

Szkoła Podstawowa Nr 32

Dądelki

Emilia Dądela



Opiekun pracy:

mgr Katarzyna Stachnik

Kraków, luty 2016

Wstęp

Jestem uczennicą klasy 5 szkoły podstawowej. 1 kwietnia jak zwykle w Prima Aprilis skończę 12 lat, bez żartu. Mam różne zainteresowania: polski, historia, matma. Nic jednak nie wchodzi mi chyba do głowy tak łatwo, jak matematyka. Więc nic dziwnego w tym, że postanowiłam wziąć udział w konkursie na pracę matematyczną. Było wiadome od początku, że się do niego zapiszę i raczej nic by mnie nie powstrzymało. No, może z wyjątkiem jakiegoś kataklizmu, ale już wiem, że statystycznie one się rzadko przydarzają.

Dwa miesiące temu moja nauczycielka matematyki zaproponowała mi napisanie pracy matematycznej na temat „Paradoksy matematyczne”. Gdy dowiedziałam się, że zostałam wybrana do konkursu, od razu się zgodziłam, założyłam, że nie powinno mi to sprawić kłopotów. A gdy usłyszałam o temacie pracy, wprost promieniałam ze szczęścia! Lubię paradoksy, są bardzo ciekawe, otaczają nas w świecie pełnym zagadek - tych do rozwiązania i tych, których logicznie nie potrafimy wyjaśnić, czyli właśnie paradoksów. Myślę, że gdybym miała możliwość wyboru – pisanie o tym temacie lub o czymś innym (np. o figurach geometrycznych) to i tak wybrałabym te paradoksy.

Swoją pracę postanowiłam zatytułować „Dądelki”, a dlaczego właśnie tak, zdradzę dopiero w pierwszym rozdziale, gdyż chcę wszystkich zachęcić do dalszego czytania.

Paradoksy to bardzo ciekawa część matematyki. Zwykle każde zadanie ma logiczne i obowiązkowe rozwiązanie. A w przypadku paradoksów zdarza się, że rozwiązania nie da się logicznie wytłumaczyć. Uważam natomiast, że ze wszystkich zebranych przypadków, najciekawsze są te paradoksy, z którymi spotykamy się na co dzień.

Swoją pracę rozpoczęłam od tropienia wszelkich zagadek matematycznych. Nie obyło się jednak bez pomocy rodziny. Od czegoś musiałam zacząć, a jednak nic nie przychodziło mi do głowy. Mama podsunęła mi „Achillesa i żółwia” i zaczęło się. Dalej sama sobie radziłam, szukałam w Internecie, czytałam opracowania o paradoksach i opisywałam je własnymi słowami, jak najlepiej umiałam. Oprócz tego korzystałam z ciekawostek, które

znam i wiem po prostu, że istnieją. Tak zaczęła się moja przygoda z paradoksami.

Podczas tej długiej pracy odkrywałam także, jak wiele z paradoksów kryje się w otaczającym nas świecie. Nie tylko matematycznych, czytałam również o fizycznych. Oczywiście tłem tej pracy jest cały czas matematyka, ale fizyczne zjawiska paradoksalne stanowiłyby również ciekawy temat do opisanie.

Postanowiłam przedstawić również trochę paradoksów życia codziennego oraz tych, które są po prostu niemożliwe (jak np. „Paradoks dziadka”). Te ostatnie należą do tzw. „paradoksów klasycznych” i z pewnością wiele osób zapytanych o podanie jakiegokolwiek przykładu wskazałoby przypadek „Achillesa i żółwia” lub „Paradoks trójkąta”. Jako najbardziej znane i popularne, musiały się również pojawić w moim opracowaniu.

I na końcu o tym, dlaczego te paradoksy są takie ważne. Przeczytałam, że są one bardzo często odpowiedzialne za duży postęp nauki. Dzieje się tak dlatego, że uczeni napotykając zjawisko paradoksalne na ogół muszą je po prostu zrozumieć i angażują w to wszelkie siły i możliwości. Często powstają przy tym nowe teorie naukowe.

Teraz zapraszam wszystkich na dokładne przejrzenie „Dądelek”. Wciągnijcie się w świat paradoksów, przeczytajcie o właściwościach i ciekawostkach, o których napisałam w tej pracy. Zapisane są w niej tylko te najbardziej mnie interesujące, te o których może wiecie mało i z pewnością moja prezentacja Was zaciekaWi.

Interesującego przeglądania☺

Spis treści

Wstęp	1
Spis treści.....	3
Dądelki?	4
Paradoks - co to jest?	4
Filozofowie.....	6
„Achilles i żółw”	7
„Strzała”	8
„Paradoks Epimenidesa (kłamcy)”	8
„Paradoks skazanego”	9
„Paradoks fryzjera”	10
„Paradoks Russella (ciotki)”	10
„Paradoks liczby 1”	11
„Paradoks urodzin”	12
„Samospełniające się proroctwo”	13
„Paradoks znikającej monety”	14
„Paradoks dziadka”	15
„Paradoks reguły i wyjątku”	15
„Paradoks z trójkątem”	16
„Wstęga Möbiusa”	17
„Paradoks różnych cen”	20
„Paradoks dodatkowej kostki czekolady”	25
Zakończenie	30
Bibliografia	31

Dądelki?

„Dądelki”- wszystkie wybrane przeze mnie paradoksy matematyczne i filozoficzne, złożone w pracę.

Dlaczego akurat Dądelki? Ostatnio pomyślałam:, że praca musi mieć jakiś intrygujący tytuł. „Paradoksy matematyczne” są za oczywiste. Dlaczego by nie Dądelki? Moja nauczycielka matematyki często mówi na mnie Dądelka, i to mnie zainspirowało. Idealna nazwa. Poniżej zamieszczam więc „Dądelki” - mój zbiór paradoksów.

