



ŚWIAT PONAD WYBROAŻNIĄ-czyli  
wyższe wymiary przestrzenne.

# Ilu wymiarowy jest ten obiekt?





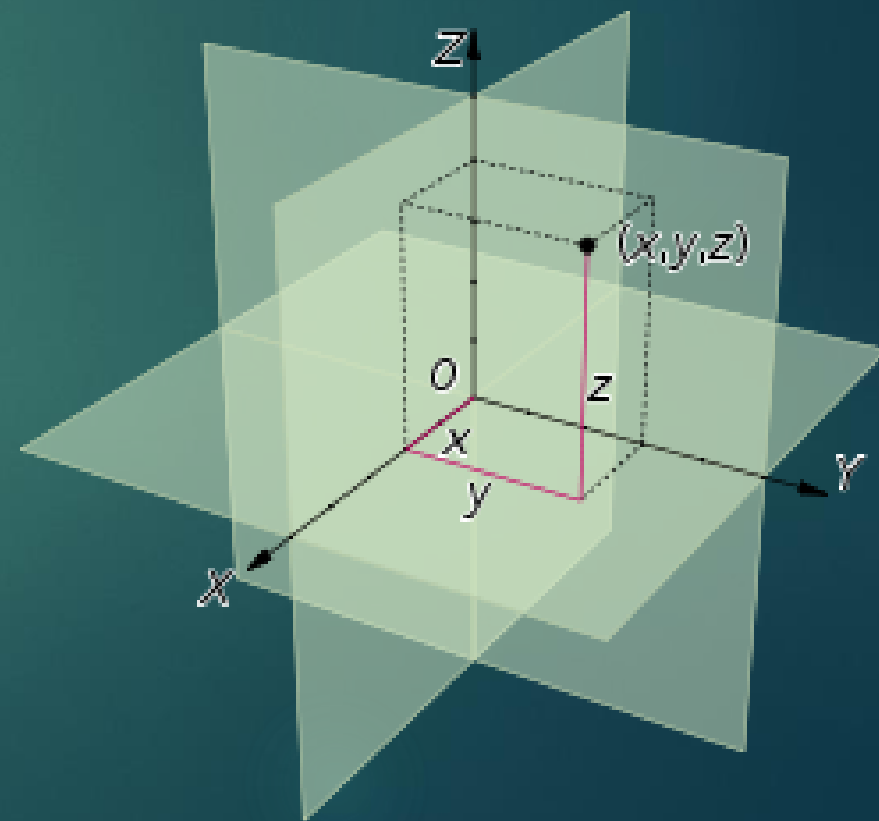
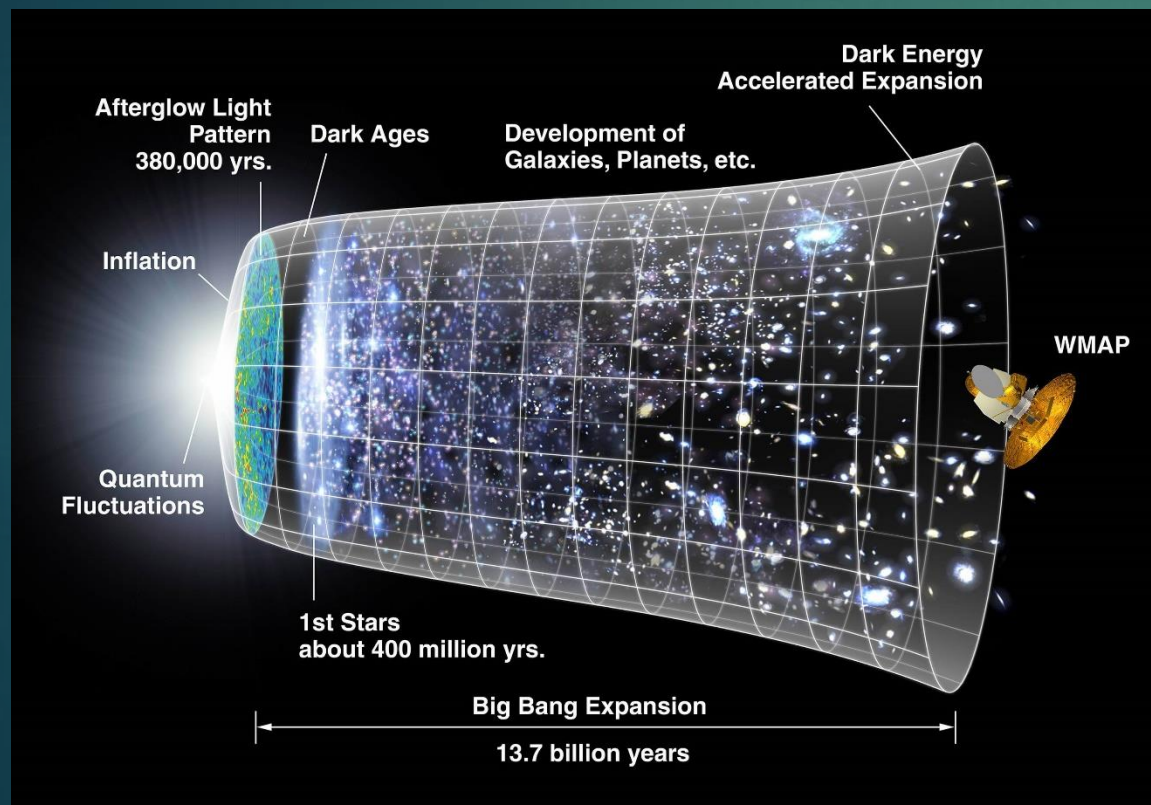
# Rzeczywistość

Najlepiej popatrzeć pod całkiem innym kątem, aby dostrzec pełnię trzeciego wymiaru



# Tylko przestrzeń

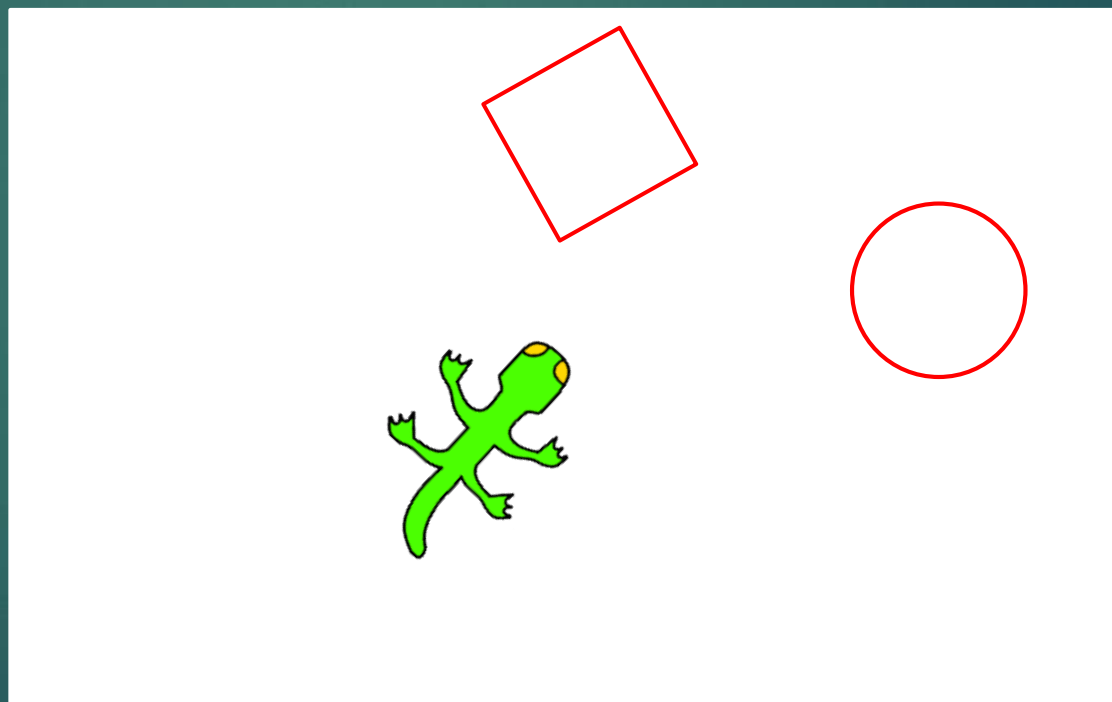
Według Einsteina czwartym wymiarem jest czas (tzw. czasoprzestrzeń), jednak my skupiamy się na wymiarach przestrzennych tutaj Euklidesowych.



# Od drugiego wymiaru

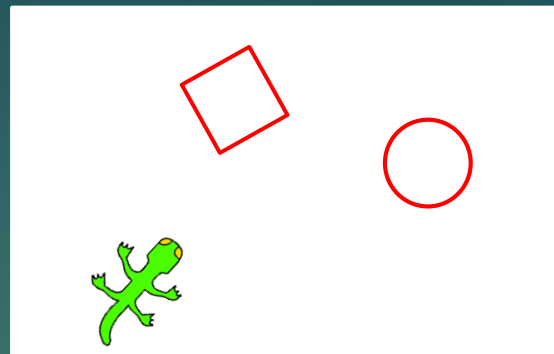


Mamy tutaj przykładową istotę żyjącą w 2D, dla ułatwienia nazwiemy ją płaszczakiem



Tak mogłoby wyglądać jej przykładowe otoczenie.

