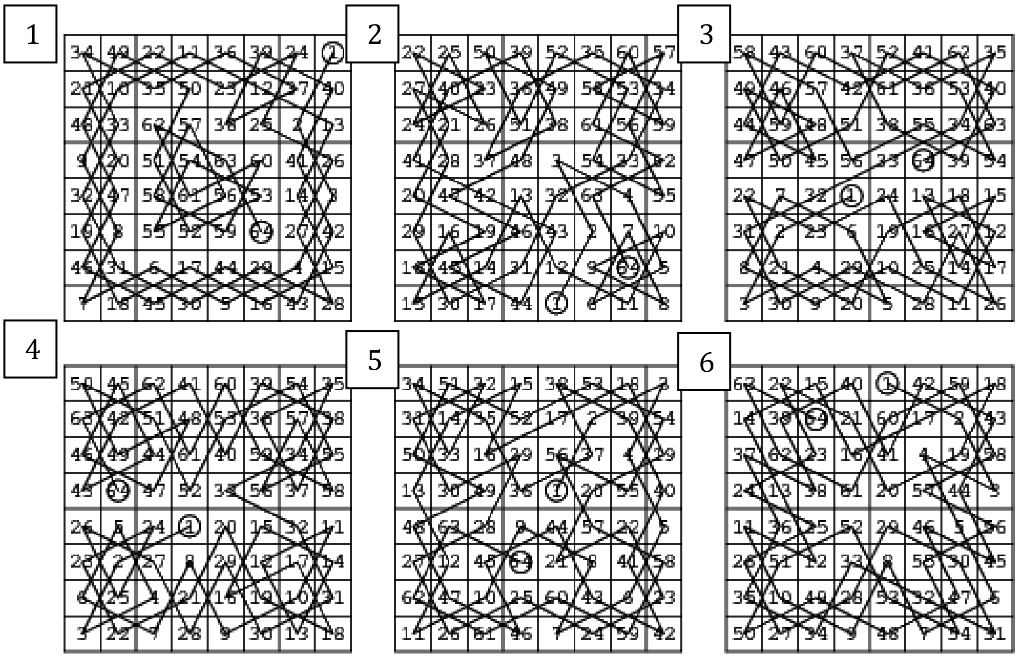


Rysunek 1. Podstawowy ruch konika szachowego, możliwe drogi pokonane w jednym ruchu.[2]

Ścieżką konika szachowego nazywa się drogę, którą konik szachowy przemierza, aby odwiedzić każde pole na danej szachownicy nie stając na żadnym więcej niż raz. Ścieżki te można podzielić na dwa główne rodzaje. *Zamknięta* ścieżka to droga, której koniec można połączyć z jej początkiem za pomocą jednego ruchu konika. Oznacza to, że z pola, na którym figura zakończyła swoją ścieżkę można dostać się na pole, z którego wyruszył konik jednym ruchem (Rysunek_1.). Natomiast *otwarta* ścieżka odnosi się do wszystkich pozostałych dróg, których koniec nie może być połączony z początkowym polem. Kilka przykładów możliwych ścieżek konika szachowego na regularnej szachownicy (o wymiarach 8×8) zostało przedstawione na następnej stronie.

[1] http://www.egheflin.com/professional/KnightsTourWiki.htm, 2015/10/25

[2] http://www.chesscorner.com/tutorial/basic/knight/knight.htm, 2015/ 10/26



Rysunek 2. Kilka przykładów możliwych ścieżek konika szachowego na regularnej szachownicy

Na podstawie przedstawionych wcześniej definicji można zidentyfikować pierwszą ścieżkę jako ścieżkę otwartą, natomiast resztę jako ścieżki zamknięte. Czarne łamane, widoczne na każdej z sześciu szachownic na rysunku 2 odwzorowują ruch konika po szachownicy, gdzie każdy numer odpowiada kolejnemu ruchowi figury. Numery oznaczone kołem oznaczają odpowiednio początkową (1) oraz końcową (64) pozycję konika szachowego.

Na rysunku powyżej można zauważyć przykłady kilku strategii, które służą do znalezienia ścieżek konika szachowego. Na rysunku 2, na szachownicy numer 1, widoczne są wyraźnie dwie fazy procesu rozwiązywania problemu ścieżki konika szachowego. W pierwszej kolejności figura przemierza pola, które są najbardziej oddalone od środka szachownicy, tworząc w ten sposób pewnego rodzaju „ścianę", która pozwala skupić się na pozostałym, mniejszym obszarze do rozwiązania. Jest to jeden z najszybszych sposobów na to aby znaleźć ścieżkę na danej szachownicy. W tej pracy taki sposób znajdywania ścieżki konika będzie nazywany jako strategia „klamry".

Kolejna taktyka ukazana powyżej to strategia „pół – ścieżki", która jest widoczna na trzeciej i czwartej szachownicy (licząc od lewej, górnej szachownicy w prawo). Taka strategia ma na celu podzielenie szachownicy na dwa, równej wielkości obszary szachownicy, a następnie odnaleźć ścieżkę dla każdego z nich.

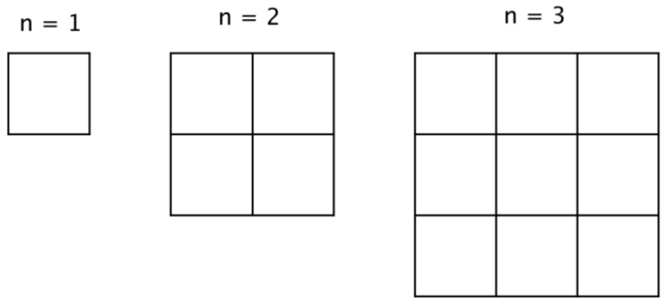
Trzecia omawiana strategia odnajdywania ścieżek konika szachowego, jest podobna to drugiej. Nazwana w tej pracy strategią „sektorową" odnosi się do podziału szachownicy na więcej niż dwa sektory, które w tym przypadku nie muszą mieć jednakowej wielkości. Rozwiązywanie problemu tą metodą sprowadza się do odnalezienia ścieżki dla każdego z sektorów oraz spojenie ich w jedną dla całej szachownicy. Ta taktyka jest widoczna na dwóch ostatnich szachownicach rysunku 2.

[3] http://mathworld.wolfram.com/KnightGraph.html, 2015/10/26

Ponieważ istnieje wiele możliwych ścieżek konika szachowego na szachownicach o kwadratowym kształcie w następnej części pracy zostaną omówione warunki, dla których ścieżka nie może zostać odnaleziona na szachownicy o wymiarach $n \times n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$.