Paradoksy matematyczne

Paradoks - co to jest?

1. Paradoks jest zdaniem, które prowadzi do logicznej sprzeczności lub sytuacji, która przeczy zdrowemu rozsądkowi. Rozpoznanie paradoksu, który oparty jest na (pozornie!) łatwych i mądrych pomysłach często prowadziło do znacznych postępów w nauce i filozofii.
2. Słowo „paradoks” wzięło się z greckiego „parádoksos”, co po Polsku znaczy „nieoczekiwany”, „nieprawdopodobny”.
3. W matematyce często pojawiają się pytania, których nie potrafimy zrozumieć i logicznie wytłumaczyć. Zjawisko to nazywamy aporią, co po grecku znaczy trudność.
4. Na aporie bardzo łatwo natknąć się w matematyce i stanowią podstawę jej rozwoju.

Gdy aporia zostanie rozwiązana, zostaje ona **sofizmatem lub paradoksem**, zależnie od strony, po której nastąpiło rozstrzygnięcie. Jeśli rozumowanie było poprawne, chociaż wynik wydawał się niedorzeczny i sprzeczny z intuicją, jest to paradoks. Jeśli rozumowanie zawierało w sobie błąd, znaczy to, że aporia

okazuje się sofizmatem. Prawdą jest, że tak błędne myślenie prowadzić może do tezy prawdziwej, zarówno jak fałszywej.

Jednym z przeróżnych rodzajów paradoksu jest **antynomia**. Antynomia (po grecku antinomos) po polsku znaczy „przeciw prawu”. Rodzaj ten przedstawia rozumowanie, które doprowadza jednocześnie do otrzymania dwóch przeciwstawnych stron. Prawda jednego zdania pociąga za sobą prawdziwość swojego zaprzeczenia i tak samo na odwrót.

Na kolejnych stronach tej pracy przedstawię wiele słynnych, jak i tych mało znanych paradoksów. Będą one zarówno matematyczne, jak i filozoficzne, zresztą na jedno wychodzi- filozofia jest pewną częścią matematyki.

Filozofowie

Na tej stronie opisuję filozofów, którzy wymyślili niektóre z paradoksów na kolejnych stronach, i dzięki temu paradoksy te są nazwane od ich imion.

Zenon z Elei

Zenon z Elei był greckim filozofem. Urodził się 490 lat p. n. e. i zmarł 430 lat p. n. e., żył więc jedynie 60 lat. Uczył się w szkole eleatów a Elei, skąd nazwa jego przydomku- Zenon z Elei. Doskonalił sztukę prowadzenia sporów, co uznawał za wykazywanie na swojej drodze zestawiania pojęć prawdy własnej i czyjegoś fałszu. W tamtych czasach takie zjawisko zwano dialektyką, a że przecież Zenon doskonalił wiedzę na jej temat, wiele źródeł mówi, że Zenon jest jej twórcą. Jego najpopularniejszymi paradoksami są „Achilles i żółw” oraz „Strzała”, które wyjaśnione są na kolejnych stronach.

Epimenides

Epimenides to grecki filozof z Krety. Z zawodu był także kapłanem i poetą. Urodził się w VI w. p. n. e., żył na przełomie VI a VII wieku, przeżył zaś aż 159 lat! Według legendy stało się tak, ponieważ w dzieciństwie Epimenides zasnął w jaskini, a gdy obudził się w niej 57 lat później, obdarzony był nadzwyczajną mądrością. Gdy spał, nie postarzał się za bardzo, więc miał 57 lat może jako nastolatek lub student. Epimenides został ostatnim z „siedmiu mędrców”, czyli grupy wybitnych działaczy i reformatorów, która działała w Grecji na przełomie VI i VII wieku.

Möbius

August Ferdinand Möbius był niemieckim matematykiem i astronomem. Narodził się 17 listopada 1790 r. w Schulpforte, a zmarł 26 września 1868r. w Lipsku. Jeden z twórców nowoczesnej geometrii algebraicznej. Znany z odkrycia funkcji Möbiusa i wstęgi Möbiusa, opisanej dalej w tej pracy.

Największą część tej pracy poświęcam przedstawieniu najciekawszych wyszukanych przeze mnie paradoksów, zarówno tych najbardziej znanych, jak również zwykłych sprzeczności i zagadek, które mogłyby być postrzegane w kategorii paradoksu. Nie brakuje także paradoksów życia codziennego. Oto one.

„Achilles i żółw”

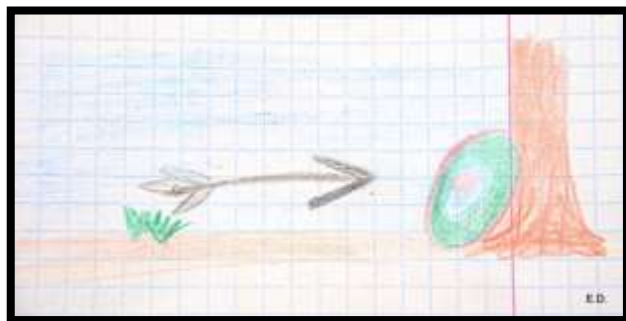


Achilles i żółw postanawiają zrobić wyścig na dowolny dystans. Wiadomo, że Achilles jest o wiele szybszy od żółwia, obliczyli nawet, że potrafi biegać od niego 2 razy szybciej, więc w tym wyścigu żółw nie miałby szans. Jednak jako że Achilles jest sprawiedliwy, postanawia że żółw oddali się od niego na starcie o $\frac{1}{2}$ całego dystansu do pokonania. Biegający szybko Achilles, jako biegnący od żółwia 2 razy prędej, dobiegnie do $\frac{1}{2}$ dystansu w chwili, kiedy jego kompan przedrepta do $\frac{3}{4}$ całej drogi. Kiedy Achilles dobiegnie do $\frac{3}{4}$ dystansu, żółw znów będzie dalej, ponieważ pokona $\frac{3}{4} + \frac{1}{8}$ wyścigu. Lecz kiedy Achilles dobiegnie w to miejsce, żółwia już tam nie będzie i tymczasem będzie stał $\frac{1}{16}$ dystansu dalej od niego, aż tak w nieskończoność. Wynika z tego, że w ten sposób Achilles zawsze może liczyć na porażkę, chociaż jest od żółwia aż 2 razy szybszy.