# Świat jego oczami



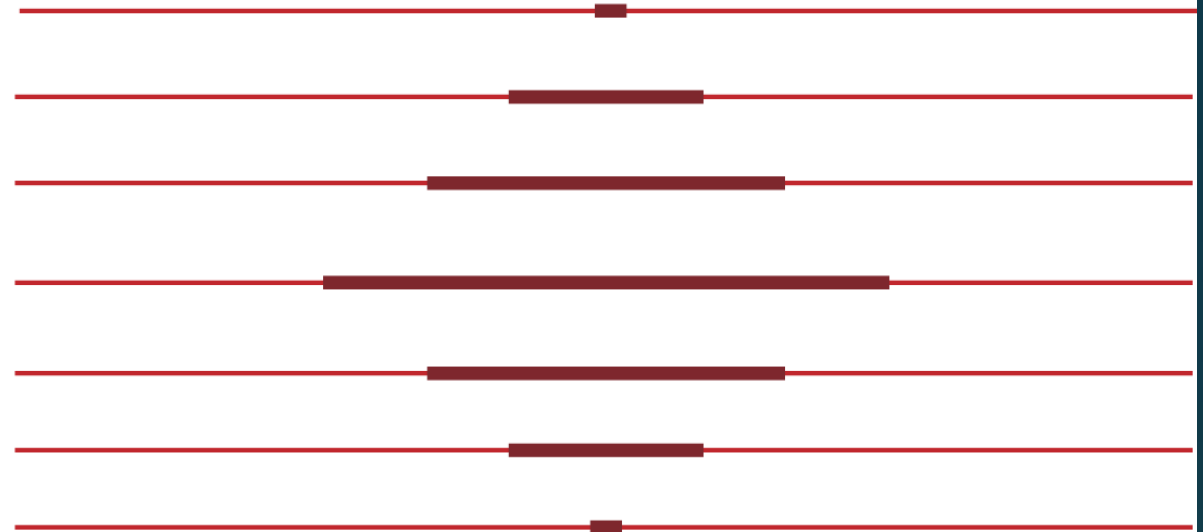
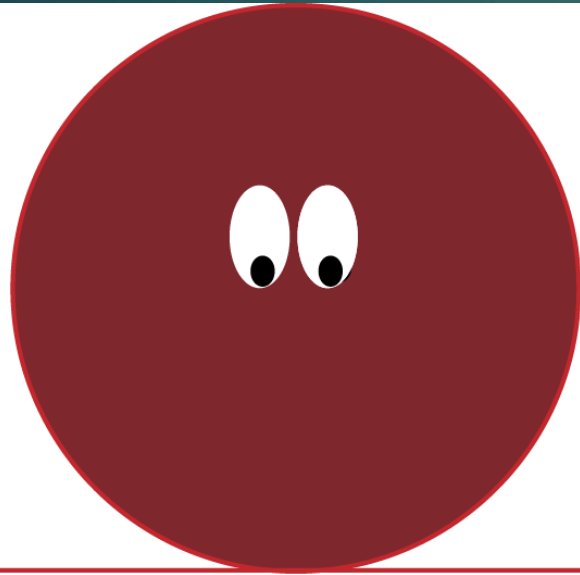
Pierwszy punkt widzenia

Drugi punkt widzenia

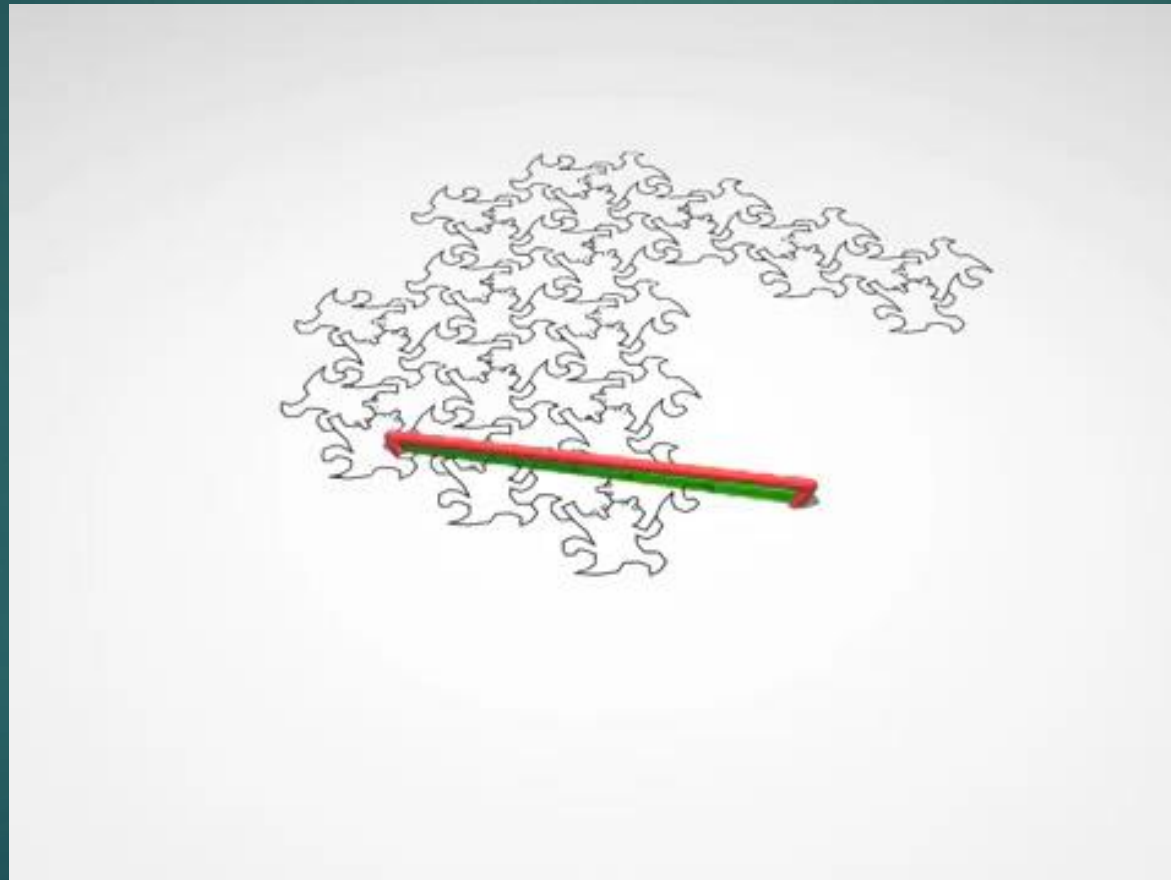
Ze światłem

Tak nasz płaszczak interpretowałby świat i odróżniał kształty

# Jak więc pokazać płaszcza- kom figury w 3D?



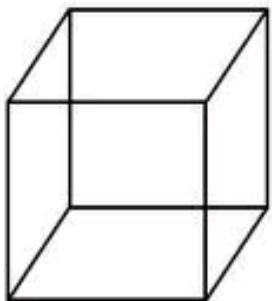
Zobaczmy więc kawałek filmu  
przedstawiający podobne przekroje





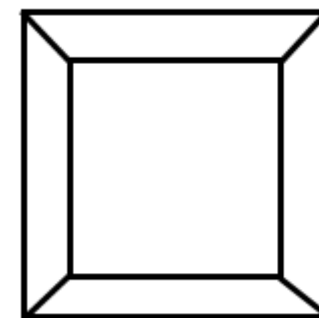
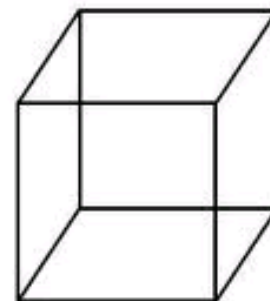
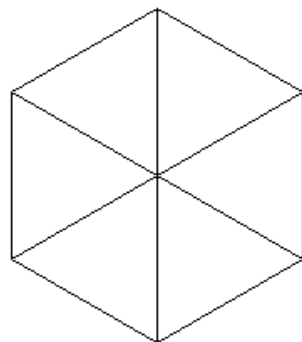
# II sposób przedstawienia

Możemy również pokazać im cień bryły

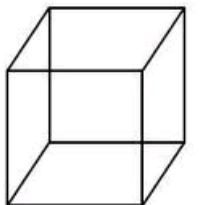
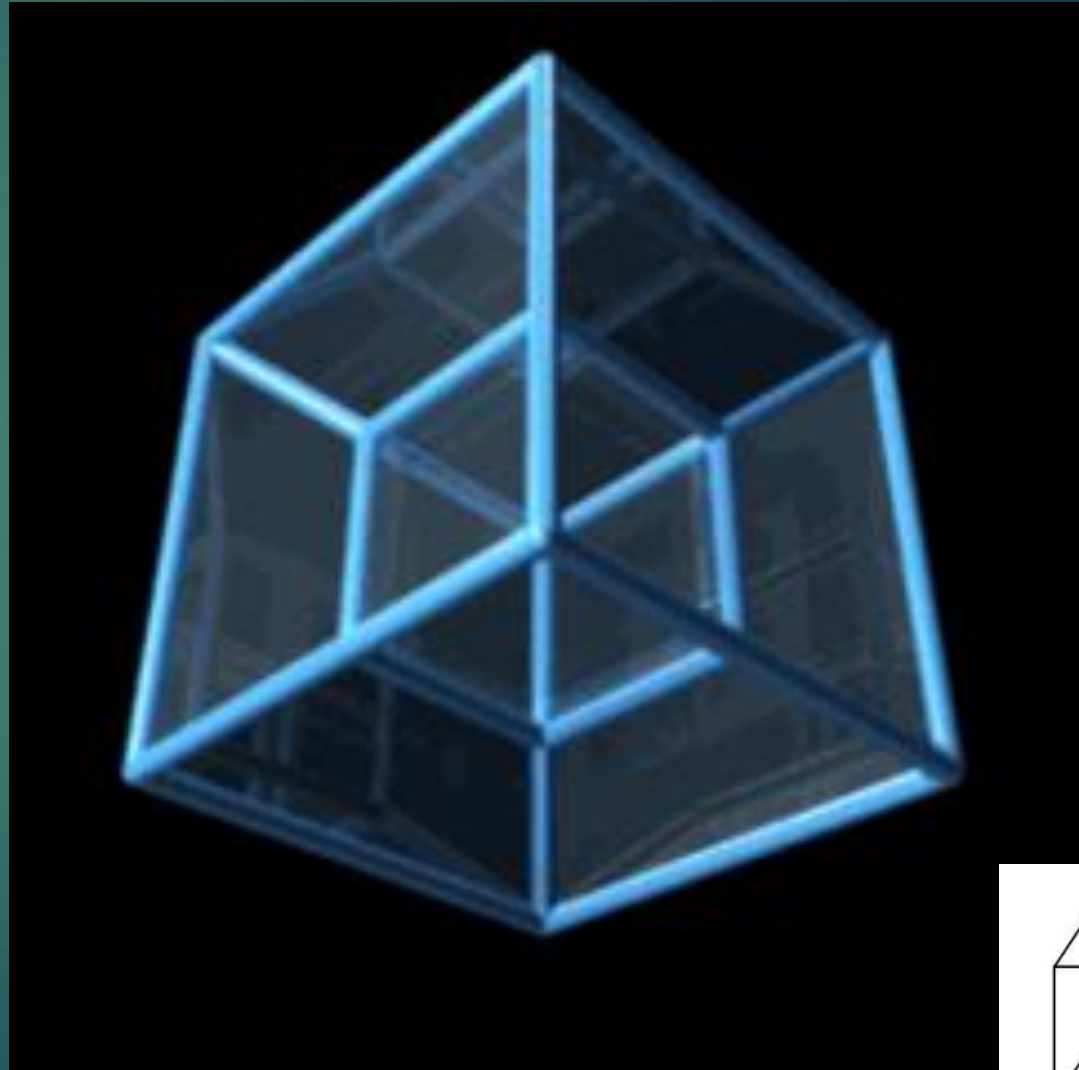
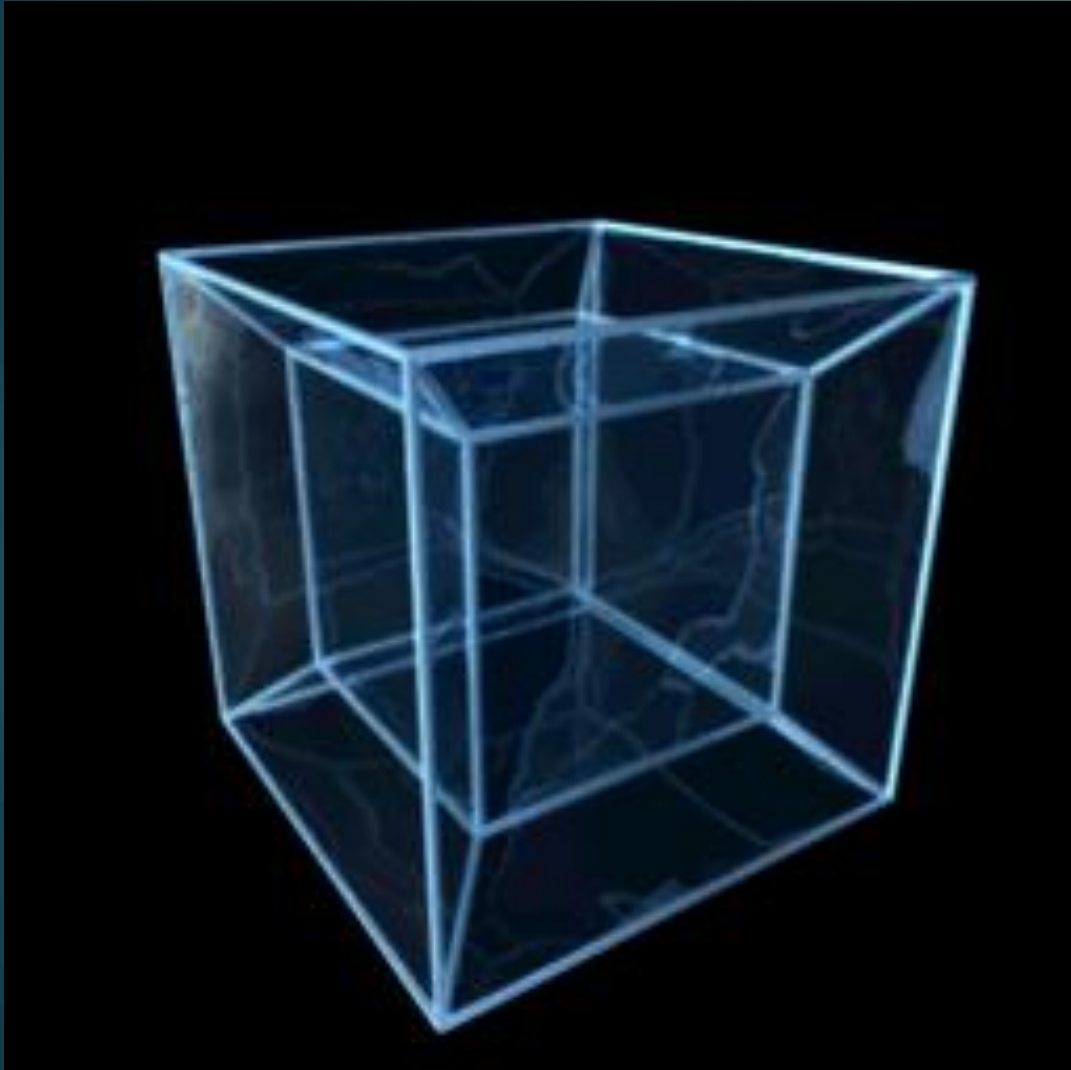