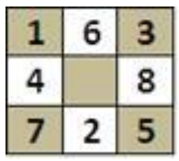
1) **Szachownice o wymiarach $n \times n$, gdzie $n \leq 3$**

Problem ze znalezieniem ścieżki konika szachowego rozpoczyna się przy najmniejszych szachownicach o kwadratowych wymiarach tj. 1×1, 2×2 oraz 3×3. W przypadku pierwszego przykładu ścieżka jest teoretycznie znaleziona zaraz po tym jak konik zostaje postawiony na jedynym możliwym polu. Natomiast w przypadku kwadratowej szachownicy, której długość boku wynosi 2, konik szachowy nie jest w stanie wykonać żadnego właściwego ruchu, ponieważ do wykonania poprawnego ruchu potrzebne są trzy pola w linii prostej (patrz Rysunek 1.). Pola, z których skoczek nie może wykonać żadnego poprawnego ruchu nazywane są *ślepymi.*



Rysunek 3. Przykłady najmniejszych szachownic o wymiarach $n \times n$, gdzie $n \leq 3$.[4]

W przypadku szachownicy o wymiarach 3×3 konik szachowy nie będzie w stanie dotrzeć do środkowego pola szachownicy, chcąc zrobić więcej niż jeden ruch. Z kolei, gdy konik zaczynać będzie ze środka szachownicy, nie będzie on w stanie wykonać poprawnego ruchu, podobnie jak w przypadku szachownicy 2×2 (Rysunek 1).



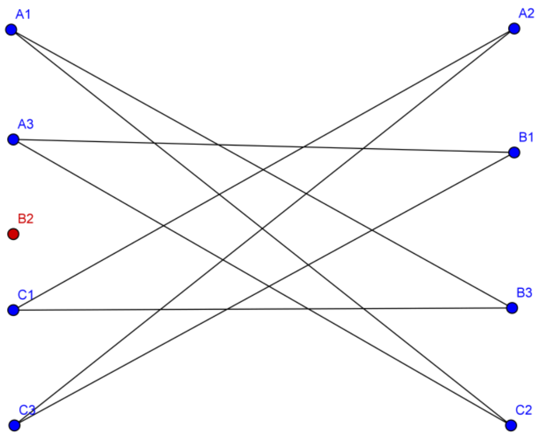
Rysunek 4. Droga zakończona na ślepym polu (numer 8) na szachownicy o wymiarach 3×3.

W kontekście teorii grafów problem skoczka szachowego odpowiada problemowi znalezienia ścieżki Hamiltona w grafie dwudzielnym.

Z definicji ścieżka Hamiltona przechodzi dokładnie jeden raz przez każdy wierzchołek grafu. Zatem odnosi się ona bezpośrednio do ścieżki jaką w opisywanym problemie musi przejść konik szachowy. Natomiast cykl Hamiltona to zamknięta ścieżka, odpowiadająca zamkniętej ścieżce konika szachowego.

Użyty w pracy koncept grafu dwudzielnego to, podzielony wyraźnie na dwie części, system wierzchołków, w którym krawędzie pojawiają się wyłącznie między wierzchołkami z innej części grafu.

[4] http://mathsexplorer.blogspot.com/2012/02/how-many-squares-on-chessboard.html, 29/10/2015

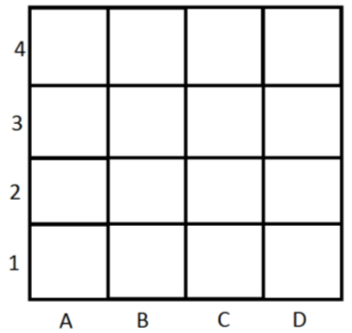


Rysunek 5. Wykres nieskończonej ścieżki na szachownicy o wymiarach 3×3

Gdzie lewa strona wykresu (A1, A3, B2, C1, C3) odnosi się do czarnych pól na szachownicy, a prawa strona (A2, B1, B3, C2) przedstawia białe pola. Na powyższym grafie środkowe pole szachownicy zostało zaznaczone czerwonym kolorem. Należy zwrócić uwagę że nie istnieje taka kombinacja krawędzi, która połączyłaby wszystkie wierzchołki na wyżej przedstawionym wykresie. Zatem, wierzchołek, który pozostaje niepołączony z żadnym innym przedstawia środkowe pole na szachownicy o wymiarach 3×3, do którego konik szachowy nie może dotrzeć z żadnego innego pola.

2) Szachownice o wymiarach 4×4

Podobnie w przypadku szachownicy o wymiarach 4×4, nie istnieje ścieżka, którą konik szachowy mógłby przebyć. Powodem jest to że w pewnym momencie figura dociera do „ślepego" pola, z którego nie jest w stanie kontynuować ścieżki.



Rysunek 6. Szachownica o wymiarach4×4.[5]

Pierwszym oraz najważniejszym ruchem podczas szukania ścieżki konika szachowego jest próba dotarcia do pól znajdujących się na rogach szachownicy. Jeśli nie jest to możliwe, to problem nie ma rozwiązania. Aby dotrzeć do wspomnianych pól (A4, D1, D4) z pozycji początkowej A1, konik musi przejść przez pole C3 lub B2 w celu osiągnięcia drugiego rogu. Próba rozwiązania problemu dla tego typu szachownicy została przedstawiona poniżej.

[5] http://mathonline.wikidot.com/knight-s-tour-problem, 29/10/2015

4	1	6	13	10
3	12	9	4	7
2	5	2	11	14
1		15	8	3
	A	B	C	D

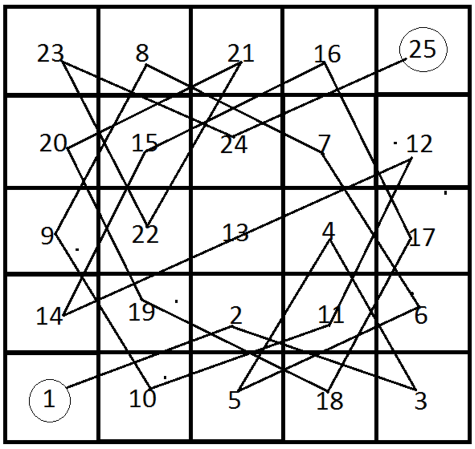
Rysunek 6. Nieudana próba odnalezienia ścieżki na szachownicy o wymiarach 4×4; liczby na polach oznaczają kolejne pozycje figury.

Liczby wzięte w okrąg oznaczają kolejno początkową (1) oraz końcową (15) pozycję konika szachowego. Z pola oznaczonego numerem 15 nie jest możliwe kontynuowanie ścieżki w żadnym kierunku, jest to zatem ślepe pole, które kończy podejście. Warto zauważyć, że symetria i rotacja szachownicy nie mają wpływu na rozwiązanie problemu konika szachowego.

