

**I Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica**

**32-500 Chrzanów, ul. Piłsudskiego 14**

**telefon: 32 - 623 27 48**

**e-mail: liceum1@poczta.fm**

# Geometria hiperboliczna

**Mateusz Kleczek**

**Pod kierunkiem mgr Iwony Małochy**

**2016**

## **Wstęp**

Geometria jest moją ulubioną dziedziną matematyki, interesuje się nią już od czasów szkoły podstawowej. O geometrii nieeuklidesowej usłyszałem po raz pierwszy w programie popularno-naukowym o fizyce w telewizji. Po kilku latach poczułem się na siłach by zgłębić ten temat korzystając z profesjonalnej literatury matematycznej.

## **Rys historyczny**

Euklides z Aleksandrii był pierwszym matematykiem, który postanowił usystematyzować wiedzę matematyczną swoich czasów. Stosował podejście aksjomatyczne do wyjaśniania zależności występujących w geometrii. Wszystkie jego aksjomaty, te pozalogiczne zwane przez niego postulatami były krótkie i nikt nie miał do ich prawdziwości wątpliwości, z wyjątkiem Postulatu V, zwanego inaczej postulatem równoległości. Matematycy na przestrzeni dziejów uważali go za zbyt skomplikowanego, ale nie potrafili udowodnić jego prawdziwości czy fałszu. W początkach XVIII wieku podjęto próby wyprowadzenia jak największej liczby twierdzeń korzystając tylko z 4 pierwszych postulatów i dołączając zaprzeczenie V postulatu chcieli doprowadzić do sprzeczności, co się im nie udało. Następnie 3 matematyków niezależnie odkryło i opisało geometrię nieeuklidesową, byli to:

Carl Friedrich Gauss, János Bolyai i Nikołaj Łobaczewski. Gauss wiedząc, że konserwatywne środowisko nie przyjmie jego teorii, a nie chcąc zszargać swojej renomy nie opublikował swoich domysłów.

## Postulaty Euklidesa<sup>1</sup>

1. Od jednego punktu do drugiego można przeprowadzić prostą.
2. Odcinek można przedłużać nieskończenie, otrzymując prostą.
3. Z dowolnego środka można zatoczyć okrąg o dowolnym promieniu.
4. Wszystkie kąty proste są przystające.
5. Jeżeli dwie proste po przecięciu z trzecią tworzą po jednej stronie kąty wewnętrzne jednostronne, których suma jest mniejsza od dwóch kątów prostych, to te proste przecinają się przy dostatecznym przedłużeniu i to po tej właśnie stronie.

Lub inaczej zapisany 5 postulat:

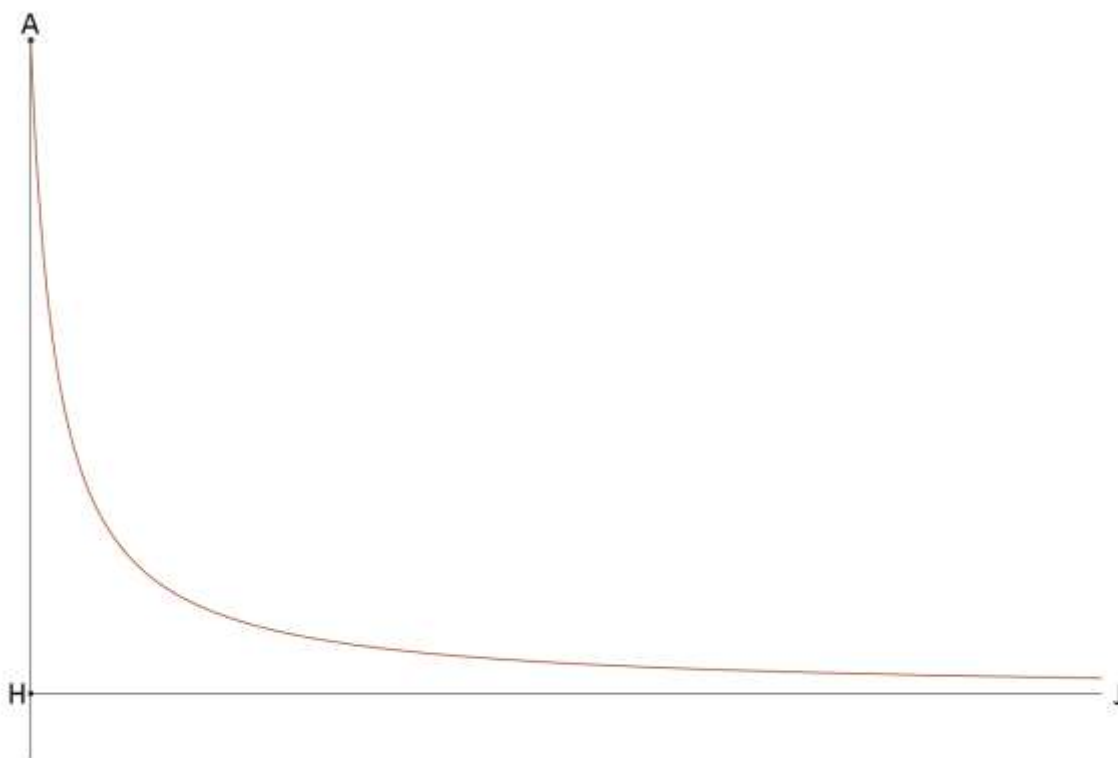
5'. Przez dany punkt nienależący do danej prostej można poprowadzić jedną prostą rozłączną z daną prostą.

Piąty postulat został obalony niezależnie przez Nikołaja Łobaczewskiego i Jánosa Bolyaia, którzy wymyślili i spisali podstawy geometrii hiperbolicznej zwanej też **geometrią Bolyaia-Łobaczewskiego**. Zastąpili oni ostatni postulat swoim własnym, zwanym Postulatem Łobaczewskiego:

5". Jeżeli dana jest prosta AB i nie leżący na niej punkt C, to przez punkt C w płaszczyźnie ABC, można poprowadzić co najmniej 2 proste nie przecinające prostej AB<sup>2</sup>.

Rzutując jedno ramię kąta na drugie ramię otrzymujemy odcinek. Rzuty punktów ramienia kąta ostrego na drugie ramię kąta wypełnia odcinek AH bez punktu H, ale poza ten odcinek nie wychodzi.

Dlatego rysując prostą w geometrii hiperbolicznej rysujemy ramię hiperboli, która tak jak ramię kąta nieskończenie się zbliża do swojej asymptoty, a w tym wypadku do prostopadłej HJ do ramienia AH.<sup>3</sup>



Inaczej mówiąc:

Istnieje taki kąt ostry, że pewna prostopadła do jednego z jego ramion nie przecina drugiego ramienia kąta. (Także "dalsze" prostopadłe nie przecinają drugiego ramienia kąta; prosta HJ jest graniczną prostą, która oddziela proste przecinające od nieprzecinających.

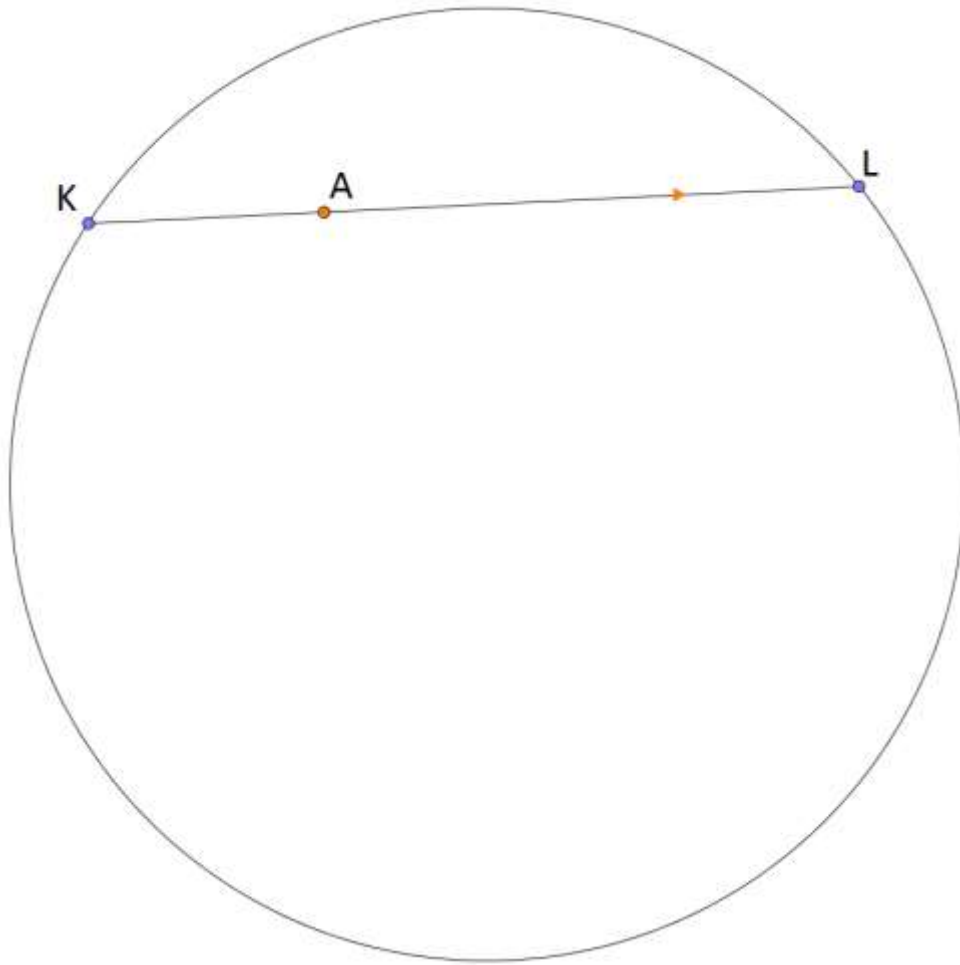
## Model<sup>4</sup>

Płaszczyznę Łobaczewskiego można przedstawić pod postacią modelu-interpretacji Beltramiiego-Kleina.