I choć nam wydaje się  
to jasne pamiętajmy  
że one widzą tylko  
linie

A tak ukazał by się cień  
obracającego się przezroczystego  
sześciangu w ich świecie (nie  
mówiąc już że by musiały go  
obejść, by go dobrze dostrzec  
gdyż widzą tylko linie)



# Wgląd w czwarty wymiar



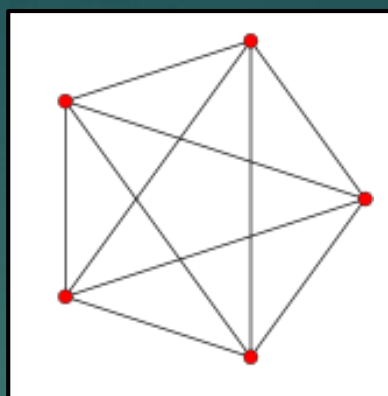
# Figury 4-wymiarowe foremne

- Pentahedroid (5-komórkowiec)
- Tesseract (8-komórkowiec)
- Hexadecahedroid (16-komórkowiec)
- Polyoctahedron (24-komórkowiec)
- Hecatonicosahedroid (120-komórkowiec)
- Hexacosidedroid (600-komórkowiec)

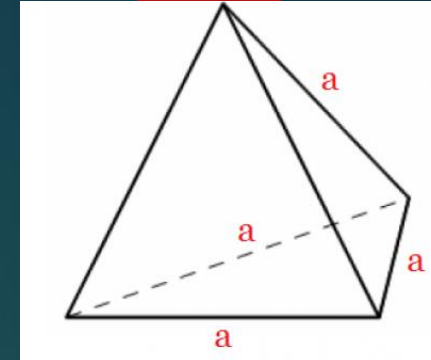
Ludwig Schläfli (1814 -1895)- Szwajcarski matematyk, był głównym twórcą koncepcji wyższych wymiarów. Odkrył te figury opierając się na kolejnej współrzędnej, stworzył wiele grafów, symboli, itp. Ułatwiają one operacje na tym wymiarze.



Metoda 1.



Metoda 3.

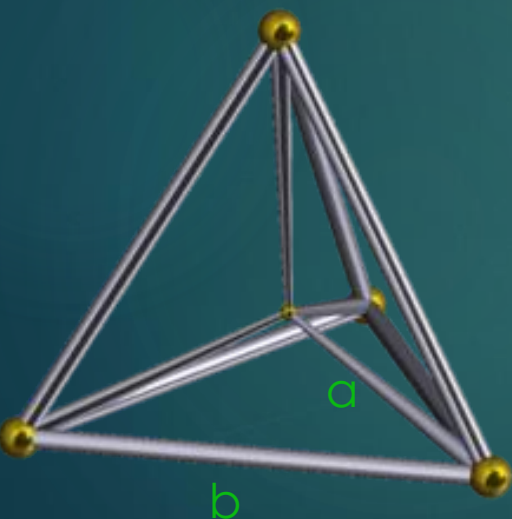


Krawędzie

o długości  $a$

Wydają się  
różne od siebie,  
Gdyż jest to  
tylko rzut.

Metoda 2.



Aby przedstawić czwarty wymiar wykorzystujemy kilka sposobów:

**1.** Najprawdopodobniej najlepsza metoda: została ona pokazana wcześniej. Pokazujemy 3-wymiarowy rzut, a wymiar kolejny jest w tym przypadku ruchem w czasie z widoczną deformacją tejże bryły.

**2.** metoda polega na przedstawieniu bryły 3D na płaszczyźnie wykorzystując rzut równoległy na płaszczyznę. Tak samo możemy przedstawić bryły 4D rzutując je na przestrzeń 3D (odcinki tracą swoją oryginalną długość)

**3.** Podobnie jak w metodzie **2**, ale robimy to w 2D.

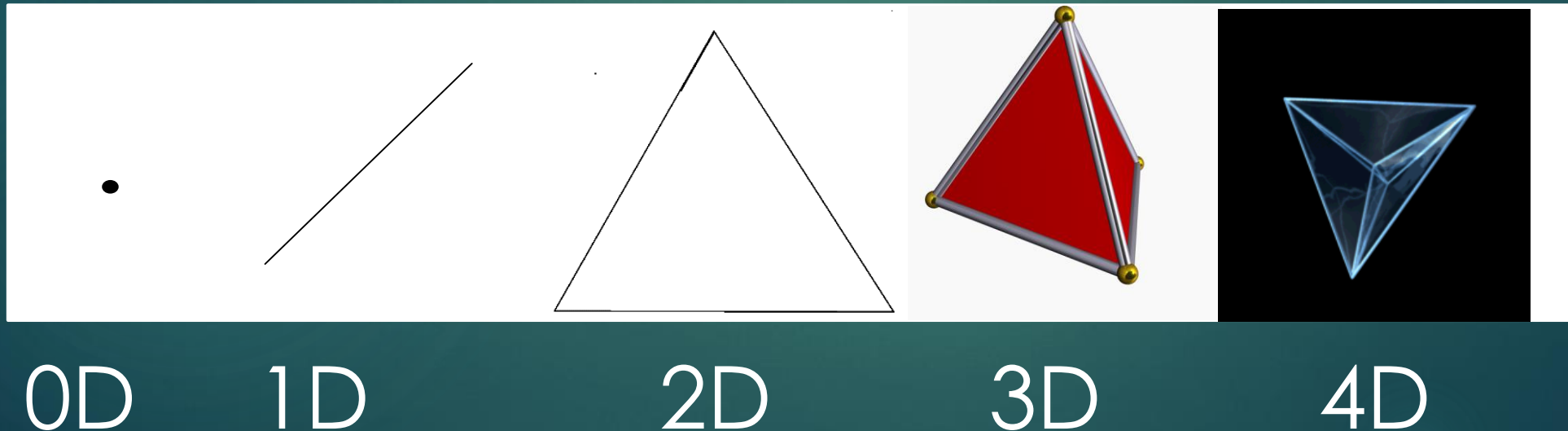
**W każdej z metod 4-wymiar jest swoistą deformacją, bo nigdy nie stykamy się z takimi obiektami.**