3) Szachownice o wymiarach $n \times n$, gdzie $n \geq 5$

Zaczynając od najmniejszej, w tym przedziale, szachownicy o wymiarach 5×5 należy wspomnieć że jest ona równocześnie najmniejszą kwadratową szachownicą, na której możliwe jest poprowadzenie ścieżki konika szachowego (nie licząc szachownicy o wymiarach 1×1).

23	8	21	16	25
20	15	24	7	12
9	22	13	4	17
14	19	2	11	6
1	10	5	18	3



Rysunek 7. Przykład (otwartej) ścieżki na kwadratowej szachownicy 5×5

Przykład możliwej ścieżki na tego typu szachownicy został zaprezentowany na rysunku 7. Dodatkowo na szachownicy o wymiarach 5×5 możliwe są tylko ścieżki otwarte, ponieważ konieczne jest wykonanie nieparzystej liczby ruchów na szachownicy. Na dwudzielnym grafie, przedstawiającym taką sytuację, widoczne by było że nie jest możliwe połączenie wszystkich wierzchołków z obu części. Widać zatem że liczba wykonanych podczas ścieżki przez figurę ruchów jest równy liczbie pól znajdujących się na całej szachownicy.

W związku z tym można stwierdzić, co następuje:

$$liczba\ ruchów\ skoczka \stackrel{\text{def}}{=} liczba\ wszystkich\ pól\ na\ szachownicy$$

Tę zależność można łatwo zauważyć na Rysunku 7. Widzimy że liczba ruchów odpowiada liczbie pól znajdujących się na szachownicy.

Jednakże, problem konika szachowego może być rozwiązany na znacznie większych, kwadratowych szachownicach. Za pomocą technologii ścieżka konika szachowego została narysowana nawet dla szachownicy o wymiarach 130 x 130 pól.

Po odnalezieniu ścieżki następnym krokiem jest określenie liczby możliwych ścieżek na danej szachownicy. Jak dotąd możliwe jest podanie wszystkich możliwych ścieżek na kwadratowych szachownicach, których wymiary nie przekraczają 7×7.

Kwadratowa szachownica (n x n)	Liczba możliwych ścieżek konika szachowego
1×1	1
2×2	0
3×3	0
4×3	0
5×5	1728
6×6	6’637’928
7×7	165’575’218’320

Rysunek 9. Tabela zawierająca dane z liczbami możliwych ścieżek dla kwadratowych szachownic od 1×1 do 7×7. [6]

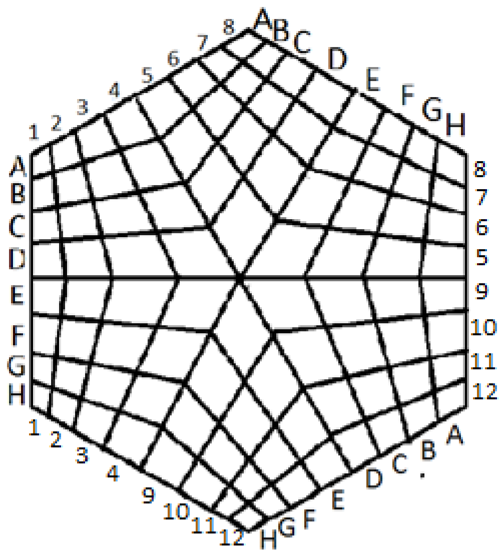
Różne źródła (Brendan McKay, 1997) podają różne wartości dla liczby możliwych ścieżek konika szachowego na regularnej szachownicy (8×8). Jednakże używając wartości podanych powyżej, można oszacować wartość dla następnej, regularnej szachownicy, modelując wyniki przy pomocy odpowiedniej funkcji wykładniczej.

Celem tej pracy jest zbadanie problemu skoczka (konika) szachowego dla szachownic, które nie są używane na co dzień oraz określenie warunków, w jakich problem ten da się rozwiązać dla danego przykładu za pomocą, przedstawionych w dalszej części pracy, sposobów. W następnej części pracy zostaną przedstawione dwa rodzaje niestandardowych szachownic, których kształt nie opiera się na kwadracie.

[6] http://www.slideshare.net/DanFreeman1/chessboard-puzzles-part-3-knights-tour, 29/10/2015

„Szachy dla trzech"

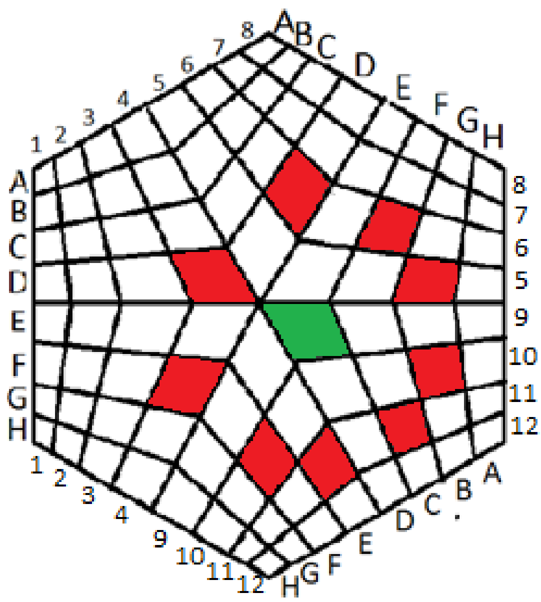
Pierwszym, branym pod uwagę przykładem szachownicy, której kształt nie opiera się na kwadracie będzie szachownica służąca w grze zwanej „szachami dla trzech". Najbardziej popularną odmianą szachownicy używaną w tym, dość niecodziennym wariancie gry jest oparta na sześciokącie foremnym szachownica, składająca się z 96 czworobocznych pól. Przykład opisanej szachownicy został załączony poniżej.



Rysunek 10. Przykład sześciokątnej szachownicy „dla trzech".

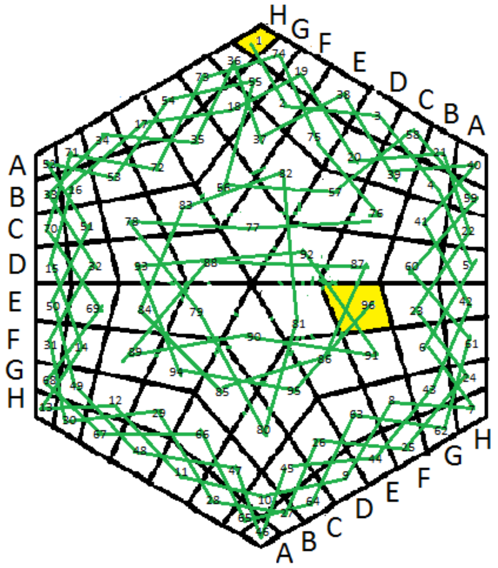
Na obrazku powyżej początkowe pozycje figur każdego z graczy znajdują się przy boku szachownicy oznaczonymi literami (A-H).