Żółw $1.1/2$ $2.1/4$ $3.1/8$ $4.1/16...$

Achilles $2.1/2$ $3.1/4$ $4.1/8...$

„Strzała”



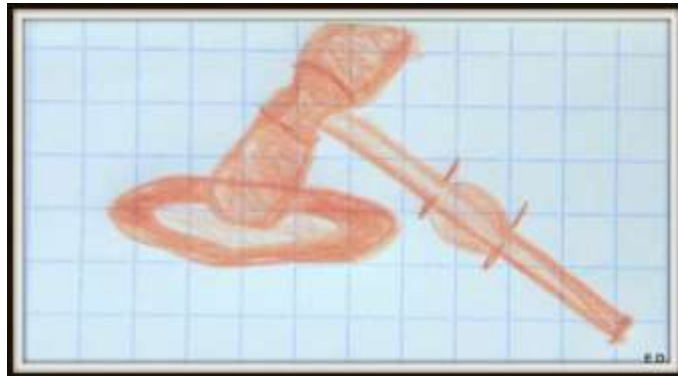
Wystrzelona z łuku strzała nigdy nie będzie mogła dolecieć do celu. Jest tak, ponieważ w każdej chwili teraźniejszej strzała nie rusza się, ale spoczywa, zabierając konkretne miejsce w naszej przestrzeni. Ponieważ czas stworzony jest z takich dokładnie chwil, kiedy strzała spoczywa, więc tak naprawdę strzała ciągle zajmuje określone miejsce i nie może lecieć do przodu.

„Paradoks Epimenidesa (kłamcy)”



Pewna osoba mówi: „ja zawsze kłamię”. Zadajmy więc sobie pytanie- czy ten człowiek jest kłamcą? Po chwili dojdziemy do wniosku, że nie może nim być, bo twierdząc „ja zawsze kłamię” mówi prawdę, czyli nie jest kłamcą. Czy więc ta osoba mówi prawdę? Tak jak w poprzednim pytaniu, można dojść do sprzeczności- skoro mówi prawdę, to znaczy, że faktycznie zawsze kłamię, więc nie może powiedzieć prawdy.

„Paradoks skazanego”



Znana jest następująca przypowieść. Trwa przesłuchanie. Sąd mówi do więźnia:

- Zostaniesz powieszony w następnym tygodniu, ale nie podamy Ci dokładnego dnia tego wydarzenia, więc egzekucja będzie dla ciebie zaskoczeniem.

Po krótkim namyśle skazany odpowiada, tłumacząc:

- Nie możecie w takim razie powiesić mnie w niedzielę, bo skoro mam być powieszony do ostatniego dnia następnego tygodnia, czyli niedzieli, w ten dzień w ogóle nie byłbym zaskoczony, że mnie wieszacie. Skoro w niedzielę nie możecie mnie powiesić, to należy popatrzeć na inne dni. Tuż przed nią jest sobota, ale w nią także nie moglibyście mnie powiesić, bo bez niedzieli jest to ostatni dzień tygodnia, tak więc wiedziałbym, co dla mnie szykujecie, i byłbym przygotowany. Przed sobotą jest piątek, ale wyłączając sobotę i niedzielę z powiedzianych wcześniej przyczyn, byłby to ostatni dzień w tygodniu. I w ten dzień nie możecie mnie ukatrupić, bo nie miałbym „niespodzianki” wiedząc, że jest to ostatni możliwy termin. Rozumując tak dalej- nie możecie mnie powiesić, bo egzekucja w żaden dzień nie sprawi mi zaskoczenia.

„Paradoks fryzjera”



W pewnej wiosce pracuje fryzjer, który zajmuje się goleniem mężczyzn. Wszyscy mężczyźni z miasteczka dzielą się na golących się samodzielnie i tych, którzy chodzą na zabieg do fryzjera. Wszyscy, którzy nie golą się sami, chodzą do fryzjera, ale ten nie goli tych, którzy golą się samodzielnie. Czy więc fryzjer goli się sam? Jeśli tak, to nie może golić się sam, ponieważ jest fryzjerem, który nie goli tych, którzy golą się sami. A jeśli nie goli się sam, to znaczy, że idzie do fryzjera i goli się sam!

„Paradoks Russella (ciotki)”

Oparty na tej samej podstawie co paradoks fryzjera.



Pewna ciotka twierdzi, iż: -lubi tych, którzy się nie lubią; -nie lubi tych, którzy się lubią. Czy ta ciocia lubi siebie? Jediną sensowną odpowiedzią jest: -Ciotka lubi się wtedy, gdy się nie lubi, a nie lubi się wtedy, gdy się lubi.

„Paradoks liczby 1”

$$0.999... = 1$$

Bardzo popularny paradoks związany z liczbą 1. A brzmi on następująco:

Ułamek dziesiętny nieskończony 0,9999.... równy jest 1!