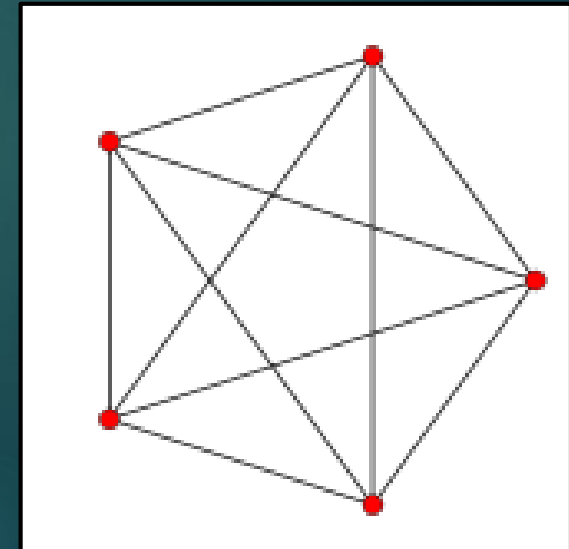
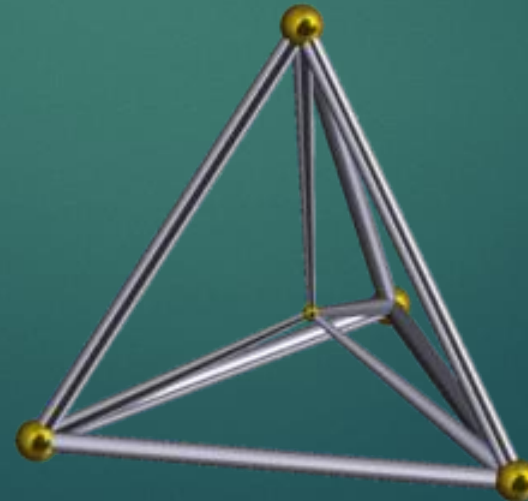
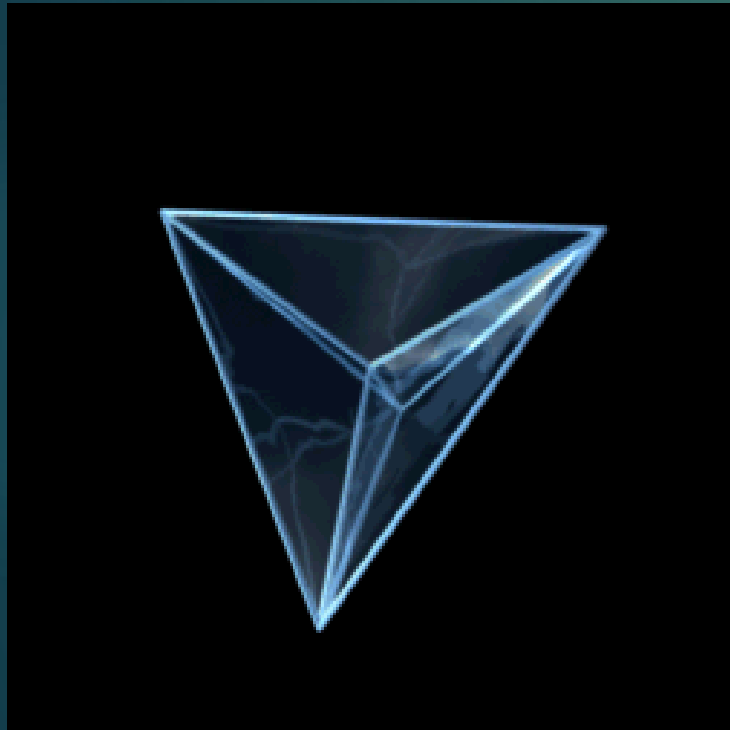
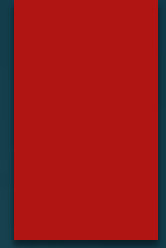
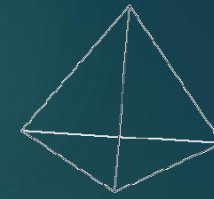
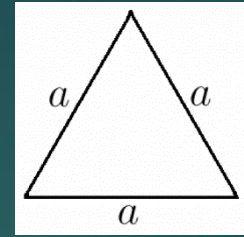
# Sympleks

- ▶  $n$ -wymiarowy sympleks nazywamy  $n$ -wymiarowym wielościanem o  $n+1$  wierzchołkach, który jest wypukłą otoczką.

Przykłady:



# Pentahedroid(5)

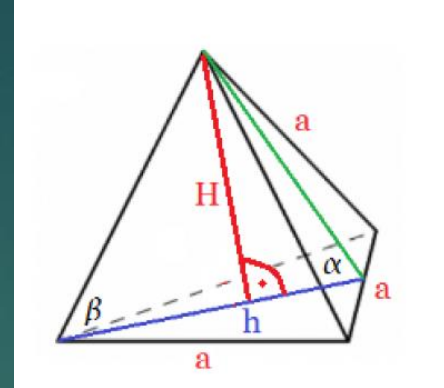
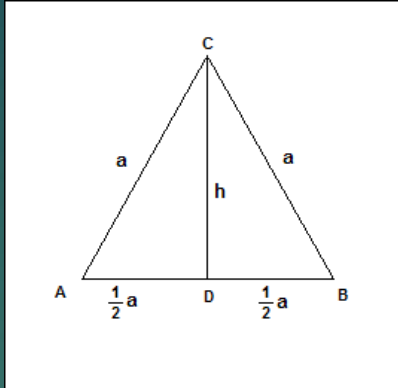


# Obliczenia objętość 4D

Objętość n-wymiarowa, czyli największą możliwą liczoną wartość w danym wymiarze nazywa się objętością n-wymiarową, np. objętość 2-wymiarowa oznacza pole, objętość 3-wymiarowa to zwykła objętość, 1D to linie, a dla 0D niezmienny punkt

Tak więc w 0D doliczmy się 1 punktu, w 1D największą wartością jest odcinek  $a$ , w 2D wymiarze mamy trójkąt o wzorze  $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ , w 3D  $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$ , ciężko znaleźć tu bezpośrednią zależność, łatwiej nam będzie spojrzeć na to skąd te wzory pochodzą. W 2D wymiarze liczymy wysokość i podstawiamy ją do wzoru  $\frac{ah}{2}$ , w 3D podobnie, bo  $\frac{P_p H}{3}$ , łatwe jest teraz zauważenie zależności jaką jest:  $V_n = \frac{V_{n-1} * h}{n}$ , gdzie  $n$  jest liczbą oznaczającą wymiar,  $V$  – objętość danego wymiaru. Jednak potrzebujemy  $h$ , którym zajmiemy się w następnym slajdzie.

# Obliczenia II



Robimy to oczywiście z twierdzenia Pitagorasa. W 2D wysokość liczymy  $\sqrt{a^2 - (\frac{1}{2}a)^2}$ , w

3D wygląda to tak:  $h_3 = \sqrt{(h_2)^2 - (\frac{1}{3}h_2)^2}$ . Wzór przekształcamy kolejno:

$$h_3 = \sqrt{(h_2)^2 - \frac{1}{3^2} h_2^2} = h_2 * \sqrt{1 - \frac{1}{3^2}}$$

Zależność jest już łatwiejsza do zauważenia, wysokość

dla n-wymiaru równa się  $h_n = h_{n-1} * \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} = h_{n-1} * \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}} = h_{n-1} * \frac{\sqrt{(n+1)(n-1)}}{n}$ . Tak jak w przypadku objętości wykorzystujemy poprzednią wartość (wysokość lub objętość). Cały

wzór ma więc postać  $V_n = \frac{V_{n-1} * h_{n-1} * \sqrt{(n+1)(n-1)}}{n^2}$ , zakładając, że  $V_1 = a$  i  $h_1 = a$ :

$$h_n = x \cdot \frac{\sqrt{1 \cdot 3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot 4}}{3} \cdot \dots \cdot \frac{\sqrt{(n-2)n}}{n-1} \cdot \frac{\sqrt{(n-1)(n+1)}}{n} = x \cdot \frac{\sqrt{(1 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 4) \cdot \dots \cdot (n-2)n \cdot (n-1)(n+1)}}{n!} = x \cdot \frac{\sqrt{1 \cdot 2 \cdot \left(\frac{(n-1)!}{2}\right)^2 \cdot n \cdot (n+1)}}{n!} =$$

$$= x \cdot \frac{(n-1)! \sqrt{2n(n+1)}}{2n!} = x \cdot \frac{\sqrt{2n(n+1)}}{2n} = x \sqrt{\frac{n+1}{2n}}$$

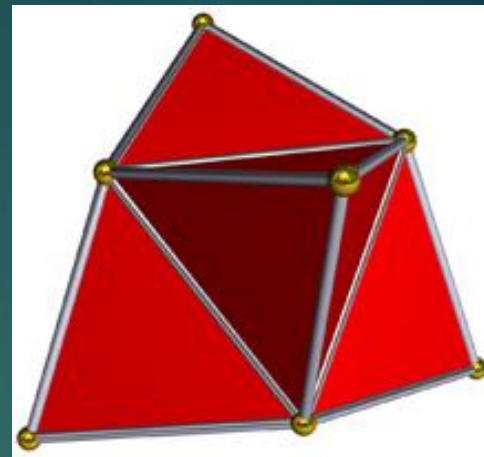
$$V_n = \frac{V_{n-1} * a \sqrt{\frac{n+1}{2n}}}{n} \quad (a=x)$$