Podstawowy ruch konika szachowego na tego typu szachownicy został przedstawiony na rysunku poniżej.



Rysunek 11. Podstawowy ruch konika szachowego na standardowej szachownicy „dla trzech".

Na powyżej przedstawionym rysunku, początkowa pozycja figury (D9) została oznaczona zielonym kolorem, a możliwe pozycje końcowe czerwonym (B10, C11, D4, D6, E11, F4, F6, F10, G5) .



Rysunek 12. Przykład otwartej ścieżki konika szachowego na szachownicy „dla trzech”

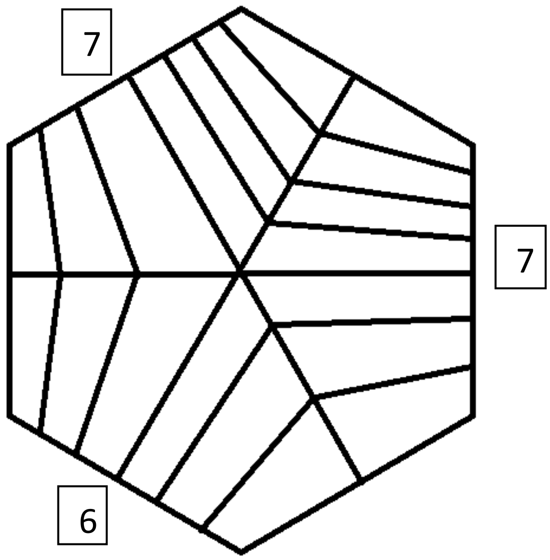
Początkowa (1) i końcowa (96) pozycja figury znajdują się na zaznaczonych na żółto polach. Zielona linia, prezentuje ruch konika po szachownicy podczas przebywania ścieżki. Aby znaleźć ścieżkę w tym przypadku użyta została strategia „klamry” (rysunek 2). Ścieżka jest możliwa, ponieważ figura przechodzi przez każde pole na szachownicy tylko i wyłącznie raz, zaczynając się i kończąc na jednym z pól. Ścieżka zaczyna się w jednym z rogów szachownicy i zgodnie z założeniami strategii „klamry” przebiega początkowo przez bardziej oddalone od centrum pola, aby następnie wypełnić środek jej środek. Jednocześnie ścieżka ta dowodzi, że rozwiązanie problemu istnieje dla regularnej szachownicy „dla trzech” o wymiarach $8 \times 8 \times 8$.

Szachownice „dla trzech” o wymiarach $\boldsymbol{n \times n \times n}$., gdzie $\boldsymbol{n} < 8, n \in \mathbb{N}$

Celem kolejnej części tej pracy jest zbadanie problemu dla mniejszych rozmiarów szachownic „dla trzech” oraz znalezienie ewentualnych ścieżek.

Szachownica dla trzech o wymiarach $\boldsymbol{8 \times 8 \times 8}$.

Podczas rysowania hipotetycznego modelu szachownicy dla trzech o wymienionych wyżej wymiarach został napotkany poważny problem. Nie jest możliwe stworzenie hipotetycznej szachownicy „dla trzech”, której liczba pól przy każdym z boków jest liczbą nieparzystą. Próba stworzenia takiego modelu została przedstawiona na rysunku poniżej.

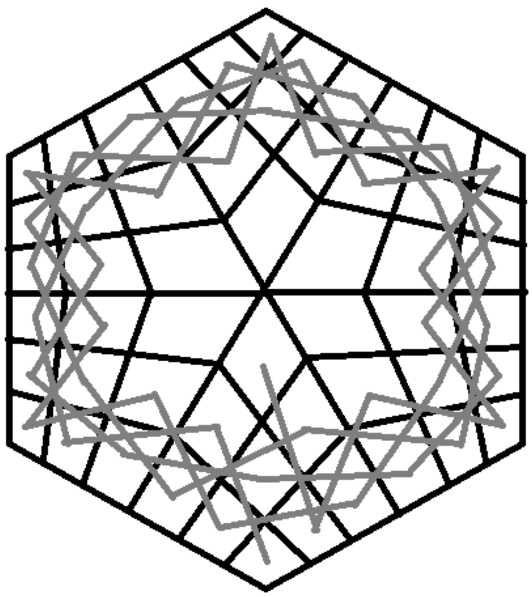


Rysunek 13. Niedokończony model szachownicy dla trzech o wymiarach $7 \times 7 \times 7$.

Numery pojawiające się w polach tekstowych odnoszą się do liczby pól przy każdym z boków szachownicy. Uwzględniając powyższe stwierdzenie, jedynie szachownice „dla trzech" z parzystą liczbą pól przy jej bokach będą brane pod uwagę w tej pracy.

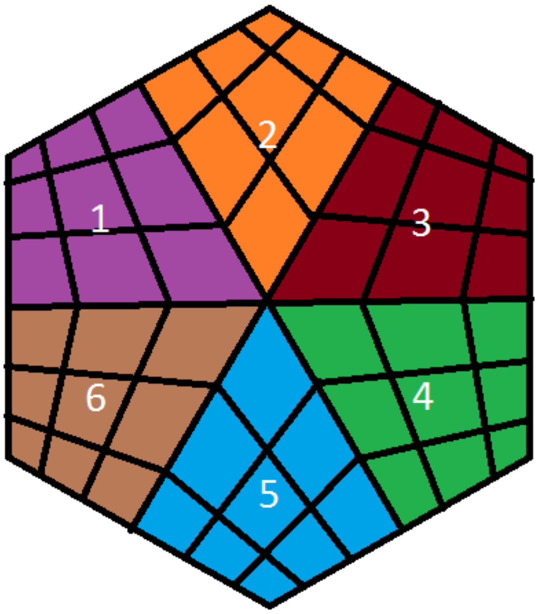
Szachownica dla trzech o wymiarach $6 \times 6 \times 6$.

Pierwsza szachownica o mniejszych wymiarach niż oryginał to rodzaj, w którym na każdej ze stron znajduje się odpowiednio po dwa pola mniej. Podejście do znalezienia ścieżki zostało pokazane na kolejnej stronie.



Rysunek 14. Niedokończona ścieżka na szachownicy „dla trzech" o wymiarach $6 \times 6 \times 6$.