W tym modelu przyjmujemy kilka umów:

1. Punkt hiperboliczny jest to dowolny punkt euklidesowy płaszczyzny zawarty wewnątrz (czyli w odległości od środka okręgu  $\leq r$ ) pewnego okręgu o stałym promieniu-okręgu podstawowego. Punkty leżące na tym okręgu będziemy nazywać punktami niewłaściwymi (nieskończenie dalekimi), a leżące poza nim punktami idealnymi.
2. Prosta hiperboliczna jest to dowolna cięciwa okręgu podstawowego. Końce tej cięciwy nazywamy punktami niewłaściwymi prostej hiperbolicznej.
3. Płaszczyzna hiperboliczna jest to obszar wewnętrzny okręgu podstawowego.
4. Przynależność hiperboliczna jest to przynależność euklidesowa.
5. Uporządkowanie hiperboliczne jest to uporządkowanie euklidesowe.
6. Ruch hiperboliczny jest to kolineacja automorficzna okręgu podstawowego-przekształcenie rzutowe przekształcające okrąg podstawowy w ten sam okrąg podstawowy, a jego obszar wewnętrzny w obszar wewnętrzny.

## Współrzędne w modelu Beltramiego-Kleina<sup>5</sup>



Dla dowolnego punktu  $A$  leżącego na prostej  $KL$ , na której ustaliliśmy kierunek, **współrzedną hiperboliczną**  $X_A$  możemy obliczyć za pomocą wzoru:

$$X_A = \frac{1}{2} \ln \frac{|KA|_E}{|LA|_E}$$

gdzie  $|LA|_E$  i  $|KA|_E$  są euklidesowymi długościami danych odcinków

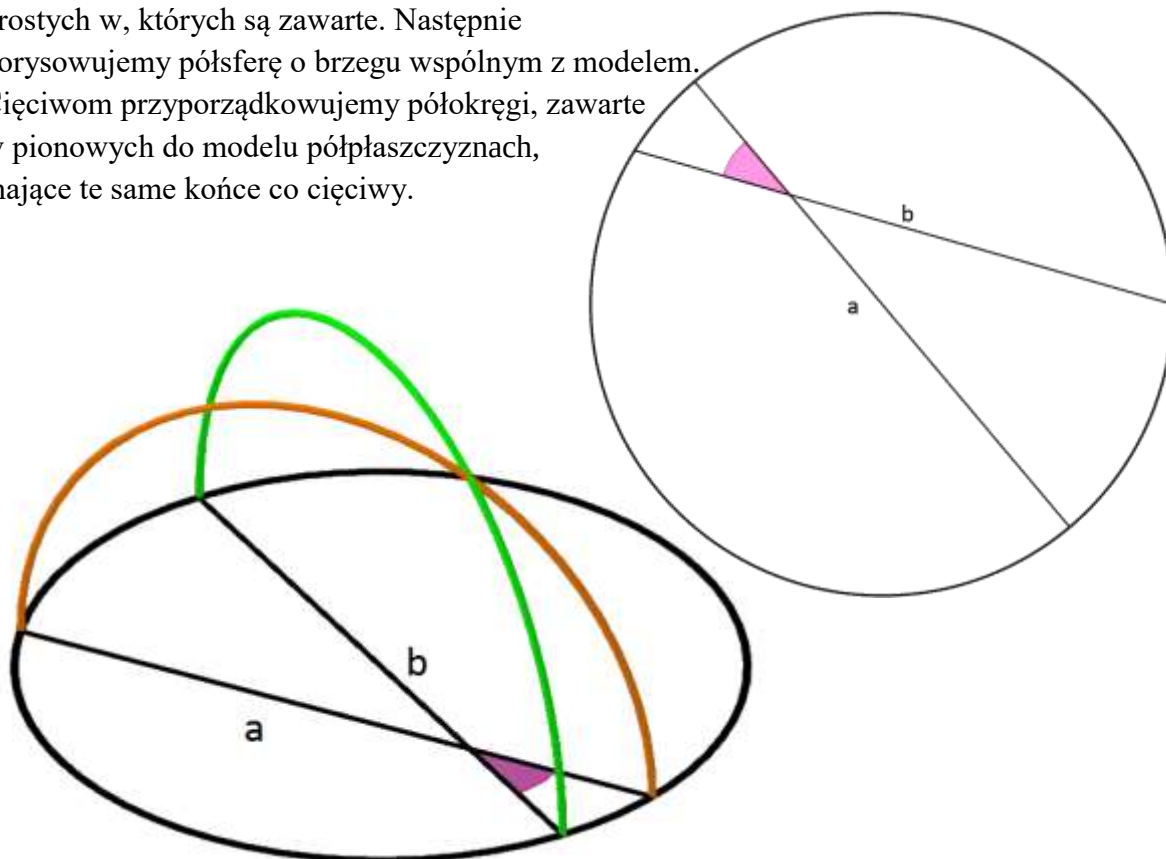
Hiperboliczną długość odcinka można obliczyć korzystając ze wzoru:

$$|X_B| - |X_A|$$

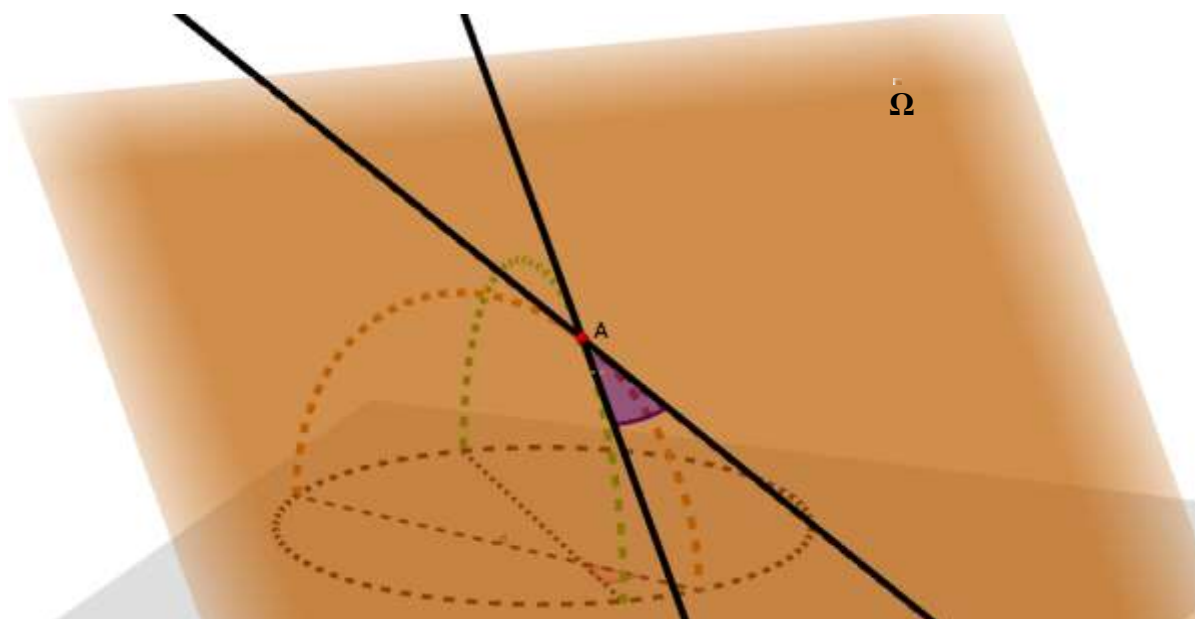
## Odległości w modelu Kleina potrafimy już mierzyć. A co z miarą kąta?<sup>6</sup>

Tutaj też powstała metoda by mierzyć kąty hiperboliczne w modelu.

Ramiona kąta przedłużamy by były cięciwami-obrazami prostych w, których są zawarte. Następnie dorysowujemy półsferę o brzegu wspólnym z modelem. Cięciwom przyporządkowujemy półokręgi, zawarte w pionowych do modelu półpłaszczyznach, mające te same końce co cięciwy.