# Obliczenia

Wartość wymiarowo niższa

Siatka  
5-komórki



Obiekt 1D -ilość punktów

Obiekt 2D -długość

Obiekt 3D -pole

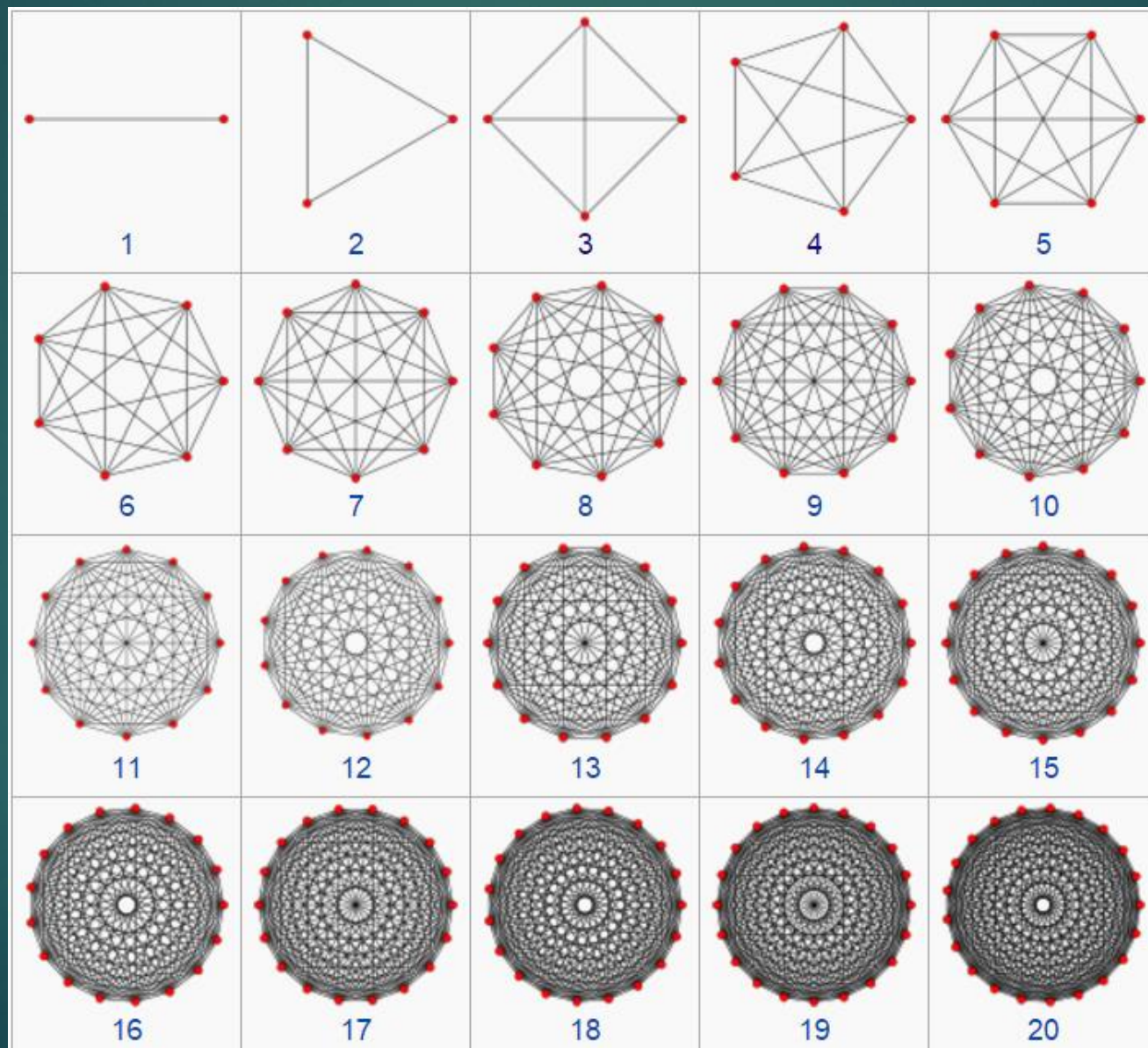
Dla 4D- zwykła objętość

Liczymy ją mnożąc  $n+1$  przez objętość wymiarowo niższą:  $(n+1) * v_{n-1}$ .

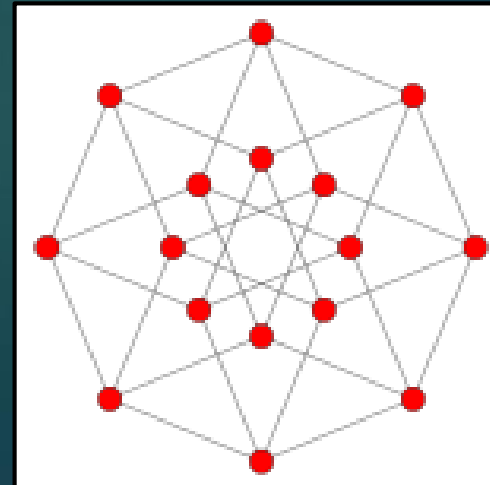
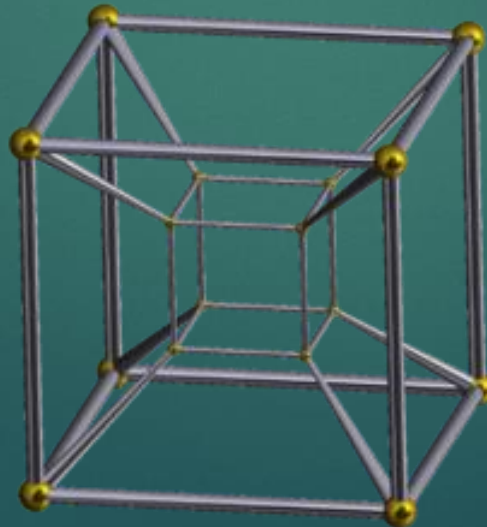
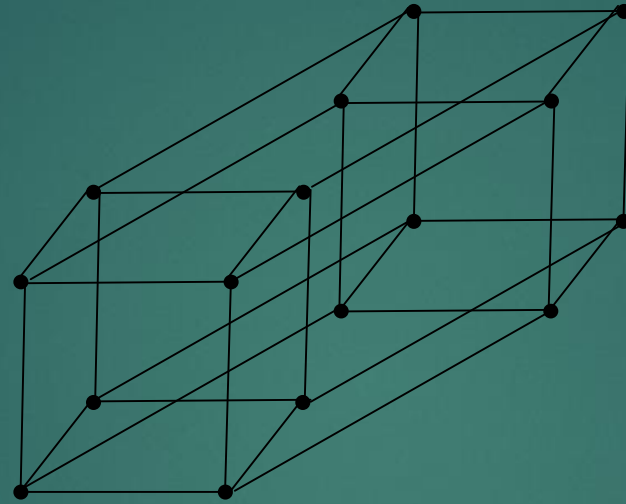
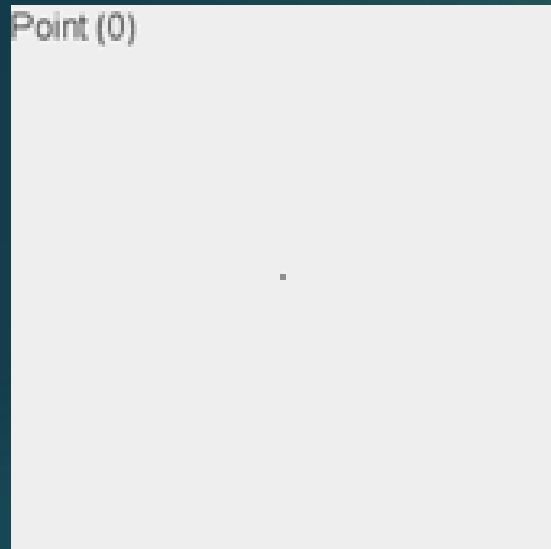
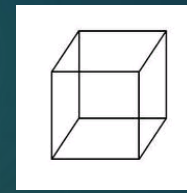
Co znaczy, że dla 5-komórkowca jest to  $5 * \frac{a^3 \sqrt{2}}{4}$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
 \end{array}$$

# Sympleksy w n-wymiarach (rzuty)

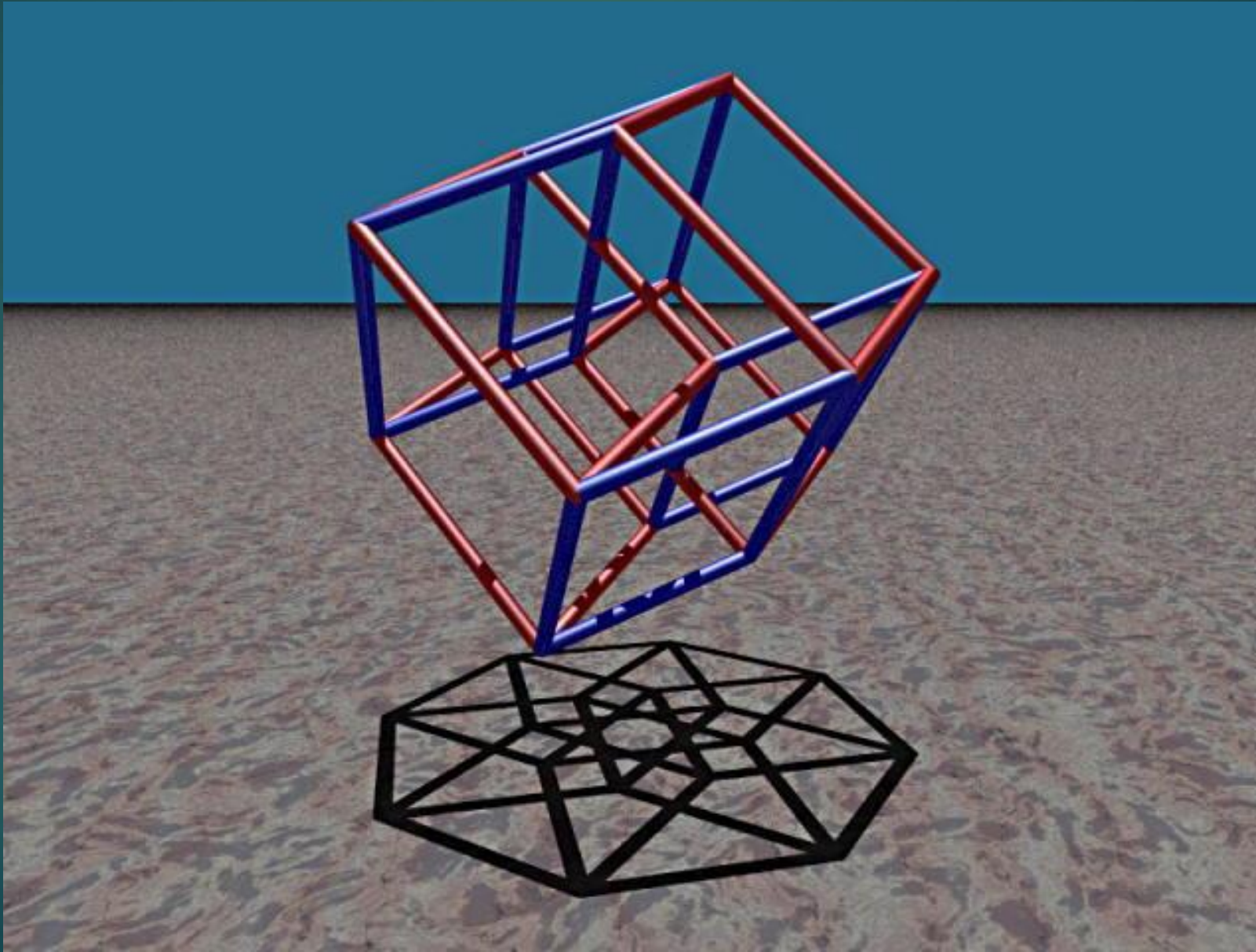


# Tesseract(8)



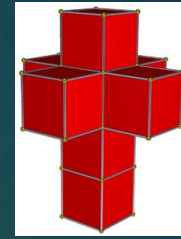


# Cień rzucany na 2D





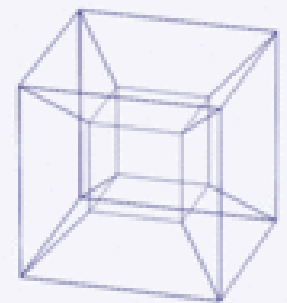
# Obliczenia

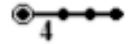
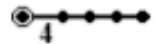
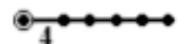
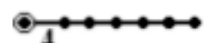
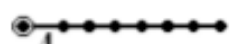
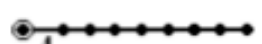
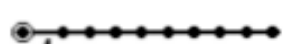


**Objętość n wymiarowa:** w 0D i 1D zaczynamy oczywiście od wartości 1 i  $a$ , w 2D Objętość n-wymiarową liczymy ze wzoru  $a^2$ , a w 3D:  $a^3$ , w 4D jasne jest że wzór ma postać  $a^4$ , a kolejnych wymiarach  $V_n = a^n$ .