To twierdzenie wydaje się bardzo nieprawdopodobne dla wielu ludzi. Jednak można matematycznie, w prosty sposób to udowodnić.. **Oto jeden z dowodów:**

$$x = 0,999...$$

dalej mnożymy przez 10 oczywiście obie strony równania:

$$10x = 9,999...$$

I odejmujemy jeszcze jednego x-a po obu stronach równania:

$$10x - x = 9,999... - 0,999...$$

Wynik:

$$9x = 9$$

A zatem ostatecznie:

$$x = 1$$

Błąd myślenia w tym paradoksie polegać może na przewidywaniu przez nas, że na końcu dziewiątek znajduje się „ostatnia dziewiątka”. A nie jest to jednak prawda. Paradoks ten związany jest też z pojęciem „nieskończoności”, które trudno jest nam zrozumieć.

I kolejny dowód matematyczny:

$$1/3 = 0,333...$$

$$3 \times 1/3 = 3 \times 0,333...$$

$$1 = 0,999...$$

A zatem twierdzenie jest najzupełniej prawdziwe!

„Paradoks urodzin”

Jeszcze jeden paradoks, który opiera się na tzw. rachunku prawdopodobieństwa. Przyjmujemy, że chodzimy do klasy, w której znajdują się 23 osoby. Pytanie brzmi: Jakie jest prawdopodobieństwo, że dwie osoby będą miały urodziny tego samego dnia?

Na pierwszy rzut oka każdy odpowie, że na pewno bardzo niskie, może nawet nieprawdopodobne jest, żeby tak się zdarzyło. Jednak prawdopodobieństwo, że dwie osoby świętowały urodziny tego samego dnia wynosi jednak aż 50,7 procent!



Ale jak to?

Wynika to oczywiście z matematyki. Liczy się to w sposób opisany poniżej.

Jeśli klasa liczyłaby 366 osób (czyli osób, tyle dni w roku plus 1) moglibyśmy być stuprocentowo pewni, że dwie osoby będą miały urodziny tego samego dnia (nawet gdyby każdy miał urodziny innego dnia w roku). Teraz liczymy prawdopodobieństwo, że 2 osoby nie będą miały urodzin tego samego dnia, wg następującego działania:

$$365/365 \times 364/365 = 99,72\%$$

W przypadku trzech osób jest to:

$$365/365 \times 364/365 \times 363/365 = 99,17\%$$

A w przypadku 23 osób:

$$365/365 \times 364/365 \times 363/365 \dots \times 344/365 \times 343/365 = 49,27\%$$

W rezultacie, jeśli prawdopodobieństwo, że dwie osoby z 23 nie będą miały urodzin tego samego dnia wynosi 49,3% to prawdopodobieństwo, że akurat będą miały urodziny tego samego dnia wynosi 50,7%

$$100\% - 49,3\% = 50,7\%.$$

Można powiedzieć, że intuicja w tym przypadku zawodzi, zaś z punktu widzenia statystyki i matematyki twierdzenie to jest całkowicie prawdziwe.

„Samospełniające się proroctwo”

Można uznać za paradoks.

Samospełniające się proroctwo to zjawisko, w którym określone oczekiwania w stosunku do pewnych zachowań lub też zdarzeń wpływają na te zachowania czy zdarzenia i powodują spełnienie oczekiwań.

Takie zjawisko występuje, gdy informacja o czymś, co ma się zdarzyć, pochodząca z pewnych i wiarygodnych źródeł, z tych źródeł jest przekazywana w taki sposób, że w końcu jest realizowana. Jest to zjawisko nieświadome i pojawia się w sposób mimowolny.

Najlepiej jednak zrozumieć ten paradoks można za pomocą przykładu. Podaję go więc dla wyjaśnienia:

*Rozeszła się plotka dotycząca pewnego banku, mówiąca o tym, że niedługo z powodu problemów finansowych ów bank upadnie. W wyniku rozchodzenia się tej plotki ludzie wpadają w tak zwany **owczy pęd**, poprzez który, wierząc w plotkę, zaczynają wyjmować i przestają wpłacać pieniądze na ten bank, co doprowadza do jego upadku. A przecież bank nie miał mimowolnego zamiaru utracenia wszystkich wielu z klientów i pieniędzy!*

„Paradoks znikającej monety”

Związana z nim historyjka¹: Późną nocą do taniego hoteliku przybywa trzech podróżnych. Każdy z nich ma w portfelu 10 koron. Decydują, że wezmą wspólnie jeden duży pokój, który kosztuje 30 koron za noc. Wszyscy składają się zatem po 10 koron, po czym idą do pokoju, prowadzeni przez boja hotelowego. W tym samym czasie recepcjonistka otrzymuje maila, że w tym dniu obowiązuje promocyjna oferta za noc w wysokości 25 koron za pokój. Uczciwa recepcjonistka odsyła 5 koron gościom za pomocą chłopca hotelowego. Chłopak mniej uczciwy zatrzymuje dla siebie 2 korony i zwraca każdemu z podróżnych po 1 koronie. W ten sposób chłopak zarobił 2 korony, a poszczególni goście zapłacili za pokój po 9 koron. Daje to w sumie dwadzieścia dziewięć koron. Zapłacili jednak początkowo 30 – gdzie zatem podziła się 1 korona?

$$3 \times 9 + 2 = 29$$



Przyglądając się sprawie bliżej, zobaczymy, że żadnych pieniędzy nie brakuje, tylko nasze rozumowanie jest nieco błędne. Prawidłowe obliczenia:

$$3 \times 10 \text{ zł} = 30 \text{ zł}$$

$$30 \text{ zł} - 25 \text{ zł} = 5 \text{ zł}$$

$$5 \text{ zł} - (3 \times 1 \text{ zł}) - 2 \text{ zł} = 0 \text{ zł}$$

$$3 \times 9 \text{ zł} - 2 \text{ zł} = 25 \text{ zł}$$

W kasie hotelu pozostało 25 koron, 3 korony wróciły do podróżnych, a 2 zarobił chłopak.