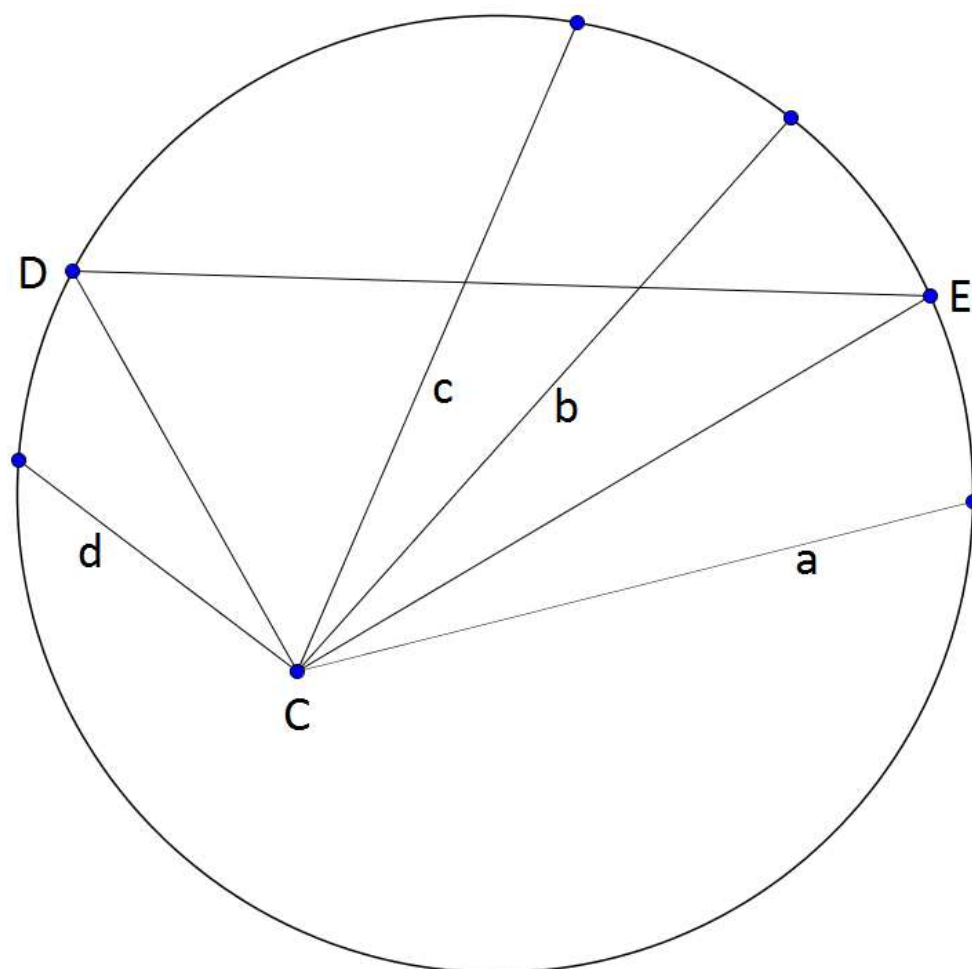
Następnie wprowadzamy płaszczyznę  $\Omega$  styczną do półsfery w punkcie A przecięcia półokręgów i konstruujemy proste styczne do półokręgów w ich płaszczyznach.



Miara zaznaczonego kąta jest miarą kąta w przestrzeni hiperbolicznej.

### Przecinanie się prostych w modelu<sup>7</sup>

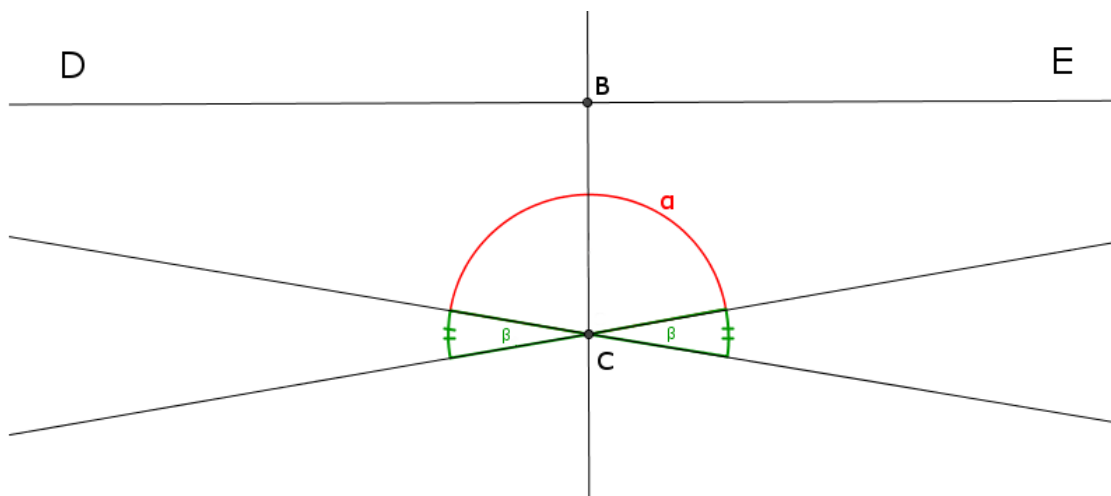
Półproste wychodzące z punktu C przecinają lub nie przecinają prostej D. Przecinające od nieprzecinających oddzielają proste CD i CE (by nie zaciemniać rysunku narysowane są tylko jako półproste).





## Równoległość w geometrii hiperbolicznej<sup>8</sup>

Z punktu C prowadzimy prostopadłą do prostej DE, która jest jednocześnie dwusieczną kąta DCE, dlatego że oba ramiona kąta nie przecinają prostej DE, przechodzą przez odpowiednio punkt nieskończenie daleki D i E prostej DE. Kąt BCE dąży do  $\frac{\pi}{2}$ , ale tej wartości nie przybiera, bo przyjęliśmy postulat Łobaczewskiego, który odrzuca postulat Playfaira. Stąd wynika że każda prosta idąca wewnątrz kąta  $\alpha$  przecina prostą DE, a żadna z prostych poprowadzonych przez punkt C we wnętrzu kątów  $\beta$  nie przecina prostej DE.



Łobaczewski nazwał proste CD i CE **równoległymi do prostej DE**. Równoległość nie oznacza już nieprzecinania (można przecież poprowadzić nieskończenie wiele prostych nieprzecinających prostej DE i przechodzących przez punkt C), ale oznacza oddzielanie przecinających od nieprzecinających.

Definiując równoległość na naszym modelu moglibyśmy powiedzieć, że:

prostymi równoległymi do DE przez punkt C są proste które łączą C z nieskończenie oddalonymi punktami prostej DE.

**Przez punkt nie leżący na prostej przechodzą dwie do niej równoległe.**

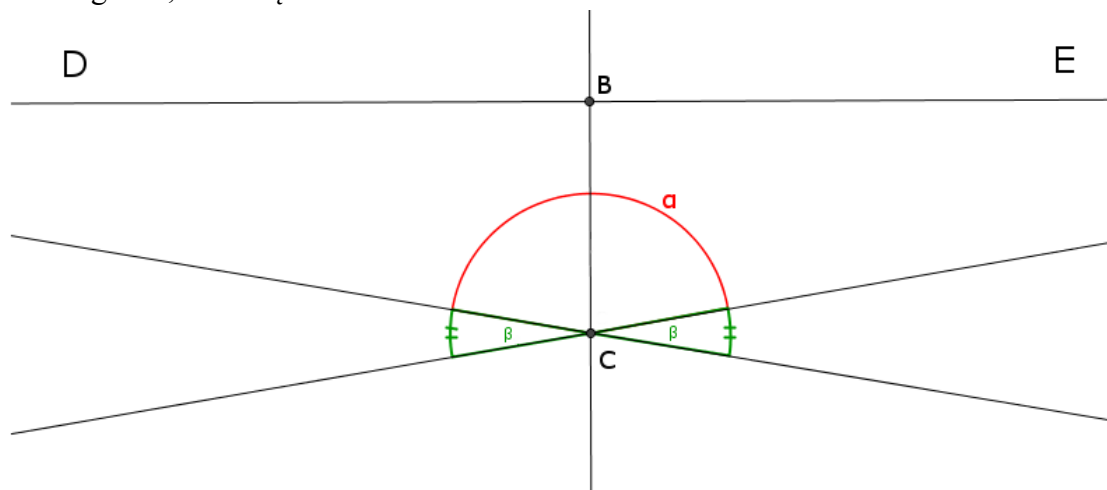
Jedna jest równoległa w zwrocie "prawym" a druga w "lewym" lub równoległą w kierunku od E do D i równoległą w kierunku od D do E. Na naszej "mapie" obrazami prostych równoległych w tym samym zwrocie są cięciwy wychodzące z jednego punktu obwodu. Stąd wynika, że **wszystkie proste równoległe do jakiejś prostej w tym samym zwrocie są też równoległe do siebie**.

Proste, które nie przecinają się, ani też nie są równoległe, nazywamy **rozbieżnymi**. Takimi prostymi są a i DE.

## Kąt równoległości i funkcja Łobaczewskiego<sup>9</sup>

Kątem równoległości nazywamy kąt  $\alpha$  znajdujący się między prostą prostopadłą do  $m$  i przechodzącą przez punkt  $A$ , a prostą asymptotyczną do  $m$ , także przechodzącą przez punkt  $A$ .

W geometrii hiperbolicznej istnieją 2 proste asymptotyczne do danej prostej, a więc dwa kąty równoległości, które są sobie równe.



Miarę kąta równoległości  $d$ , gdzie  $d$  jest długością odcinka  $BC$ , określa **funkcja Łobaczewskiego**, zwana również funkcją równoległości, którą oznaczamy przez  $\Pi(d)$ , jej dziedziną jest  $(0; \infty)$ , a do zbioru wartości należą kąty  $(0; \frac{\pi}{2})$ .