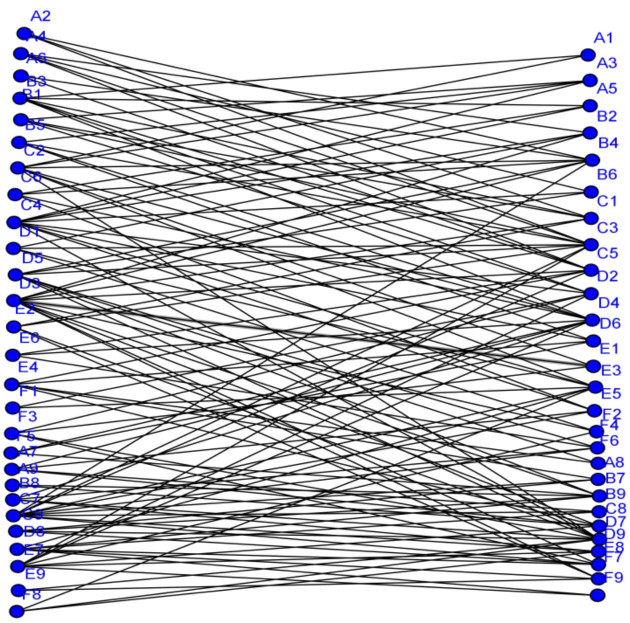
Na rysunku powyżej widoczne jest że Ścieszka nie może być skończona tą metodą i pozostaje nieukończona. Jednakże, aby dowieść że ten typ szachownicy nie posiada żadnej ścieżki zostanie ponownie użyta strategia „sektorowa". Jeśli szachownica zostanie podzielona na sześć przystających sektorów otrzymają one następujący kształt:



Rysunek 15. Podzielona szachownica „dla trzech” o wymiarach 6 × 6 × 6.

Na powyższym rysunku każdy sektor został oznaczony innym kolorem oraz numerem (od 1 do 6). Widać teraz że powstałe w ten sposób sektory tworzą przykłady małych szachownic o wymiarach 3x3, na których żadna ścieżka nie może zostać poprowadzona, co zostało udowodnione wcześniej.

Jednakże, za pomocą dwudzielnego grafu możliwe jest rozwiązanie problemu, tak jak zostało to pokazane poniżej

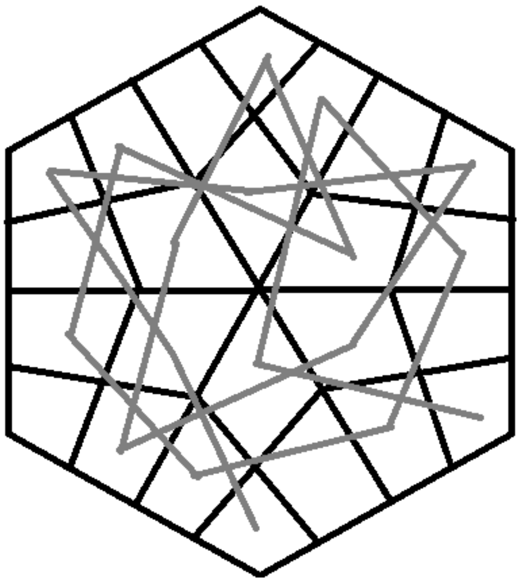


Rysunek 16.

Każdy z wierzchołków na powyższym rysunku oznaczony jest odpowiednimi literami oraz numerami zgodnie z przedstawioną wcześniej numeracją pól na tego typu szachownicach.

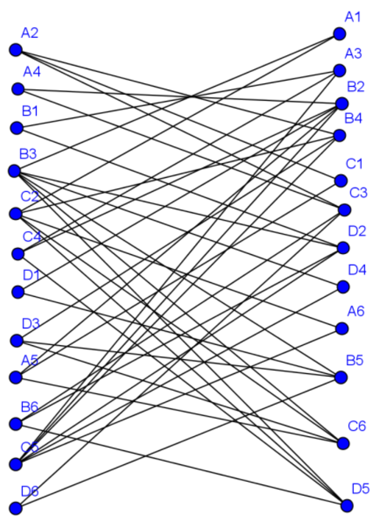
<u>Szachownica „dla trzech” o wymiarach $4 \times 4 \times 4$.</u>

Następną alternatywą dla oryginalnej szachownicy „dla trzech” jest model z czterema polami przy każdym z boków. Próba znalezienia ścieżki dla tego typu szachownicy została przedstawiona poniżej.



<u>Rysunek 17.</u> Nieukończona próba odnalezienia ścieżki na szachownicy „dla trzech” o wymiarach $4 \times 4 \times 4$.

Również dla tego typu szachownicy ścieżka nie została odnaleziona, a problem nierozwiązany. Aby pokazać rezultat próby odnalezienia ścieżki, szachownica została przedstawiona za pomocą grafu dwudzielnego wraz ze znalezioną ścieżką.

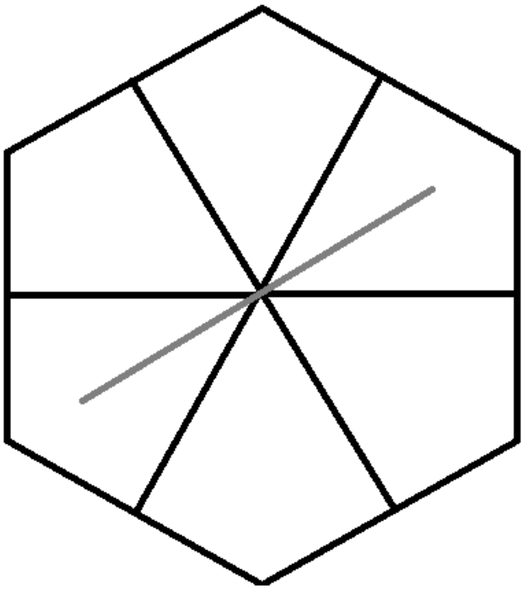


<u>Rysunek 18.</u> Dwudzielny graf przedstawiający szachownicę „dla trzech” o wymiarach $4 \times 4 \times 4$.

Z przedstawionego powyżej grafu można wywnioskować że (otwarta) ścieżka dla szachownicy o danych wymiarach istnieję.