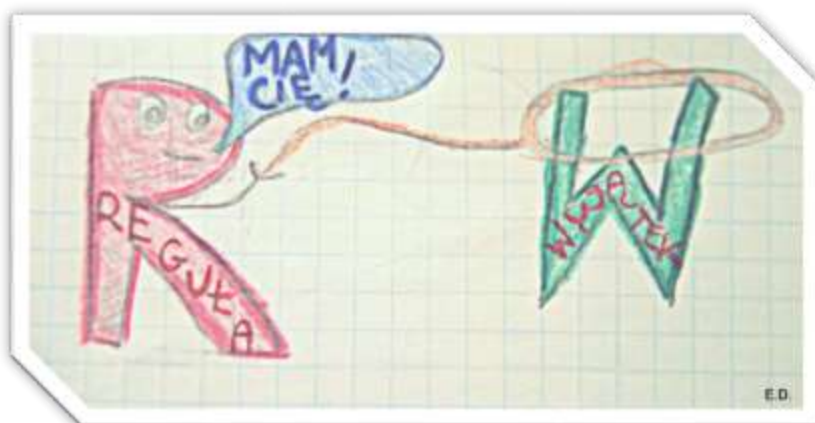
¹ Przytoczone za Johnem D. Barrowem „Jak wygrać na loterii?”

„Paradoks dziadka”



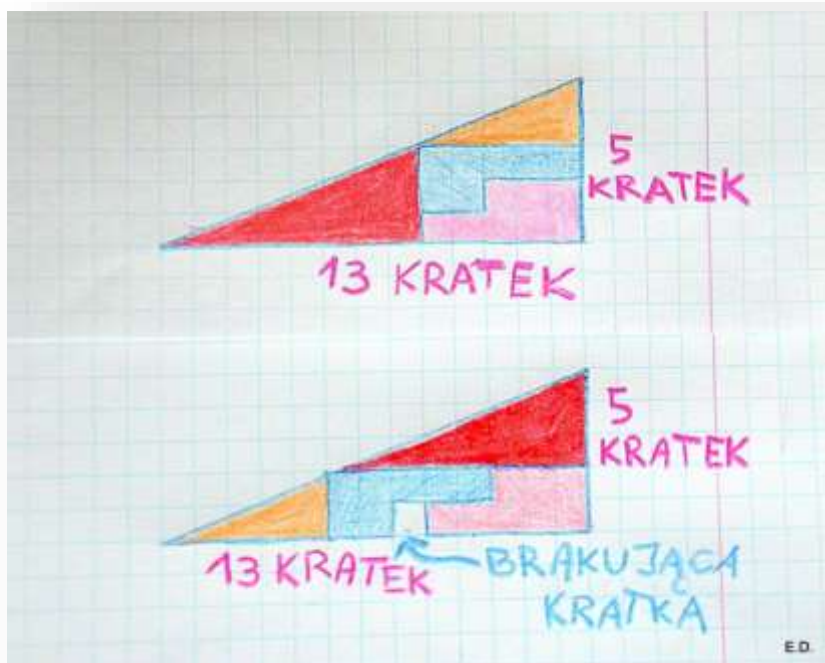
Jeśli cofnąłbyś się w czasie i zabiłbyś swojego dziadka, to nie urodziłbyś się, ponieważ nie było by twojej mamy bądź twojego taty na świecie i nie przyszedłbyś na świat także ty. Skoro byś nie żył, nie mógłbyś cofnąć się w czasie i zabić swojego dziadka, ponieważ nie byłoby cię na świecie. Ale ponieważ nie cofnąłbyś się w czasie przez to że byś nie żył, i nie zabiłbyś dziadka, mógłbyś się urodzić i wtedy cofnąłbyś się w czasie i wtedy zabiłbyś swego dziadka, itd....

„Paradoks reguły i wyjątku”



Czy to prawda, że każda reguła ma wyjątki? Oczywiście, że tak, zatem co jest wyjątkiem od reguły „każda reguła ma wyjątki”? To, że nie każda reguła musi mieć wyjątki! Ale czy nie przed chwilą twierdziliśmy, że każda reguła ma wyjątki?

„Paradoks z trójkątem”



Na rysunku powyżej są dwa trójkąty, na pierwszy rzut oka identyczne. Co więcej, wyglądają na trójkąty prostokątne o tej samej podstawie i wysokości. W pierwszym trójkącie znajdują się cztery figury geometryczne w pełni wypełniające go; drugi trójkąt zawiera te same części z rysunku pierwszego, ale zmieniło się ich ułożenie. Okazuje się, że teraz jeden kwadracik pola trójkąta pozostaje pusty.

Jak to możliwe? Przecież trójkąt jest taki sam, części także, zamieniliśmy tylko ich układ.

Najłatwiej wytłumaczyć to tak: żadna z dużych figur (mimo, że tak się może wydawać) nie jest trójkątem! Łatwo to policzyć, sumujemy:

Pole dużego trójką wg rys:1:

$$5 \times 3 (\text{pole prostokąta róż.-nieb.}) + \frac{1}{2} \times 5 \times 2 (\text{pole trójkąta pomarańcz.}) + \frac{1}{2} \times 8 \times 3 (\text{pole prostokąta czerw.}) = 15 + 5 + 12 = 32$$

A teraz szybkie wyliczenie pola wg wzoru na trójkąt: $\frac{1}{2} \times 13 \times 5 = 32,5!$

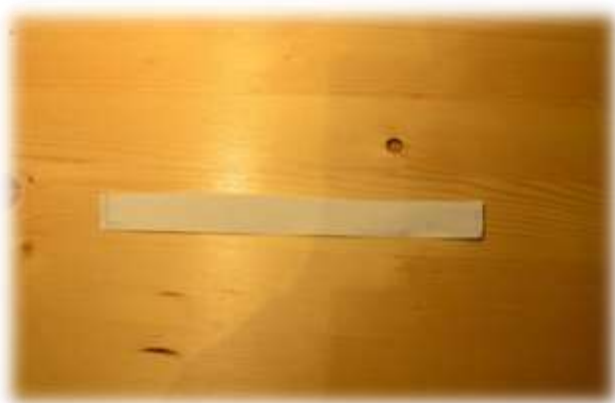
A zatem na rys. 1 nie ma trójkąta. Jest to czworokąt, a my ulegliśmy iluzji optycznej. To samo dotyczy figury na rys.2.