Funkcja odwrotna jest to  $x(\alpha) = \Pi^{-1}(\alpha) = d$

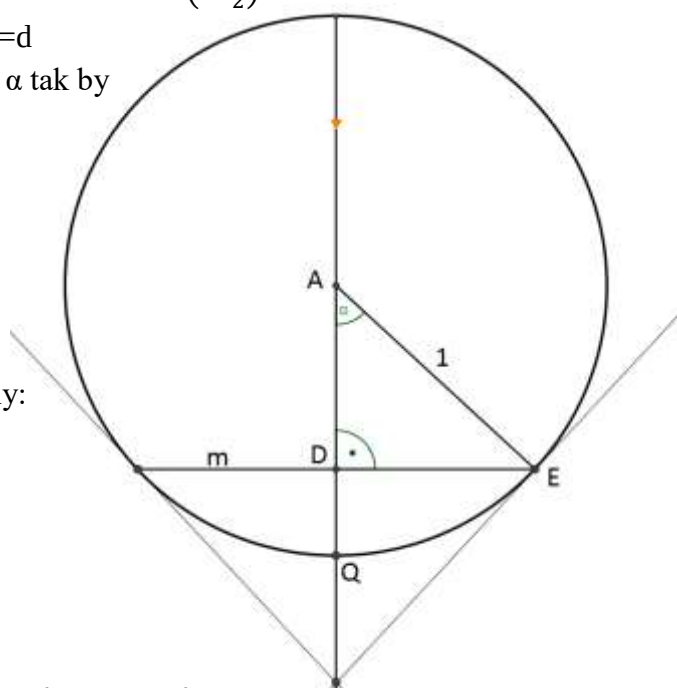
W modelu o promieniu 1 ustawiamy kąt  $\alpha$  tak by punkt  $A$  był w jego środku.

$$X_A = \frac{1}{2} \ln \frac{|PA|_E}{|QA|_E} = \frac{1}{2} \ln 1 = 0$$

$$X_D = \frac{1}{2} \ln \frac{|PD|_E}{|QD|_E} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+|AD|_E}{1-|AD|_E}$$

Trójkąt  $ADE$  jest prostokątny, wyliczamy:

$$|AD|_E = \frac{|AD|_E}{1} = \cos \alpha$$



$$X_D = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha} = \frac{1}{2} \ln \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} 2 \ln \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \ln \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} > 0 \text{ oraz}$$

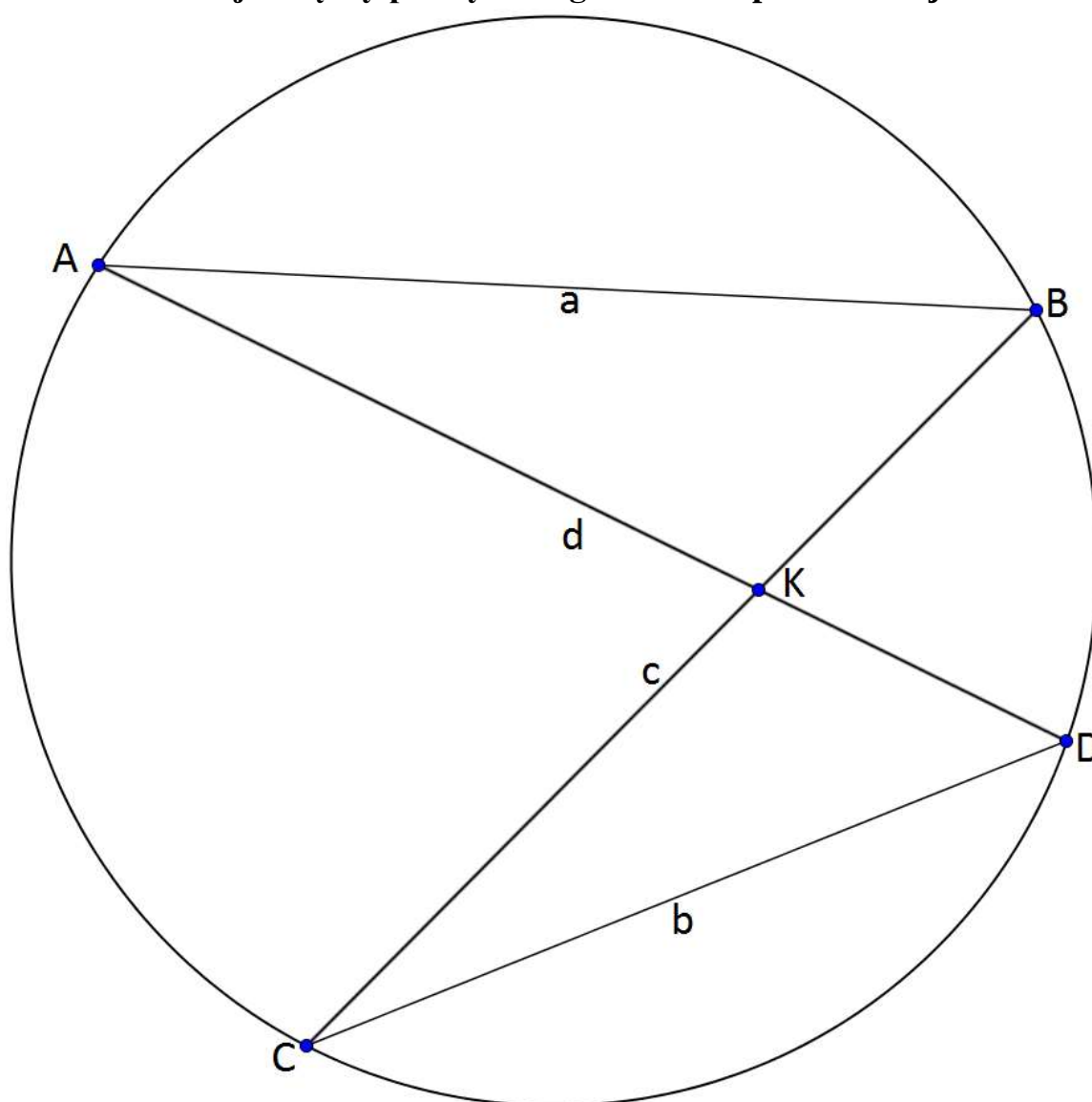
$$x(\alpha) = \left| \ln \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - 0 \right| = \ln \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

Podstawiamy  $x(\alpha) = d$

$$d = \ln \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

$$d = \Pi^{-1}(\alpha) = \ln \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \Rightarrow e^d = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \text{ ostatecznie } \alpha = 2 \operatorname{arccotg}(e^d) = \Pi(d)$$