<u>Szachownica „dla trzech” o wymiarach $2 \times 2 \times 2$.</u>

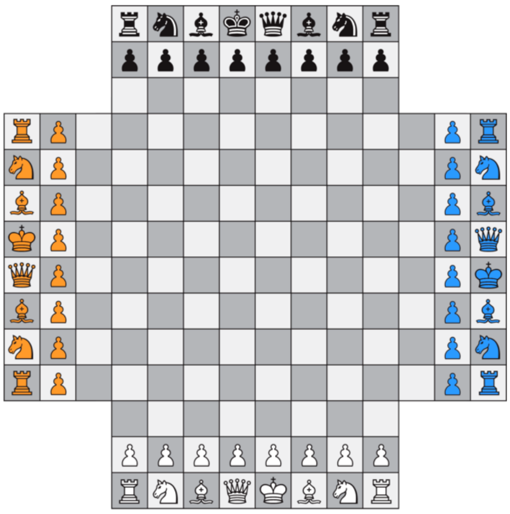
Ostatnią możliwą wersją szachownicy „dla trzech” jest wariant z dwoma polami przy każdym boku szachownicy. W tym przypadku próba kończy się już po pierwszym ruchu, jako że następne pole jest ślepe. Zatem problem zostaje nierozwiązany dla tego typu szachownic.



<u>Rysunek 19.</u> Niedokończona ścieżka na szachownicy „dla trzech” o wymiarach $2 \times 2 \times 2$.

<u>„Szachy dla czterech”</u>

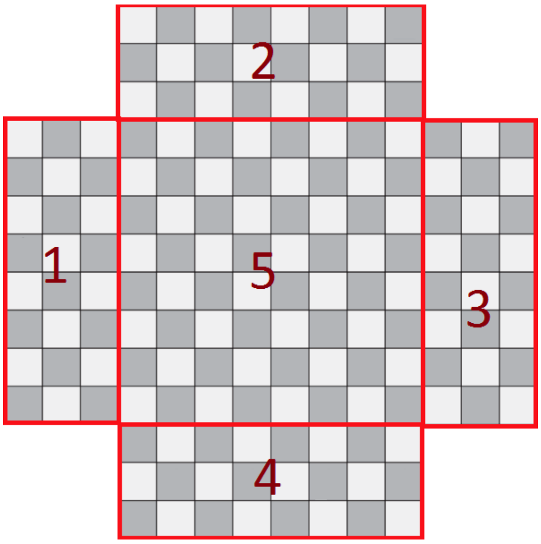
Szachy dla cztery to jeszcze rzadsza i mniej spotykana odmiana popularnej gry. W przypadku tej odmiany mamy aż o dwóch zawodników więcej niż w tradycyjnej rozgrywce. Tak jak w poprzednim przypadku, ten rodzaj gry również ma swój rodzaj szachownicy.



<u>Rysunek 20.</u> Przykład szachownicy „dla czterech”

Istnieje wiele typów oraz kształtów szachownic przeznaczonych do gry dla czterech zawodników, natomiast ta praca przeanalizuje rozwiązania dla modelu przedstawionego powyżej. Można zauważyć, że ten rodzaj szachownicy tak naprawdę bazuje na kształcie regularnej szachownicy kwadratowej do której dołączone są, z każdej strony, sektory o wymiarach 3×8.

Zatem ścieżkę na tej szachownicy można znaleźć za pomocą podziału szachownicy na powyżej wymienione sektory . Podział szachownicy na pięć różnych sektorów został przedstawiony poniżej.

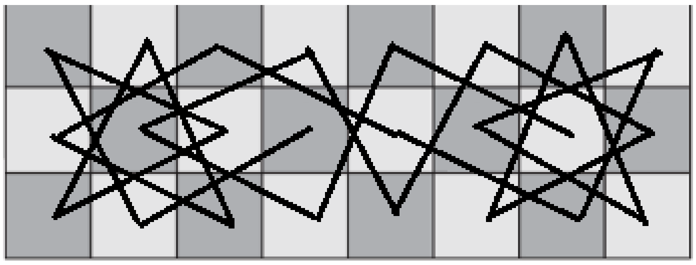


Rysunek 21. Podział szachownicy „dla czterech” na pięć różnych sektorów.

Należy zauważyć, że po podziale tworzą się cztery, takie same sektory o wymiarach 3×8 (1,2,3 oraz 4). Jednakże w tej wersji szachownicy „dla czterech” sektor, który pozostaje w środku jest kształtu regularnej kwadratowej szachownicy (8×8) na której, jak zostało udowodnione wcześniej, istnieje ścieżka konika szachowego.

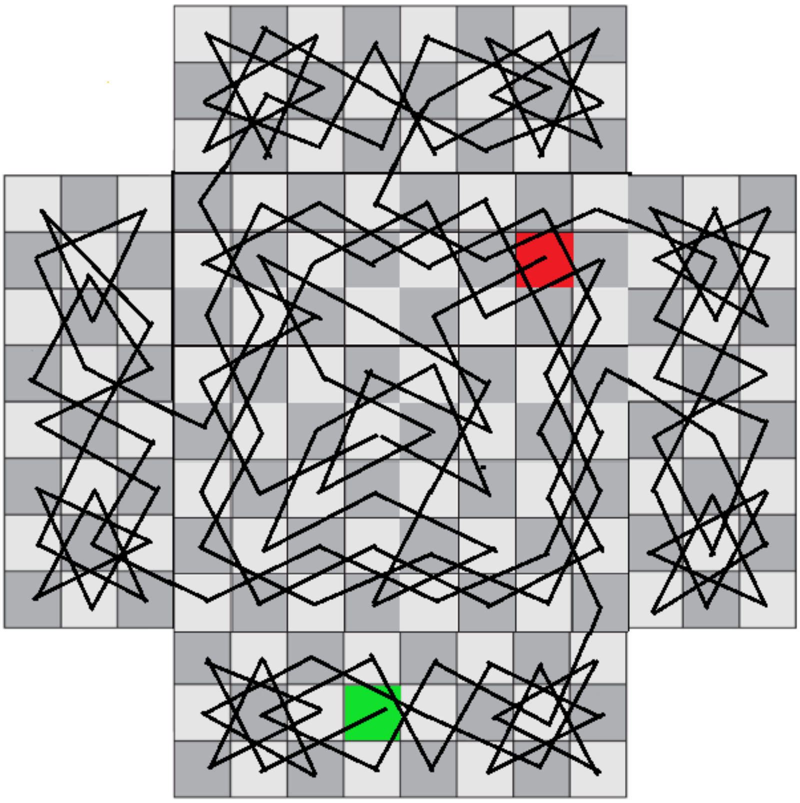
Zatem, wystarczające w tym przypadku jest znalezienie odpowiedniej ścieżki dla środkowego sektora oraz dla jednego z sektorów zewnętrznych.

Przykład ścieżki, która pasuje do tak stworzonego sektora został przedstawiony poniżej.



Rysunek 22. Otwarta ścieżka znaleziona dla sektora o wymiarach 3×8.