Jeśli dobrze się przypatrzymy, stwierdzimy, iż na pierwszym rysunku „przeciwprostokątna” jest lekko wklęsła, a na rys. 2 jest wypukła (zmienił się układ trójkątów wypełniających i zarazem ich kąty) –a więc tam się ukryła 1 brakująca kratka i jej pole!

„Wstęga Möbiusa”

Wstęga Möbiusa to odpowiednio skleiony okrąg, z którego powstaje 2 razy większy. Uznaje się ją za paradoks. Bez rysunków trudno wytłumaczyć o co w niej chodzi, dlatego poniżej zamieszczam zdjęcia wraz z wyjaśnieniami.

Jak ją zrobić?



Bierzemy niewielki pasek papieru i trzymamy go w dwóch dłoniach.

Odwracamy jedną stronę pasemka na drugą stronę.



Przykładamy obie końcówki paska na wprost do siebie i przyklejamy.

Na powstałej wstędze zaczynamy robić kreskę przez środek i nie odrywając ręki ciągniemy ją aż do momentu jej rozpoczęcia.



Tak wygląda po narysowaniu linii. To pierwszy paradoks (choć raczej ciekawostka) Wstęgi Mobiusa. Zostanie on jednak wyjaśniony na kolejnej stronie.

Związana z obecnym stanem Wstęgi ciekawostka:

Znaczek recyklingu został wymyślony na podstawie Wstęgi Mobiusa. Oznacza on nieskończoną przetwarzalność produktów:



Na kolejnej stronie dalsze etapy robienia Wstęgi:

Idąc po narysowanej wcześniej linii, za pomocą nożyczek zaczynamy ją rozcinać. Tniemy ją, aż do fragmentu, w którym zaczęliśmy.



I powstała kolejna ciekawostka: z krótkiej grubej wstęgi powstała długa cienka wstęga. Dokonaliśmy tego rozcinając jedynie odpowiednio ustawioną wstęgę(rys. 1,2 i 3). Nie da się logicznie wytłumaczyć, dlaczego tak się stało, zresztą dlatego właśnie jest paradoksem. Odpowiednio sklejona i przecięta na pół dała taką samą wstęgę, tylko większą i cieńszą.

O co w niej chodzi?

Po narysowaniu na Wstędze linii, idącej przez środek Wstęgi (rys. 4 i 5) na kolejnym obrazku dotyczącym jej wykonania zauważyć można było, że kreskę widać po obydwóch stronach Wstęgi. Logicznie mówiąc, obie strony Wstęgi to jedna strona. Chociaż zaczynaliśmy rysować tylko z jej jednej strony, to po zrobieniu całej kreski widać było ją po dwóch stronach. Gdyby przeciąć Wstęgę po namalowaniu linii, narysowana na Wstędze kreska byłaby widoczna z dwóch stron. Nie jest to jednak możliwe, bo przecież nie odrywaliśmy ręki od kartki i rysowaliśmy tylko jedną linię! Zatem Wstęga Mobiusa ma tylko jedną stronę. Dlatego jest to paradoks.

„Paradoks różnych cen”

Choć w zasadzie nie jest to paradoks, to wydaje mi się to tak niezwykle, że do tej kategorii powinno się zaliczać.

Chodzi mi o ceny produktów w różnych sklepach. Dlaczego dwie takie same rzeczy różnią się cenami? Skoro mamy do czynienia z identycznym produktem (ta sama ilość, ten sam skład, to samo opakowanie, ten sam producent), to dlaczego klient (czyli ja) spotyka się z bardzo różną ceną w dwóch różnych sklepach? Dlaczego klienci wiedząc, że ten sam produkt jest tańszy w innym sklepie, nie idą kupić go tam gdzie jest taniej? Jak duża musi być różnica w cenie, aby klient zrobił dodatkowy wysiłek? I ile ona wynosi w dwóch sklepach, które sprawdziłam?

Postanowiłam porównać ceny ze sklepów Rossmann i Auchan. Porównać, czyli obliczyć, ile zapłaciłabym więcej lub mniej w którymś z tych sklepów. W procentach, ułamkach i takich podobnych. Jak najdokładniej.

Pierwszym moim łupem okazała się herbatka Herbapol o smakach: malina, żurawina i aronia. Obydwa sklepy nie specjalizują się w herbatach, więc w jednym jak i w drugim herbata nie powinna być nadzwyczaj droższa ani tańsza. Spodziewałam się różnicy jedynie w groszach.

Drugim produktem, którego cenę postanowiłam sprawdzić, było mydło kremowe Dove o konsystencjach i zapachu: fresh (cytrusowe, orzeźwiające), normalne (czyli jakiś ładny zapach) i chyba waniliowe. Nieważne. Różne zapachy kosztowały tyle samo.

Trzecim produktem okazał się szampon od Garnier- Ultra Doux. Również w trzech smakach (czy raczej zapachach): olejek z awokado i masło karite, olejek arganowy i żurawina oraz siła pięciu roślin.

A czwarte postanowiłam porównać z ceną w Internecie. Skorzystałam ze Smyka i sklepu internetowego Allegro. Na cel obrałam maskotkę Furby Star Wars -jakąś najnowszą, w związku z filmem, który wszedł do kin. Nie, żebym je lubiła, są drogie i plastikowe, i nawet nie wiadomo po co one są. Ale zacznijmy już porównywać ceny- jak napisałam, pierwsza herbata.