**wartość o 1 wymiar niższa:** W 1D mamy 2 punkty, w 2D wzór ma postać  $4a$ , w 3D natomiast  $6a^2$ . Z tych rozważań wynika że czynnik zwiększa się o 2, a długość o kolejną potęgę, w 4D wzór mamy  $8a^3$ . Wzór ogólny ma postać  $V_{n-1} = 2 * n * a^{n-1}$ .

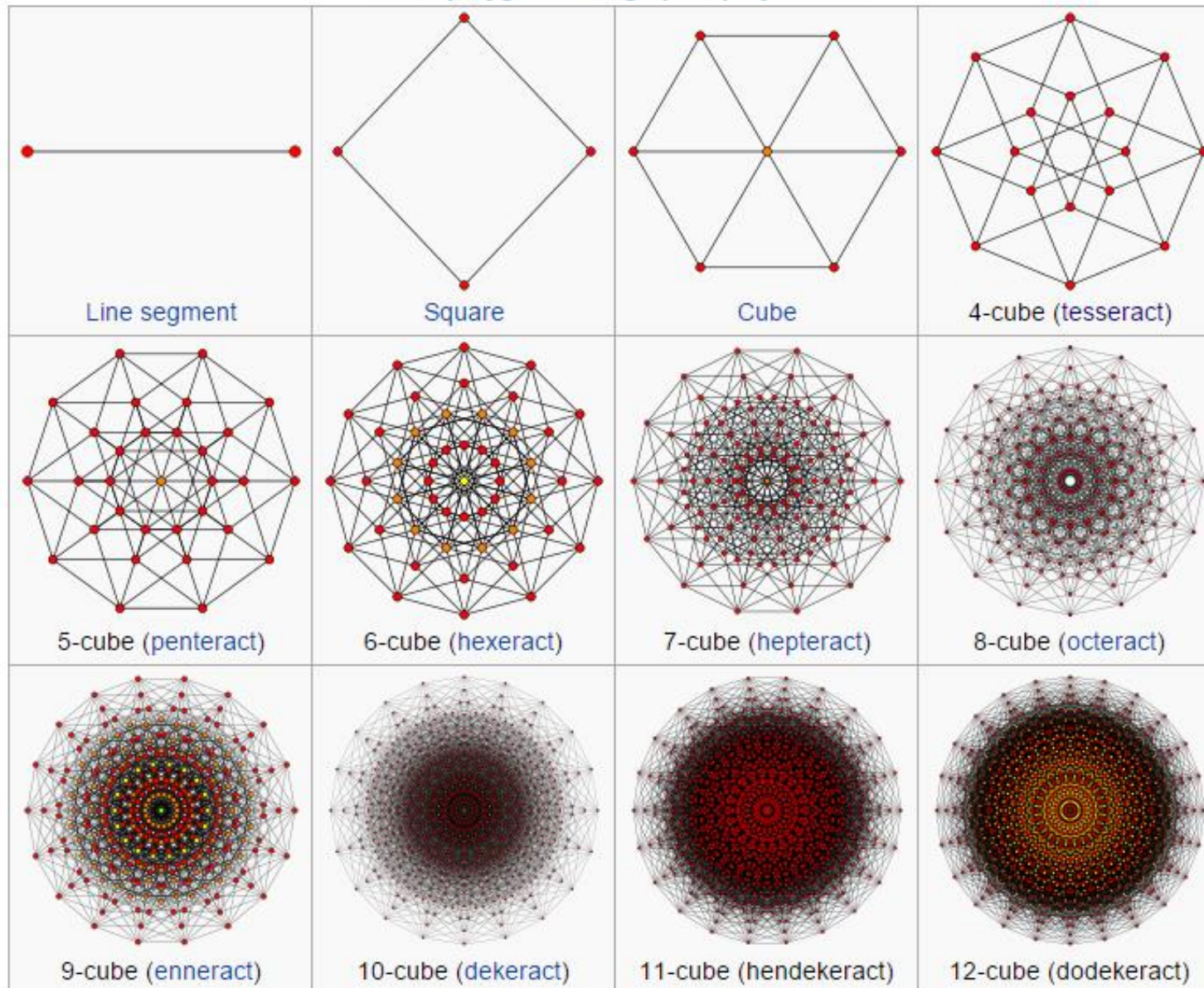
**Przekątna:** Kwadrat ma też inną ciekawą własność, jego przekątna jest równa  $a\sqrt{2}$ , oczywiście dla 2D, przekątna sześcianu wynosi  $a\sqrt{3}$ . Dla odcinka w 1D teoretyczna „przekątna” równa by była  $a\sqrt{1}$  Ogólny wzór dla n-wymiaru ma postać  $a\sqrt{n}$ , zaś hipersześcian ma ją równą  $2a$ .



| $n=$ | Grafika                                                                             | Nazwa                                                       | Symbol Schläfliego  | Diagram Coxetera-Dynkina                                                             | Wierzchołków | Krawędzi (boków) | Ścian | Komórek | Ścian 4-wym. | Ścian 5-wym. | Ścian 6-wym. | Ścian 7-wym. | Ścian 8-wym. | Ścian 9-wym. | Ścian 10-wym. |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|---------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------|------------------|-------|---------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------|
| 0    |    | Punkt                                                       | —                   | —                                                                                    | 1            | —                | —     | —       | —            | —            | —            | —            | —            | —            | —             |
| 1    |    | Odcinek                                                     | { } bądź {2}        |   | 2            | 1                | —     | —       | —            | —            | —            | —            | —            | —            | —             |
| 2    |    | Kwadrat                                                     | {4}                 |    | 4            | 4                | 1     | —       | —            | —            | —            | —            | —            | —            | —             |
| 3    |    | Sześcian<br>(in. <i>heksaedr</i> )                          | {4,3}               |    | 8            | 12               | 6     | 1       | —            | —            | —            | —            | —            | —            | —             |
| 4    |    | Hipersześcian czterowymiarowy<br>(in. <i>tesseract</i> )    | {4,3,3}             |    | 16           | 32               | 24    | 8       | 1            | —            | —            | —            | —            | —            | —             |
| 5    |    | Hipersześcian pięciowymiarowy<br>(in. <i>penterakt</i> )    | {4,3,3,3}           |    | 32           | 80               | 80    | 40      | 10           | 1            | —            | —            | —            | —            | —             |
| 6    |    | Hipersześcian sześciowymiarowy<br>(in. <i>hekserakt</i> )   | {4,3,3,3,3}         |    | 64           | 192              | 240   | 160     | 60           | 12           | 1            | —            | —            | —            | —             |
| 7    |   | Hipersześcian siedmiowymiarowy<br>(in. <i>hepterakt</i> )   | {4,3,3,3,3,3}       |   | 128          | 448              | 672   | 560     | 280          | 84           | 14           | 1            | —            | —            | —             |
| 8    |  | Hipersześcian ośmiowymiarowy<br>(in. <i>okterakt</i> )      | {4,3,3,3,3,3,3}     |  | 256          | 1024             | 1792  | 1792    | 1120         | 448          | 112          | 16           | 1            | —            | —             |
| 9    |  | Hipersześcian dziewięciowymiarowy<br>(in. <i>ennerakt</i> ) | {4,3,3,3,3,3,3,3}   |  | 512          | 2304             | 4608  | 5376    | 4032         | 2016         | 672          | 144          | 18           | 1            | —             |
| 10   |  | Hipersześcian dziesięciowymiarowy<br>(in. <i>dekerakt</i> ) | {4,3,3,3,3,3,3,3,3} |  | 1024         | 5120             | 11520 | 15360   | 13440        | 8064         | 3360         | 960          | 180          | 20           | 1             |

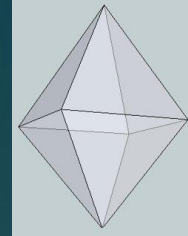
# Hipersześciany

Petrie polygon Orthographic projections

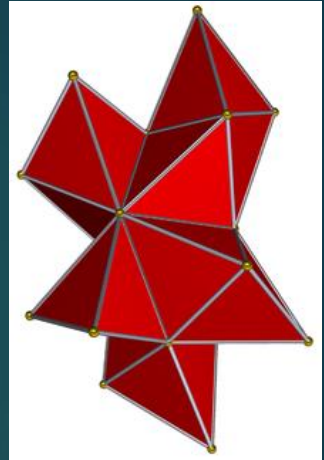
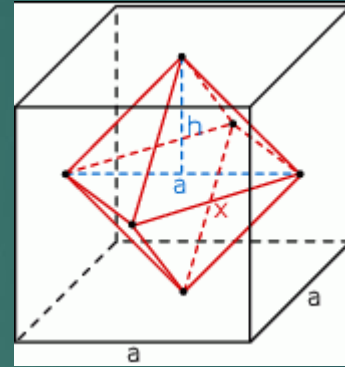
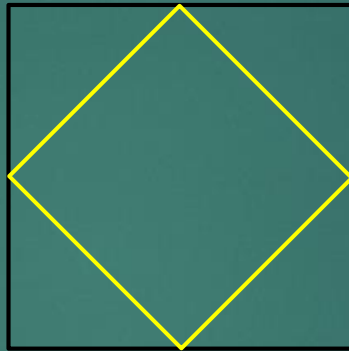




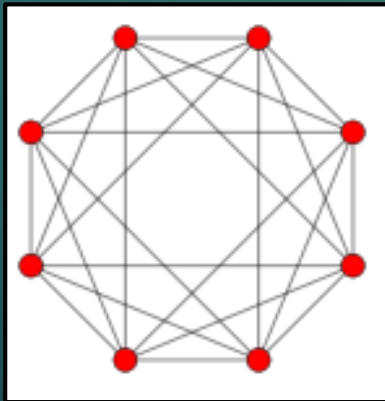
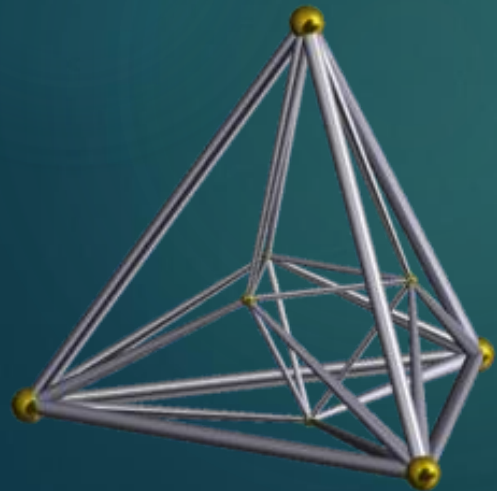
# Hexadecahedroid(16)



- ▶ 16-Komórkowiec to odpowiednik ośmiościanu, tylko w 4D. Możemy go otrzymać postępując analogicznie jak na poniższych rysunkach