Aby znaleźć teraz ścieżkę dla całej szachownicy, należy połączyć rozwiązania z każdego sektora w jedną całość.



Rysunek 23. Przykład otwartej ścieżki dla szachownicy „dla czterech"

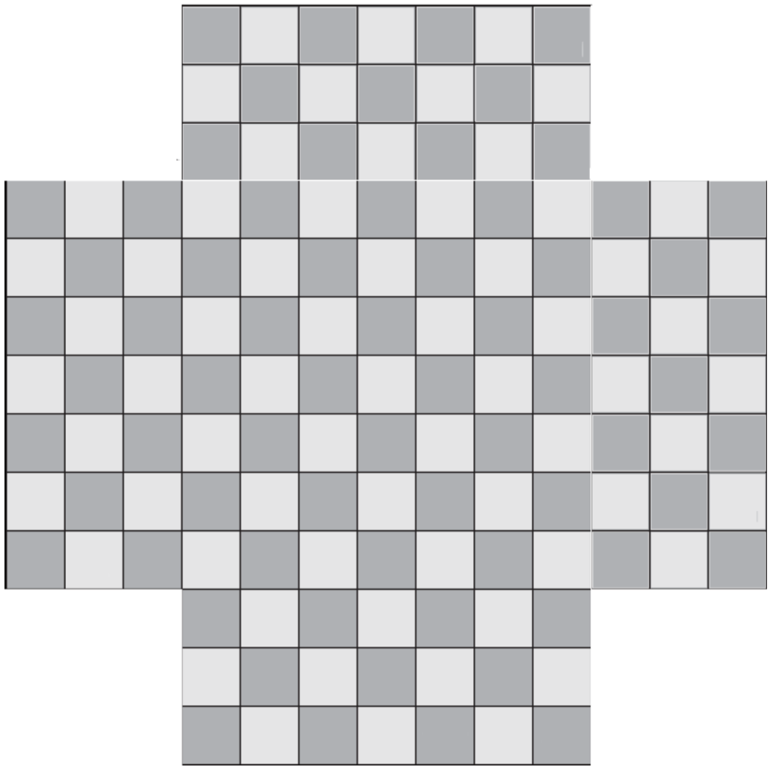
Na powyższym rysunku zielone pole na szachownicy odnosi się do początkowej pozycji konika, natomiast czerwonym kolorem zaznaczono końcową pozycję figury.

„Szachy dla czterech" z mniejszymi wymiarami

Podobnie, jak w przypadku „szachów dla trzech", w tej części pracy, brane pod uwagę będą mniejsze warianty szachownicy.

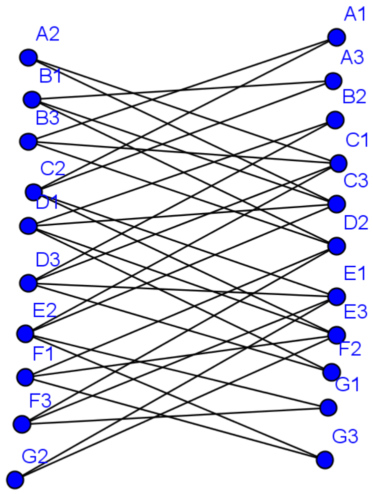
Szachownica „dla czterech" bazująca na kwadracie o wymiarach 7 × 7

Pierwszym przykładem będzie szachownica bazująca na kwadracie mniejszym o jedno pole przy każdym z boków. Przykład takiego modelu został podany poniżej.



<u>Rysunek 24.</u> Szachownica „dla czterech” bazująca na kwadracie o wymiarach 7 × 7

Jednakże, biorąc pod uwagę iż środkowy sektor szachownicy został we wcześniejszych częściach pracy pozytywnie rozpatrzony, co oznacza, że posiada ścieżki konika szachowego, rozwiązanie problemu skupiać się będzie na znalezieniu ścieżki dla mniejszych sektorów szachownicy.

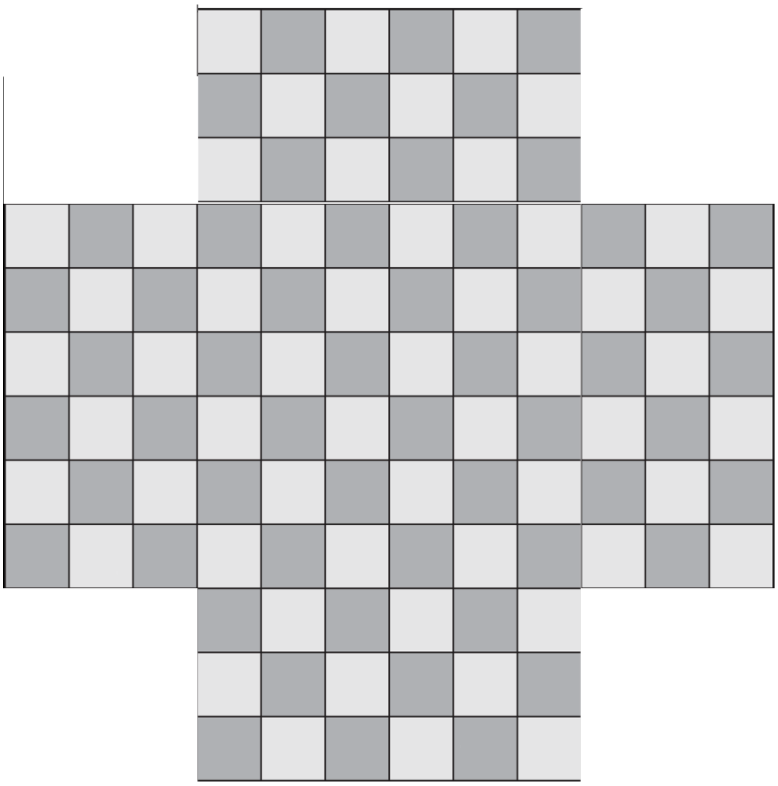


<u>Rysunek 25</u>. Graficznie przedstawiona próba znalezienia ścieżki dla sektora o wymiarach 3 × 7

Po tym jak sektor został rozpatrzony pozytywnie pod względem posiadania ścieżki konika szachowego, wiadomo, że problem posiada przynajmniej jedno rozwiązanie (ścieżka otwarta).