Oto wyniki mojej obserwacji:

Sklep: Rossman	Sklep: Auchan
Cena: 6,99 PLN	Cena: 4,18 PLN
	

Wyliczenie różnicy cen herbat:

$$6,99\text{zł} - 4,18\text{zł} = 2,81\text{zł}$$

Różnica wynosi 2,81zł; co stanowi 40% ceny droższego produktu zgodnie z przeliczeniem:

$$2,81 : 6,99 = 0,4 \text{ (40\%)}$$

$$2,82 : 4,18 = 0,672 \text{ (67,2\%)}$$

Następne porównanie dotyczy mydeł Dove.

Sklep: Rossmann	Sklep: Auchan
Cena: 8,79 PLN	Cena: 9,98 PLN
	

Wyliczenie różnicy cen mydeł:

$$9,98\text{zł} - 8,79\text{zł} = 1,19\text{zł}$$

Różnica cen mydeł wynosi 1,19zł; co daje 12% w przeliczeniu na droższy produkt:

$$1,19 : 9,98 = 0,12 \text{ (12\%)}$$

$$1,19 : 8,79 = 0,14 \text{ (14\%)}$$

Szampony:

Sklep: Rossmann	Sklep: Auchan
Cena: 9,99 PLN	Cena: 9,84 PLN
	

Wyliczenie różnicy cen szamponów:

$$9,99\text{zł} - 9,84\text{zł} = 0,15\text{zł}$$

Różnica cen szamponów równa się 0,15zł; ta suma wynosi 1,5% w przeliczeniu na droższą cenę:

$$0,15 : 9,99 = 0,015 \text{ (1,5\%)}$$

$$0,15 : 9,84 = 0,0152 \text{ (ponad 1,5\%)}$$

Trzeba przyznać, że niektóre produkty różniły się ceną o bardzo dużo procent, ale są też takie, które mają różnicę jedynie w groszach. Teraz zdjęcia zabawki „Furby” Star Wars ze Smyka i sklepu internetowego Allegro, w którym można znaleźć i kupić rzeczy używane i nowe... Ja znalazłam „Furby” najtańsze, nierozpakowywane, nieużywane i nawet (mam nadzieję) nie wyjmowane z pudełka. Oto szokujące wyniki moich porównań:

Sklep: Smyk	Sklep: Allegro
Cena: 399,00 PLN	Cena: 299,00 PLN (314,00 PLN z przesyłką kurierską)
	

Wyliczenie różnicy cen Furby Star Wars z założeniem, że osoba kupująca NIE ZAMAWIA przesyłki kurierskiej:

$$399\text{zł} - 299\text{zł} = 100\text{zł}$$

Różnica cen Furby wynosi 100zł; jest to 25% w przeliczeniu na droższą cenę w poniższym działaniu:

$$100,00 : 399,00 = 0,25 \text{ (25\%)}$$

$$100,00 : 299,00 = 0,33 \text{ (33\%)}$$

Wyliczenie różnicy cen Furby Star Wars z założeniem, że osoba kupująca ZAMAWIA przesyłkę kurierską:

$$399\text{zł} - 314\text{zł} = 85\text{zł}$$

Różnica cen Furby to aż 85zł; w przeliczeniu na droższą cenę tego plastiku jest to 21%:

$$85,00 : 399,00 = 0,21 \text{ (21\%)}$$

$$85,00 : 314,00 = 0,27 \text{ (27\%)}$$

Wniosek:

Zakładając, że każdy racjonalnie myślący klient będzie chciał kupić dany produkt po najniższej cenie, to zastanawiające jest, że „droższy sklep” jest w stanie w ogóle sprzedawać ten produkt. Stąd logicznym wnioskiem może być założenie, że klienci nie zawsze są poinformowani o cenach w różnych sklepach i często nieświadomie kupują produkty po wyższych cenach. Gdyby bowiem wiedzieli, że np. ta sama herbata w odległości 50 m kosztuje 40% taniej, to pewnie by jej nie zakupili w tym droższym sklepie. Ale klienci mogą także robić droższe zakupy świadomie z powodu np.: wygody (nie chce im się iść po 1 produkt dalej), straty czasu (w przypadku zakupu przez Internet czekając na swoją przesyłkę), traktowania różnicy w cenie jako nieistotnej (jeśli nie mają ograniczeń finansowych), lub z powodu konieczności – np. zakup wody na plaży jest kilkukrotnie droższy niż w markecie. Stąd na rynku mogą istnieć sklepy oferujące te same produkty różniące się cenowo w sposób istotny.

„Paradoks dodatkowej kostki czekolady”

Ten paradoks ma bardzo ciekawe zastosowanie, i gdy się o nim dowiedziałam, od razu postanowiłam je przetestować. W tym paradoksie chodzi o to, aby manewrując dobrze uciętymi kawałkami czekolady ustawić je w sposób, by tworzyły całą tabliczkę czekolady, a równocześnie mieć dla siebie jej kostkę. Naszą kostkę, która nie będzie wchodzić w skład złożonej czekolady trzeba odciąć gdzieś w połowie czasu wykonywania tego doświadczenia i proszę- już można cieszyć się tą oszczędnością i przyjemnością z jedzenia. Ten paradoks może także wywołać podziw wśród znajomych, którzy będą zachwyceni trikiem. Przejdźmy więc do tworzenia tej niezwyklej iluzji.

Potrzebne będą:

-czekolada o wymiarach 4x6

-linijka (najlepiej twarda, nie taka która jest elastyczna)

-ostry nóż

-deska do krojenia

Jak ją zrobić?