## Relacje między prostymi w geometrii hiperbolicznej<sup>10</sup>

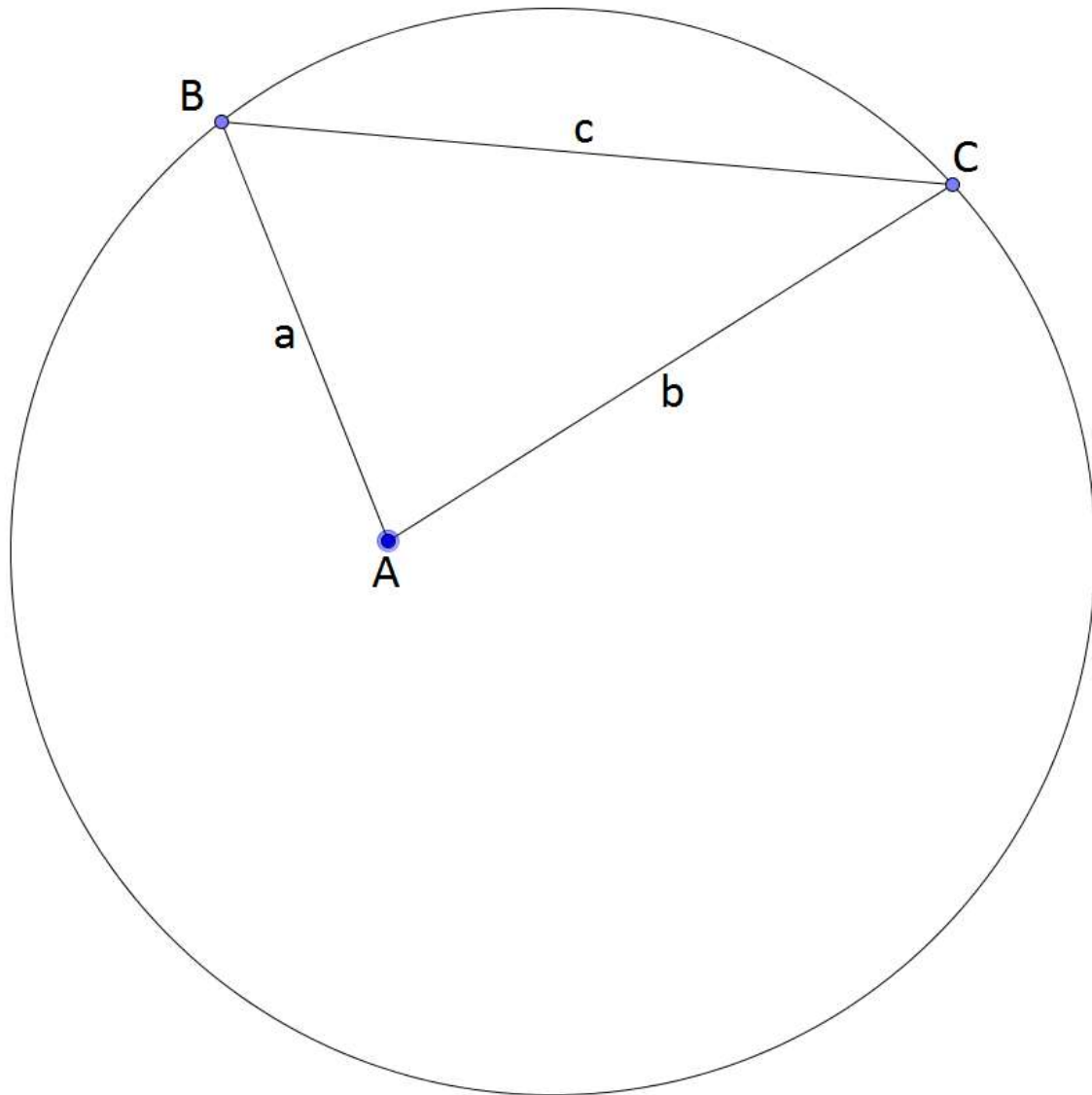


Kąt AKB ma dwusieczną prostopadłą do prostej AB, a kąt CKD dwusieczną prostopadłą do prostej CD. Kąty te są równe, co udowodniłem przy definiowaniu równoległych, więc ich dwusieczne tworzą razem prostą, która jest prostopadła jednocześnie do prostych AB i CD. Możemy stąd wyciągnąć wniosek, że:

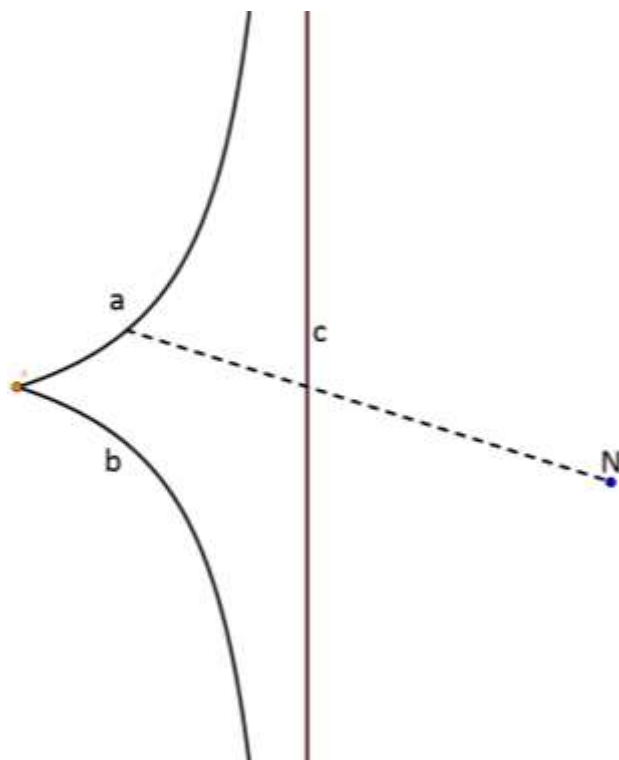
**istnieje wspólna prostopadła do dwóch prostych rozbieżnych.**

Prosta c jest równoległa w zwrocie od C do B jest równoległa do prostej a, a w zwrocie od B do C do prostej b. Analogiczna sytuacja zachodzi dla prostej d.

**Istnieje zatem prosta równoległa jednocześnie do 2 prostych rozbieżnych.**



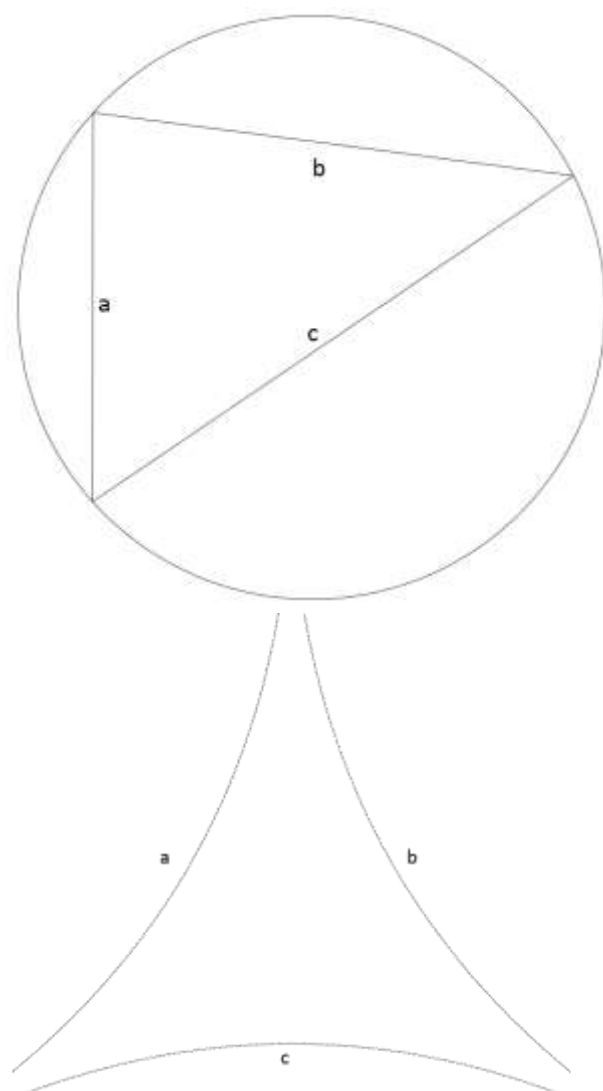
Kontynuując rozważania o prostych równoległych w geometrii hiperbolicznej weźmy kąt BAC. Na modelu możemy poprowadzić cięciwę BC, która odzwierciedla prostą równoległą jednocześnie do obu ramion kąta. Wydaje się to paradoksalne ze względu na nasze przyzwyczajenie do geometrii euklidesowej.<sup>11</sup>



Wyobrażając sobie kąt jako dwa ramiona hiperboli, a równoległą do nich w swoich dwóch różnych zwrotach (w zwrocie BC do prostej b i w zwrocie CB do prostej a).

Prosta łącząca dowolny punkt leżący wewnątrz kąta "na prawo" od c z a nie może przeciąć ramienia b.

Gdybyśmy zacięniowali obszar od jednego do drugiego ramienia kąta ab to zacięniwalibyśmy obszar ograniczony przez kąt i prostą c. Nie możemy powiedzieć, że prowadzimy przez punkt wewnętrzny kąta prostą, która przecina oba ramiona ponieważ odrzuciliśmy pewnik Euklidesa, a zarazem Dowód Legendre'a, który jest tylko innym zapisaniem pewnika Euklidesa.



Analogicznie dla dwóch prostych równoległych możemy poprowadzić tylko jedną prostą równoległą do nich obu w przeciwnych zwrotach.

Ograniczony przez nie obszar ma nieskończoną powierzchnię, można go nazywać trójkątem o wierzchołkach nieskończenie dalekich lub obszarem trójkątnym. Za trójkąt będziemy uważać każdy obszar, którego obrazem na modelu jest trójkąt.

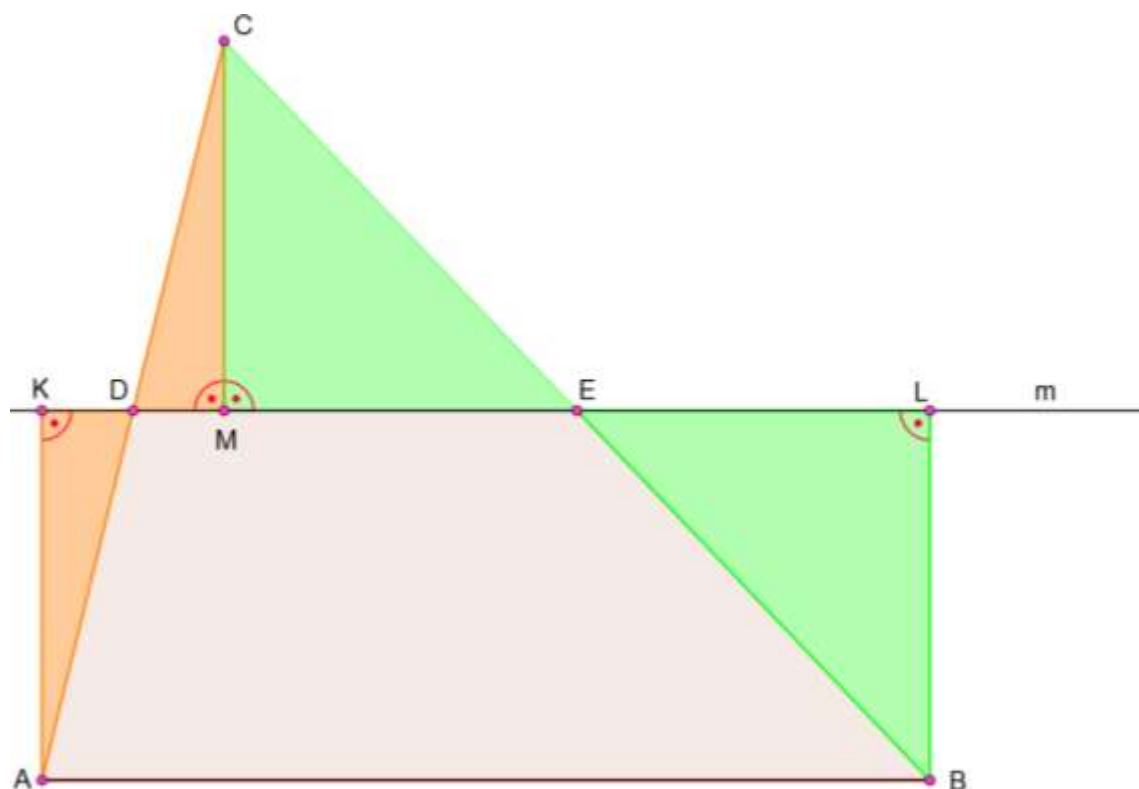
Obszar trójkątny ma 3 osie symetrii.