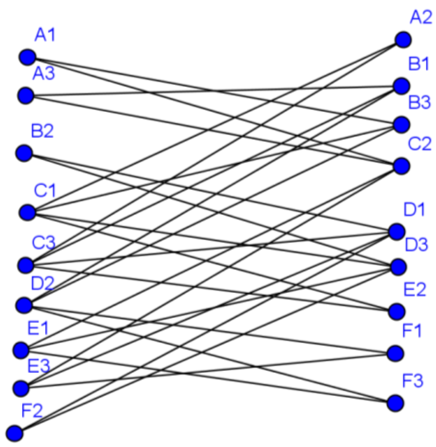
Szachownica „dla czterech” bazująca na kwadracie o wymiarach 6x6

Następnym przykładem jest szachownica, która bazuje na kwadracie zawierającym 6 pól przy każdym z boków. Przykład takie szachownicy został przedstawiony poniżej.



Rysunek 26. Szachownica „dla czterech” bazująca na kwadracie o boku 6

Podobnie jak w poprzednim przypadku rozważane będą tylko sektory zewnętrzne szachownicy jako że jej środkowa część została wcześniej pozytywnie rozpatrzona jako spełniająca wymogi problemu.

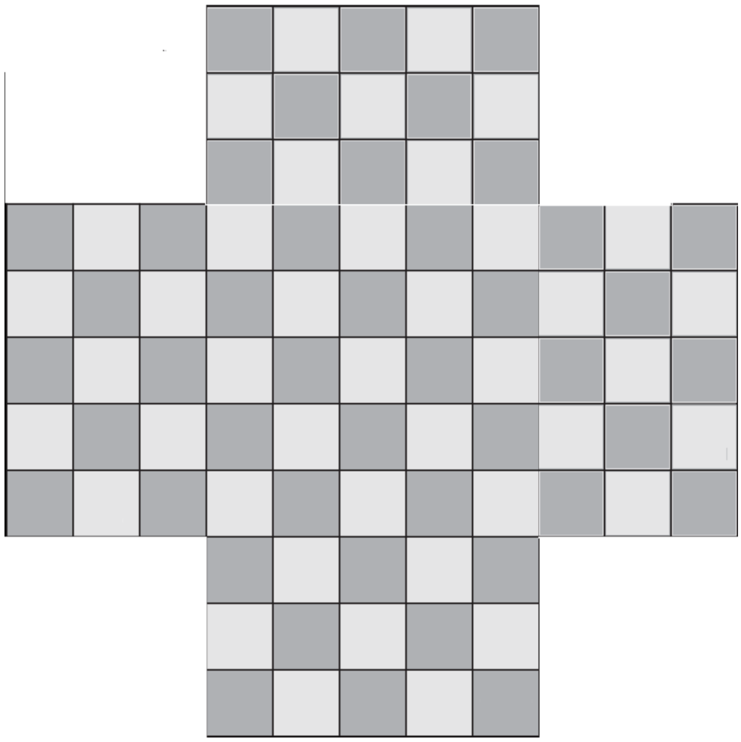


Rysunek 27. Skończona ścieżka dla sektora o wymiarach 3×6

Tak jak zostało to ukazane powyżej stworzenie ścieżki na takim sektorze jest możliwe, co znaczy, że ścieżka jest również możliwa do otrzymania dla całej szachownicy. Co więcej, stworzony sektor zawiera tyle samo białych jak i czarnych pól tworząc w ten sposób symetralny graf dwudzielny.

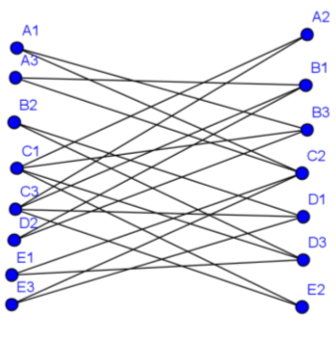
<u>Szachownica „dla czterech” bazująca na kwadracie o wymiarach</u> 5×5

Kolejnym i zarazem ostatnim przykładem jest szachownica bazująca na kwadracie posiadającym 5 pól przy każdym boku. Rozważanie mniejszych, tego typu szachownic mija się z celem jako środkowe sektory hipotetycznych, mniejszych szachownic zostały wcześniej negatywnie rozpatrzone (4×4, 3×3, 2×2, 1×1). Wygląd takiego modelu szachownicy został przedstawiony poniżej.



<u>Rysunek 28.</u> Szachownica „dla czterech” bazująca na kwadracie o wymiarach 5×5.

Kolejny raz, zarówno w tym przypadku rozważany będzie tylko mniejszy sektor stworzony przez ówczesny podział szachownicy na sektory.



<u>Rysunek 29.</u> Nieskończony graf binominalny przedstawiający sektor o wymiarach 3×5

Korzystając z powyższego rozwiązania sektora 3×5 znalezione zostaje rozwiązanie problemu na szachownicy dla czterech o wyżej wymienionych wymiarach.

W przypadku szachownic dla czterech bazujących na kwadratowym sektorze o mniejszych wymiarach niż 5×5, sposób dzielenia na sektory i wizualizacji za pomocą grafu dwudzielnego nie jest możliwy. Dzieje się tak ponieważ, jak zostało to przedstawione w początkowej sekcji pracy, szachownice o wymiarach 4×4 , 3×3, 2×2 oraz 1×1 nie posiadają rozwiązania problemu konika szachowego. Dlatego też wyżej wymienione szachownice dla czterech mogą być rozwiązane wyłącznie manualnie bez pomocy, przedstawionych wcześniej, sposobów.

Podsumowanie:

Podczas pracy zostały klarownie przedstawione sposoby, z którymi znajdowanie rozwiązania problemu konika szachowego staje się zarówno dużo prostsze, jak i bardziej przejrzyste. Podczas dzielenia szachownicy na mniejsze sektory oraz sprawdzania każdego z nich za pomocą grafu dwudzielnego trudniej o błąd, zakładając przy tym że wszystkie wierzchołki są rzetelnie opisane (czarne, białe pola). Jednak, przedstawiony w pracy sposób szukania rozwiązań dla problemu ma swoje ograniczenia, jak zostało to podkreślone podczas pracy, dlatego też może posłużyć do rozwiązań tylko poszczególnych przykładów (szachownic).

Bibliografia:

[1] http://www.egheflin.com/professional/KnightsTourWiki.htm, 25/10/2015

[2] http://www.chesscorner.com/tutorial/basic/knight/knight.htm, 26/10/2015

[3] Weisstein, Eric W, "Knight Graph." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/KnightGraph.html, 26/10/2015

[4] Yager N, 2012http://mathsexplorer.blogspot.com/2012/02/how-many-squares-on-chessboard.html, 29/10/2015

[5] http://mathonline.wikidot.com/knight-s-tour-problem, 29/10/2015

[6] Freeman D,2014, http://www.slideshare.net/DanFreeman1/chessboard-puzzles-part-3-knights-tour, 29/10/2015

[7] http://www.mastersgames.com/cat/board/chess-3-player.htm, 30/10/2015