- ▶ Tesseract ma 8-komórek, zatem 16-komórkowiec tyle samo, czyli 8 wierzchołków (taka sam zależność występuje w 2D i 3D)

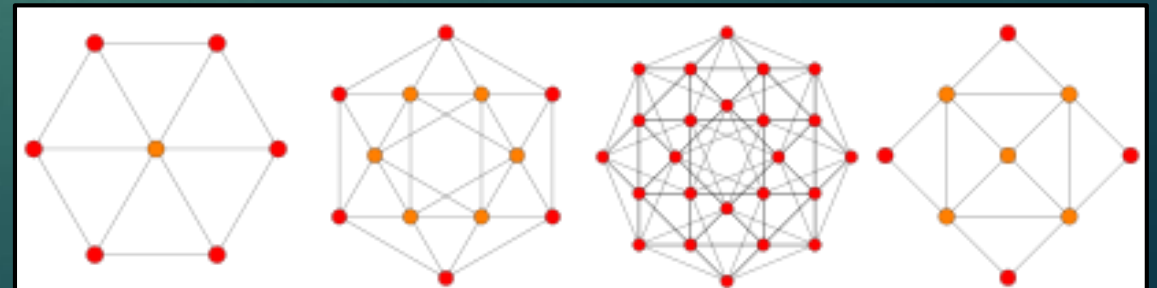
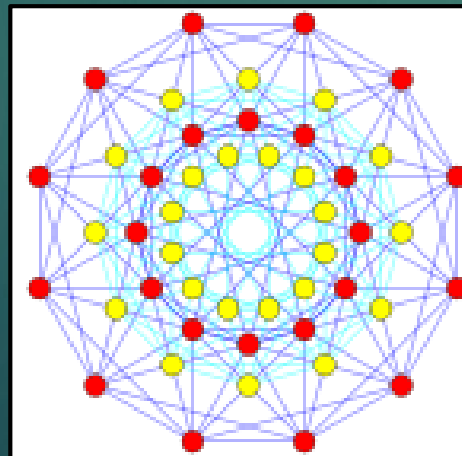
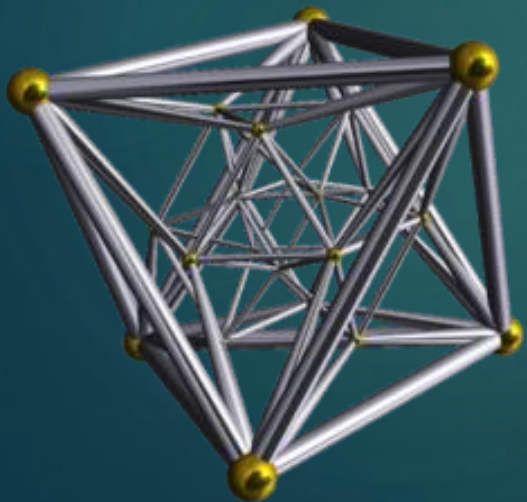
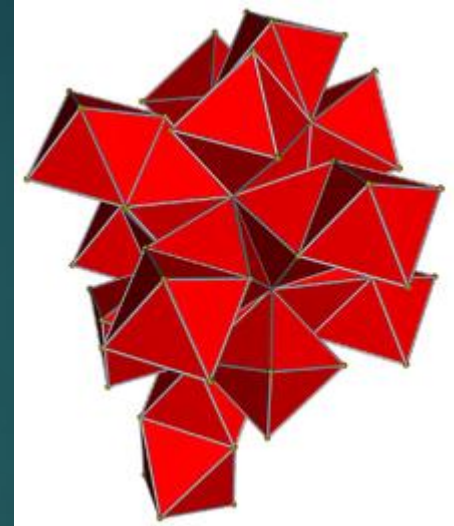
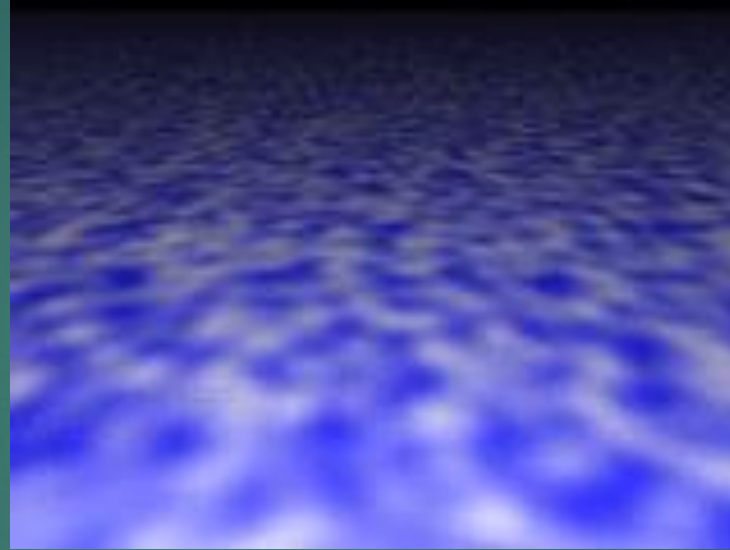




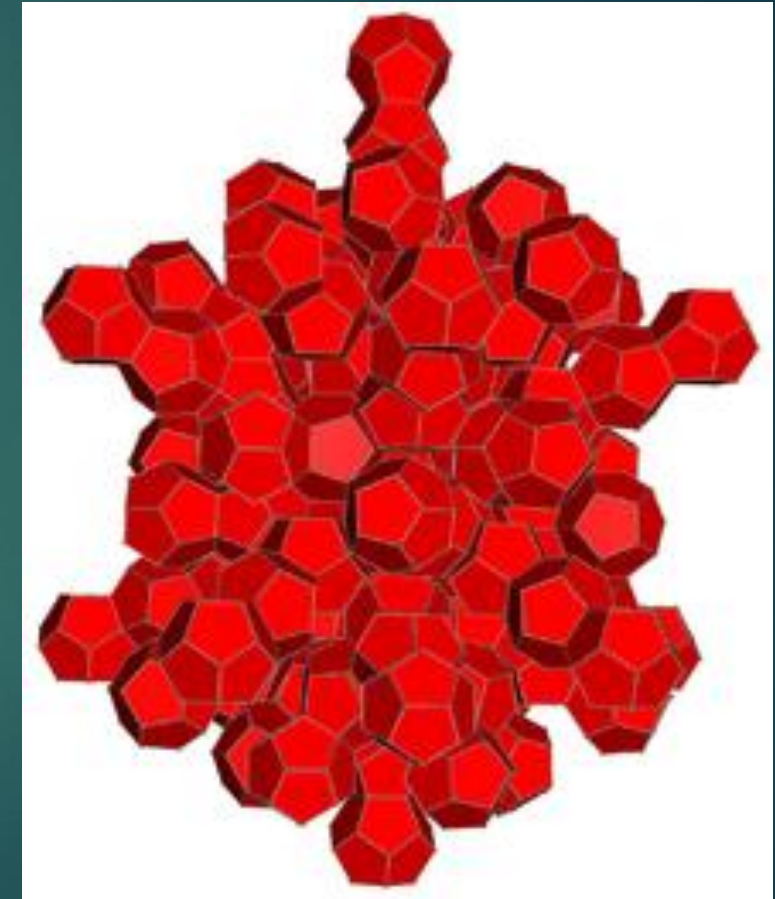
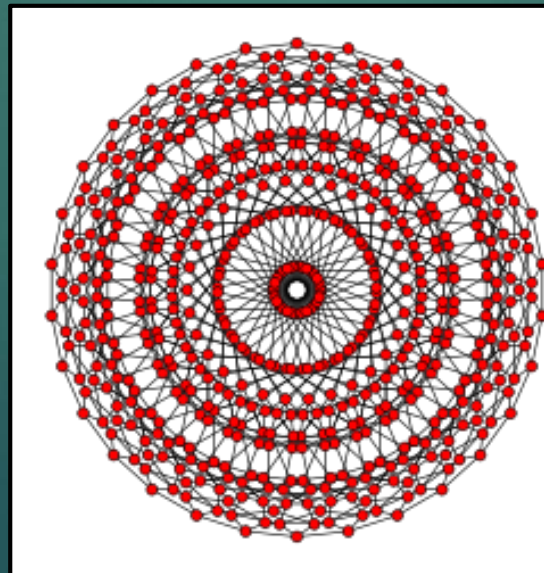
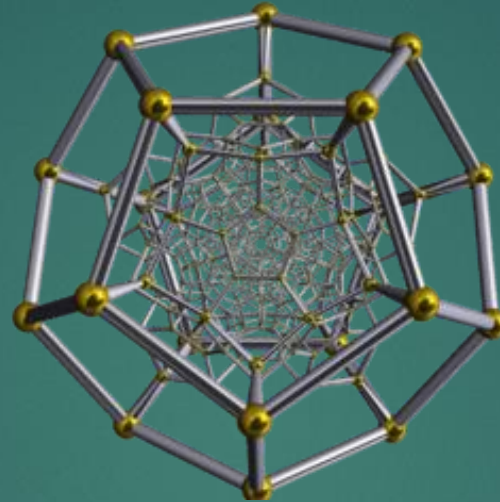
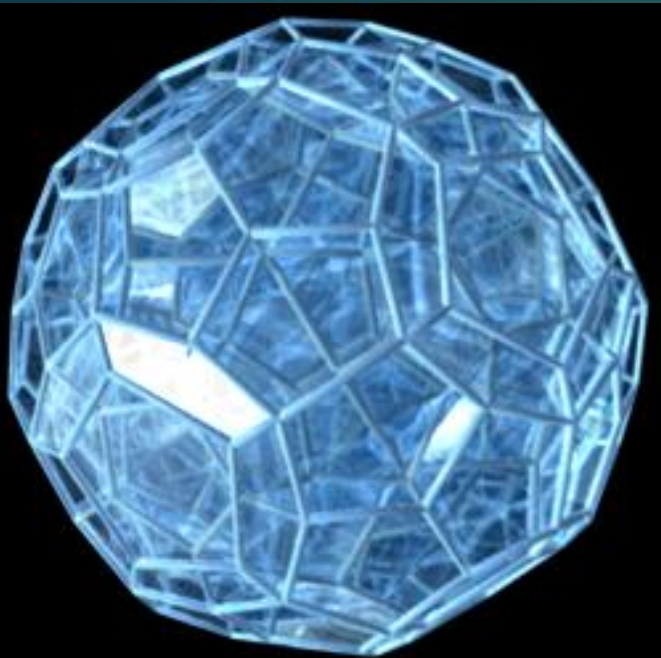
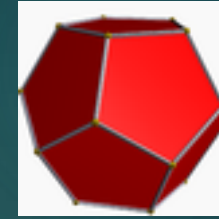
# Polyoctahedron(24)