## Pole w geometrii hiperbolicznej<sup>12</sup>

Do mierzenia pola w geometrii Bolyaia-Łobaczewskiego wykorzystuje się własność figur w niej występujących zwaną **defektem wielokąta**. Dla wielokąta o  $n$  bokach jest to różnica pomiędzy  $(n - 2)180^\circ$  a sumą kątów wielokąta. Wynika ona z tego, że trójkąt w geometrii hiperbolicznej ma mniej niż  $180^\circ$ , a każdą figurę można zbudować z trójkątów.

Czy jednak defekt wielokąta można uważać za równoznaczny polu?

Najważniejsze praktyczne znaczenie ma addytywność- możliwość sumowania, np. las 100 hektarowy wraz z przyległym do niego lasem 900 hektarowym daje 1000 hektarowy las. Defekt wielokąta ma tę własność, co udowodnię poniżej.



Stosując analogiczną do euklidesowej zamiany trójkąta w prostokąt, czy w tym przypadku jego nieeuklidesowy zamiennik można udowodnić addytywność wielokątów hiperbolicznych. Środki boków AC i BC łączymy prostą  $m$  i prowadzimy prostopadłe do tej prostej ze wszystkich wierzchołków trójkąta.

Trójkąt ADK jest przystający do trójkąta DMC, a trójkąt BEL do trójkąta CEM. Czworokąt, który powstał nie może być prostokątem, ponieważ nie istnieje on w geometrii Bolyaia-Łobaczewskiego, jest więc on czworokątem Saccheriego. Defekt trójkąta jest równy  $180^\circ - |\angle CAB| - |\angle ABC| - |\angle BCA|$ , defekt czworokąta ABLK jest równy

$$\begin{aligned} (4-2) \times 180^\circ - 90^\circ - 90^\circ - |\angle KAB| - |\angle LBA| &= 180^\circ - |\angle KAB| - |\angle LBA| \text{ wiedząc, że} \\ |\angle KAD| &\equiv |\angle DCM| \wedge |\angle LBE| \equiv |\angle ECM| \\ 180^\circ - |\angle KAD| - |\angle LBE| - |\angle BAC| - |\angle ABC| &= 180^\circ - |\angle MCD| - |\angle MCE| - |\angle BAC| - \\ - |\angle ABC| &= 180^\circ - (|\angle MCD| + |\angle MCE|) - |\angle BAC| - |\angle ABC| = 180^\circ - |\angle ACB| - \\ - |\angle BAC| - |\angle ABC| \end{aligned}$$

Defekty obu figur **są równe** co dowodzi addytywności defektu wielokąta.

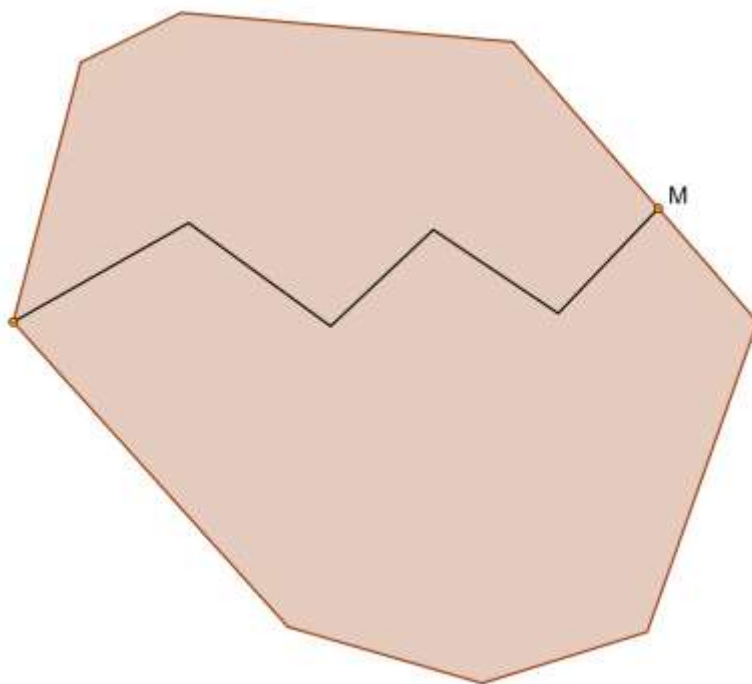
**Twierdzenie. Defekt wielokąta podzielonego łamaną na dwa wielokąty równa się sumie defektów wielokątów składowych.**

Dołączając punkt do wielokąta punkt M nie zmieniając jego defektu,  $(n - 2)180^\circ$  zwiększy się o  $180^\circ$ , ale suma kątów wielokąta zwiększy się wówczas o kąt półpełny M, czyli o  $180^\circ$ . Oznaczmy ilość wierzchołków łamanej literą  $r$ , przez  $\beta$  sumę kątów wielokąta, a przez  $n$  ilość jego wierzchołków.

Ilość wierzchołków wielokątów składowych odpowiednio przez  $p_1$  i  $p_2$ .