Na początek pokazuję czekoladę, której zdjęcia będą na kilku kolejnych stronach. Nie ważne oczywiście, jaka jest - nadziewana, smakowa czy taka jak na fotografii obok.



Najważniejsze, żeby tabliczka miała wymiary 4x6 kostek. Tylko w takim układzie paradoks może się udać.

Teraz bierzemy nóż i przykładając linijkę, tnijemy czekoladę w poprzek 3 rzędu.





Na zdjęciu obok to, co powstało z przecięcia nożem.

Następnie z większego kawałka przekrojonej tabliczki odcinamy najdłuższy rzęd.



A od jego końca odcinamy 1 kostkę. Jest to ta kostka, która po przełożeniu paru części czekolady nie będzie już wchodziła w jej całość.

Oto co powstało dotychczas z naszej czekolady. Teraz należy przekładać parę elementów. Zobaczmy zatem jak!





Naszą kostkę do zjedzenia odkładamy na bok. Obydwa fragmenty z części czekolady-ten na górze, nieruszany oraz ten, od którego odcinaliśmy kostkę, zamieniamy stronami-ten z ułamaną kostką kładziemy na górze, a ten

drugi na dole. Nie wolno ich obracać- muszą być w tej samej pozycji. Ułożenie po wykonaniu powyższych poleceń musi być takie, jakie przedstawia zdjęcie na górze.

Tak kończy się ten paradoks. Co wyszło? Tabliczka jest cała (jeśli nie liczyć widocznych dobrze cięć nożem), a kostka okazała się dodatkowa, więc „nic nie zjedliśmy, nic nie dotykaliśmy”. Lecz dlaczego tak się stało? Czy jest jakieś wyliczenie matematyczne wyjaśniające tę sztuczkę?



O co w tym chodzi?

Cała zagadka tkwi w długości czekolady przed i po. Jak zmierzyłam, początkowa długość mojej czekolady wynosiła 15,5cm, ale po przełożeniu kostek i utworzeniu nowej tabliczki długość mej czekolady wynosiła zaledwie 14,5cm. Jak łatwo obliczyć, zabrakło 1cm:

$$15,5\text{cm}-14,5\text{cm}=1\text{cm}$$

Skoro długość 1 kostki wynosi zaledwie 1cm, to czekolada powinna mieć chyba 6cm, a nie 15,5cm, prawda?(6cm bo 6 kostek). Obliczmy najpierw różnicę długości czekolady i wszystkich kostek razem:

$$15,5\text{cm}-6\text{cm}=9,5\text{cm}$$

Na to nie ma już odpowiedzi, aczkolwiek najprawdopodobniej 9,5 cm to suma wszystkich dziur między kostkami.

Każdy zapewne myśli też nad inna koncepcją: że przecież 15,5 można podzielić na 6 i wtedy wyjdzie ponad 2. Jednak ustaliliśmy, że 1 kostka ma długość 1 cm.

W zasadzie jest to bardziej złudzenie optyczne, bo wydaje się, że czekolada jest taka sama jak wcześniej, ale do kategorii paradoksów się nadaje. Można to nazwać paradoksem optycznym.

Zakończenie

Koniec końców, jestem bardzo zadowolona z napisania tej pracy. Czuję radość ze zrobienia czegoś trudnego i wymagającego. Choć trzeba przyznać, że już trochę wątpiałam w jej zakończenie, chciałam, żeby było dużo przykładów, żeby była składna i ładna. Ale jest już gotowa i nie ma się czym martwić. A przy tym czuję dużą satysfakcję 😊.

Były poszukiwania! Znalezione tropy, dokumentowanie wszystkich paradoksów-skarbów. Podczas przeglądania Internetu, książek, pamięci i wszystkiego, czego się tylko da w poszukiwaniach przykładów, zdałam sobie sprawę, z jak wieloma paradoksami spotykamy się na co dzień. Przykładem jest ten o cenach, bo przecież każdy, co najmniej raz w tygodniu chodzi do sklepu, i wtedy co? Znajduje miliony paradoksów na półkach! Oczywiście nie zawsze musi być różnica w cenach tych wszystkich produktów, ale często jakaś tam jest, mała czy duża. Rzadko kiedy są to pełne złotówki, zazwyczaj tylko grosze. Przygodą było jednak dla mnie tropienie ich „na żywo” (między regałami sklepowymi). Tak samo paradoks urodzin - akurat tak się składa, że 3 osoby z mojej klasy mają urodziny w tym samym dniu, a ja już teraz wiem, że zadziałała w tej sytuacji jakaś statystyka. Czasem zdarzają się jednak takie przypadki, liczę nawet na to, że kiedyś spotkam osobę urodzoną w tym samym dniu co ja. Moja Mama urodziła się dokładnie w tym samym dniu (i roku) co David Beckham, ale jeszcze się niestety nie spotkali osobiście, choć pewnie ona na to liczy 😊.

Pisząc tę pracę, na pewno wiele się nauczyłam, zarówno o paradoksach, jak i samej matematyce. Zapoznałam się z prowadzonymi w Internecie blogami wielu ciekawych osób, dla których matematyka jest wielką pasją. Być może ta wiedza i te odkrycia przydadzą mi się kiedyś w przyszłym życiu. A i teraz będę mogła bez problemu wytłumaczyć komuś jakiś paradoks np. „ja zawsze kłamię”. Kto wie.

Mam nadzieję, że przez ten krótki czas każdy, tak samo jak ja, nauczył się czegoś nowego, bo właśnie po to jest ta praca.

Bibliografia

1. John Barrow, „Jak wygrać na loterii?”
2. <http://www.math.edu.pl>
3. <http://www.matematyka.wroc.pl>
4. <http://deser.gazeta.pl>
5. <http://www.paranormalne.pl>
6. <http://joemonster.org>
7. <https://pl.wikipedia.org>
8. <https://www.youtube.com>