Rzut 24-komórkowca w 3D

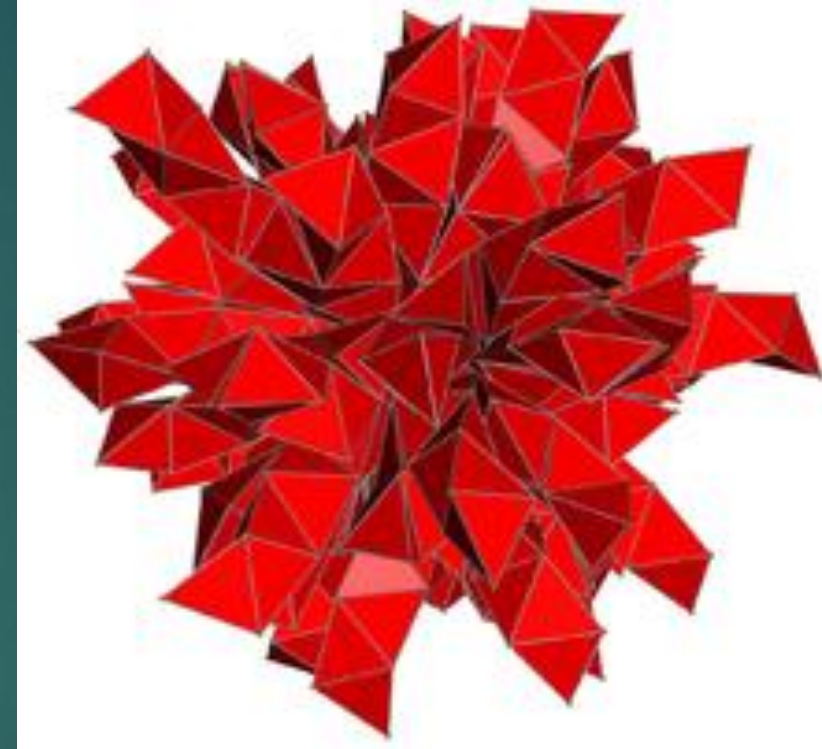
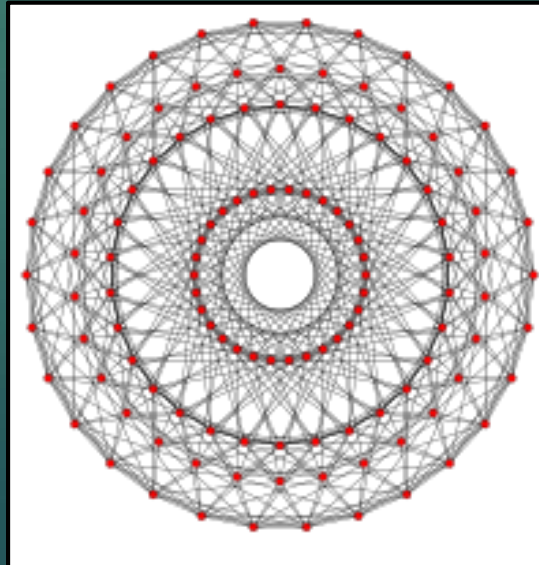
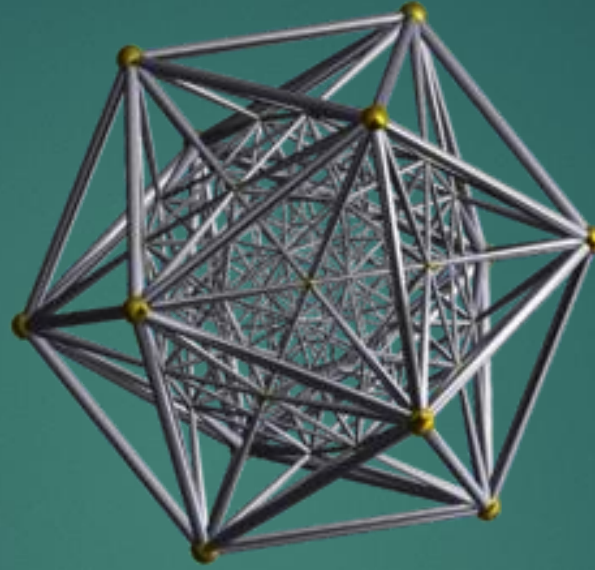
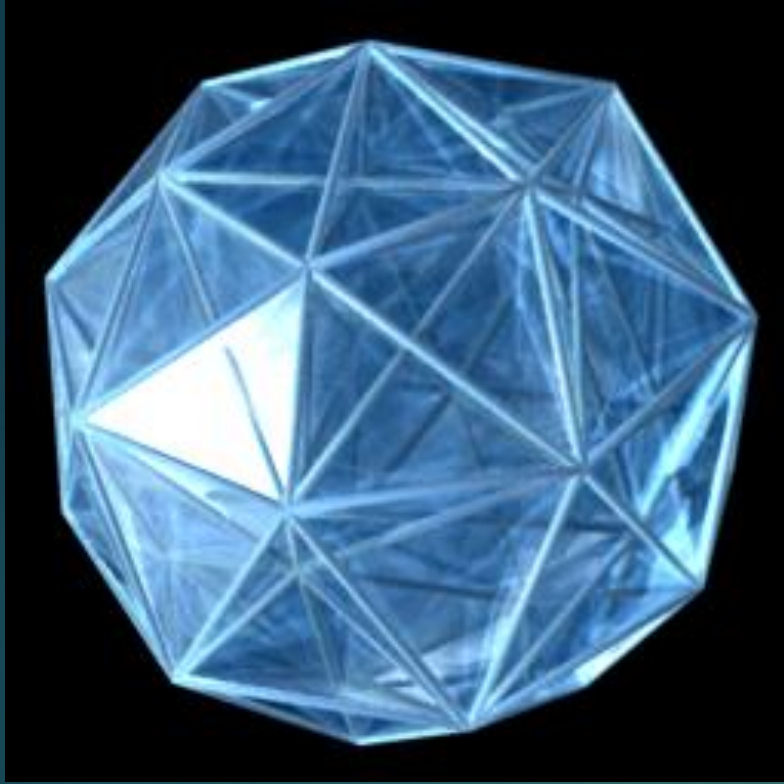
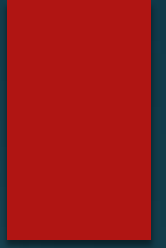
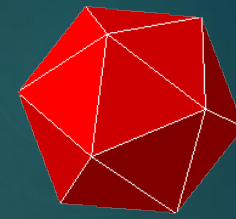


# Hecatonicosahedroid(120)

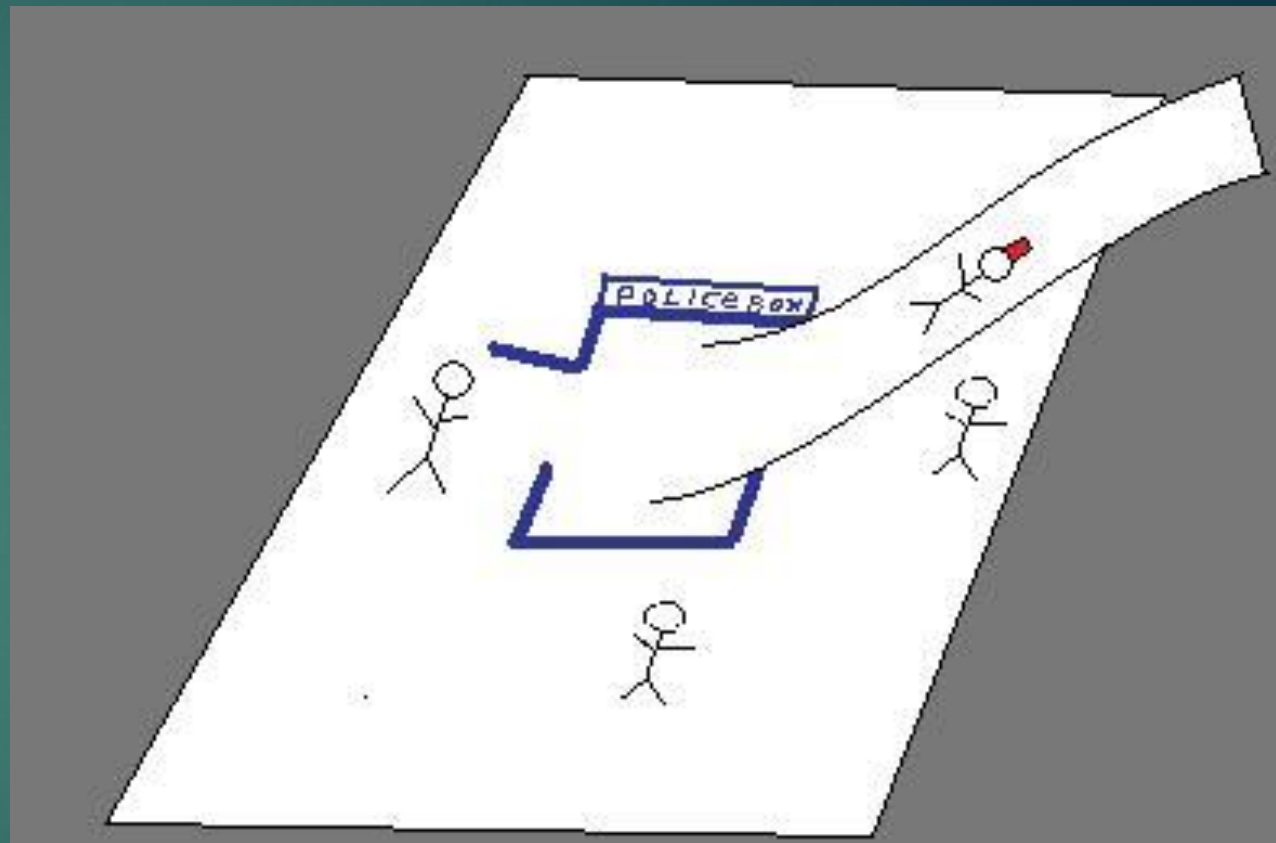




# Hexacosidedroid(600)



# Przyszłość





# KONIEC

WYKONAŁ:

Piotr Maliszewski

Źródła:

- <https://www.youtube.com/watch?v=75ZO3xTxp50>
- <https://www.youtube.com/watch?v=coo-PcWXWtc>
- <https://en.wikipedia.org/wiki/Tesseract>
- <https://en.wikipedia.org/wiki/5-cell>
- <https://en.wikipedia.org/wiki/16-cell>
- <https://en.wikipedia.org/wiki/24-cell>
- <https://en.wikipedia.org/wiki/120-cell>
- <https://en.wikipedia.org/wiki/600-cell>
- <https://www.quora.com/How-can-one-visualize-4-dimensional-space>
- <https://www.google.com/imghp?hl=pl>