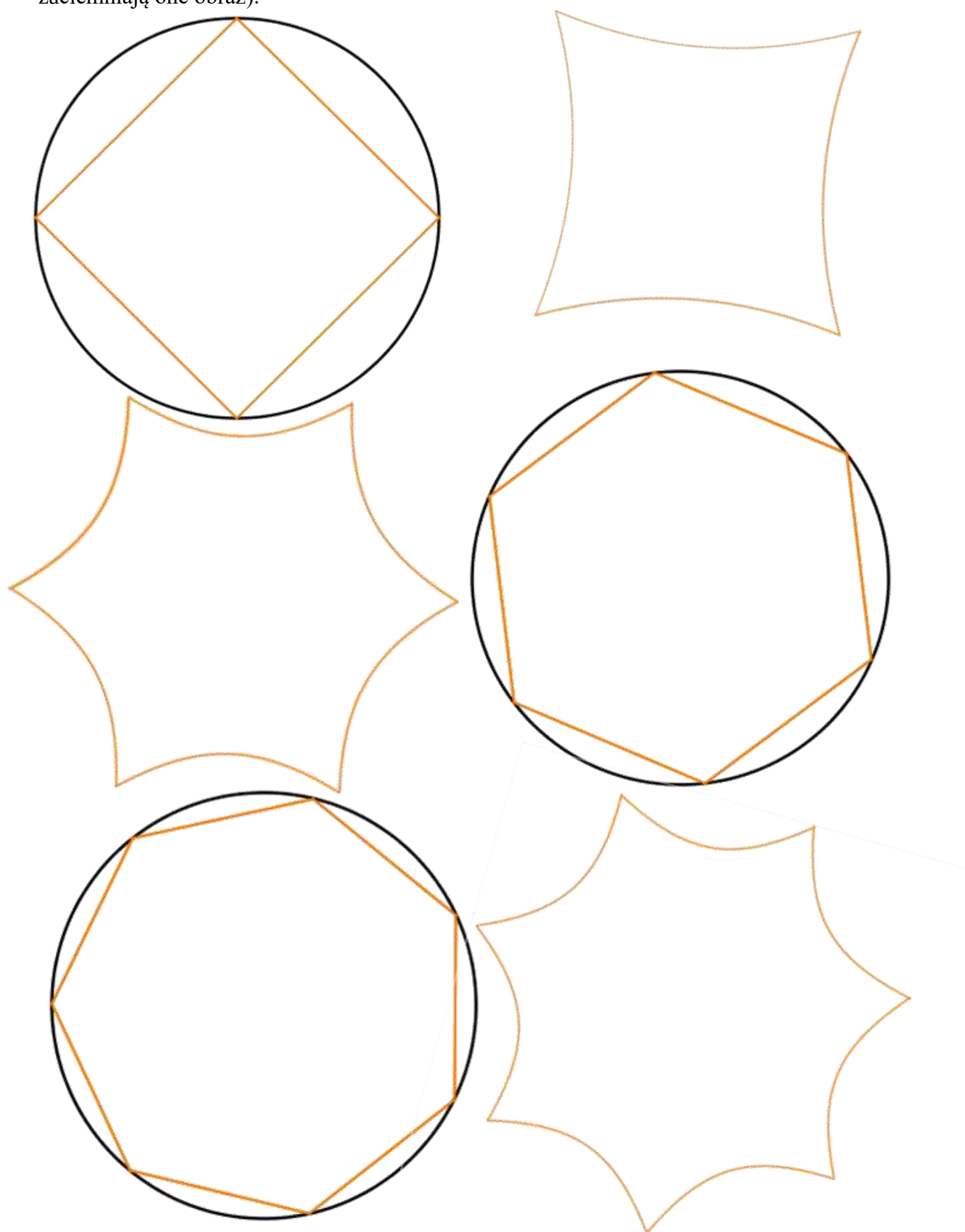
$$p_1 + p_2 = n + 2 + 2r$$

$$\alpha = \beta + r \times 360^\circ$$



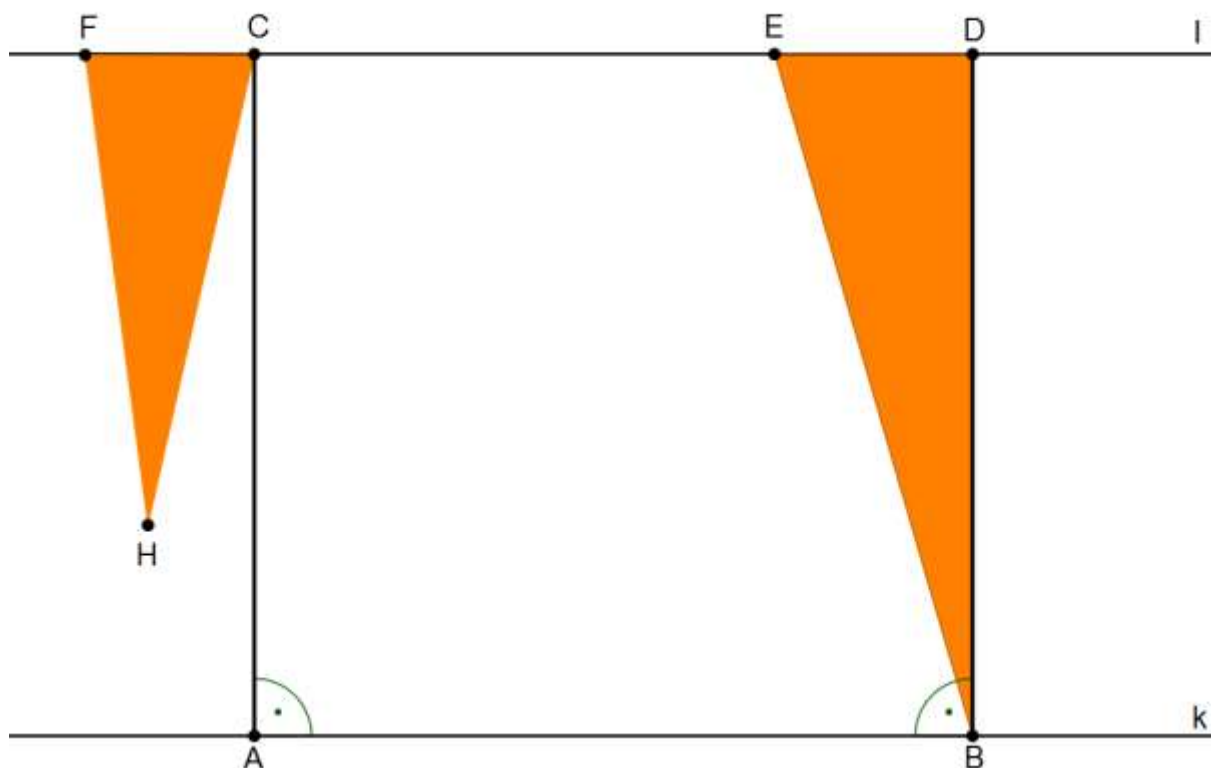
$$\begin{aligned} \text{Defekt I} + \text{Defekt II} &= (n + 2r - 2) \times 180^\circ - \beta - r \times 360^\circ = (n - 2) \times 180^\circ - \beta = \\ &= \text{Defekt Całego Wielokąta} \end{aligned}$$

Maksymalna wartość defektu wielokąta jest równa  $(n - 2) \times 180^\circ$  i zachodzi dla wielokątów całkowicie niewłaściwych. Jak mogłyby wyglądać takie figury pomaga sobie wyobrazić przedstawienie ich boków jako łuków (właściwie powinny być to ramiona hiperboli jednak zaciemniają one obraz).





**Kolejną właściwością geometrii hiperbolicznej jest  
brak wypadkowego wektora<sup>13</sup>**



Przesuwamy odcinek AC do położenia BD po prostej k. Teraz przesuwamy odcinek BD po prostej l, która łączy D i C, tak by D znalazł się w C. Wyobraźmy sobie, że do BD przymocowaliśmy odcinek DE. Przesuwamy go po prostej l aż zajmie położenie CF. Kąty BDE i ACD są górnymi kątami czworokąta Saccheriego ABCD, są więc ostre. W takim razie kąt ACF jest rozwarty (muszą razem z kątem ACD tworzyć kąt półpełny). Ramię BD nie upadnie na CA, lecz wewnątrz kąta rozwartego, np. na CH.

Po dokonaniu dwóch przesunięć punkt C zajął swoje początkowe położenie natomiast punkt A nie powrócił do początkowego położenia. Ten sam wynik otrzymalibyśmy obracając odcinek AC dookoła punktu C o odpowiedni kąt. Wykonanie dwóch przesunięć jest w tym przypadku równoznaczne obrotowi, a nie przesunięciu.

**Przesunięcia nieeuklidesowe nie tworzą grup.**

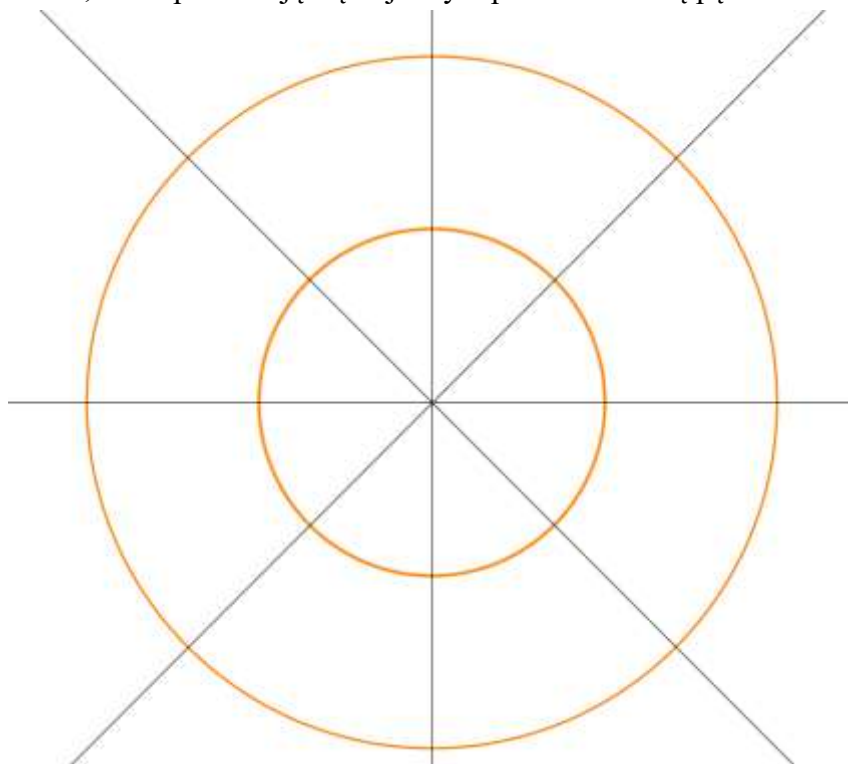
**W geometrii hiperbolicznej dwie proste mogą albo<sup>14</sup>:**

-się przecinać, albo

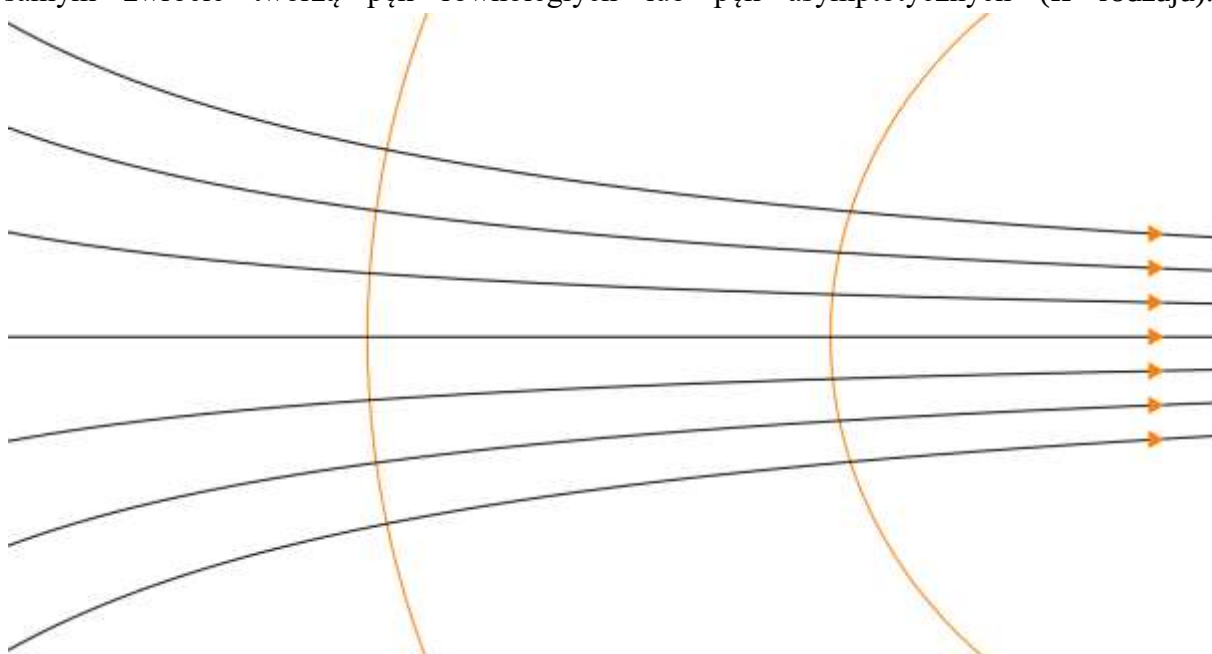
-być równoległe, albo

-być prostopadłe do tej samej prostej.

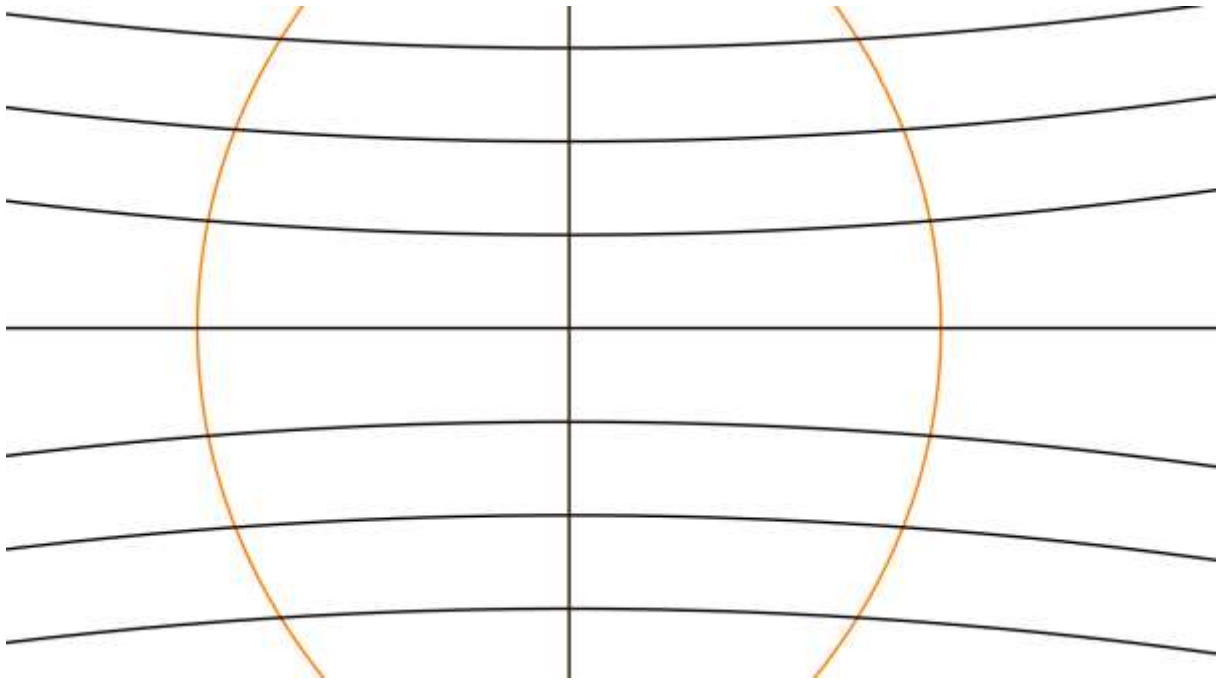
Proste, które przecinają się w jednym punkcie tworzą pęk właściwy (I rodzaju),



proste przechodzące przez ten sam punkt nieskończenie daleki, czyli równoległe w tym samym zwrocie tworzą pęk równoległych lub pęk asymptotycznych (II rodzaju).



Zaś pęk nadrównoległych (III rodzaju) jest tworzony przez wszystkie prostopadłe do tej samej prostej lub inaczej tworzą go wszystkie proste mające wspólną prostopadłą.



Trajektorie ortogonalne, czyli linia przecinająca każdą z prostych danego pęku pod kątem prostym, różnią się.

Dla pęku I rodzaju jest to oczywiście okrąg.

Dla pęku II rodzaju jest to linia zwana horycyklem.

Dla pęku III rodzaju jest to linia zwana ekwidystantą- z łaciny równooddalona.

## Ekwidystanta<sup>15</sup>

**Jest to linia złożona ze wszystkich punktów równooddalonych od prostej leżących po tej samej stronie tejże prostej.**

Tutaj należy zdefiniować odległość punktu A od prostej.

Jest to długość odcinka AA', gdzie A' jest obrazem punktu A przez rzut prostokątny na prostą p.

$$X_A = \frac{1}{2} \ln \frac{|AP|_E}{|AQ|_E} = \frac{1}{2} \ln 1 = 0$$

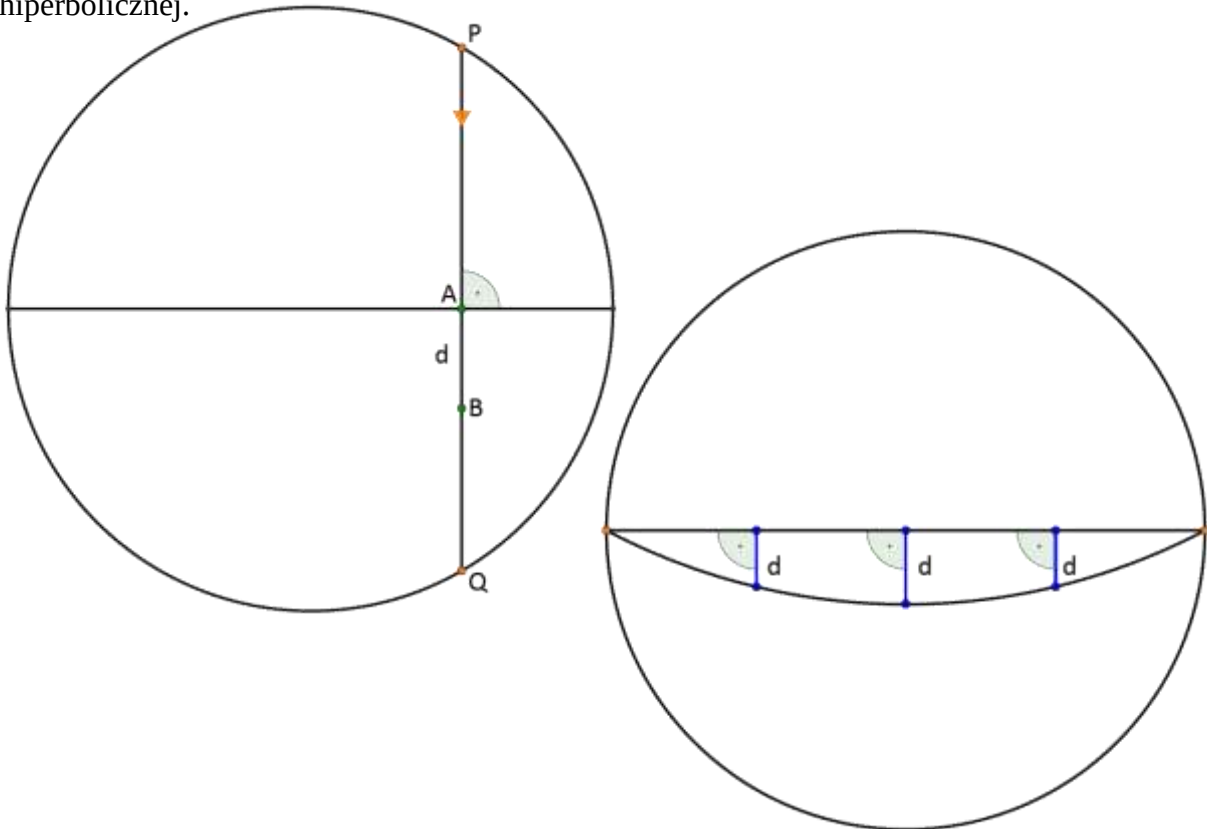
$$X_B = \frac{1}{2} \ln \frac{|AP|_E + |AB|_E}{|AP|_E - |AB|_E} = \frac{1}{2} \ln \frac{|AP|_E - |AB|_E - 2|AB|_E}{|AP|_E - |AB|_E} = \frac{1}{2} \ln \left( 1 + 2 \frac{|AB|_E}{|AP|_E - |AB|_E} \right)$$

$$d = |X_A - X_B| = \frac{1}{2} \ln \left( 1 + 2 \frac{|AB|_E}{|AP|_E - |AB|_E} \right)$$

$$2d = \ln \left( 1 + 2 \frac{|AB|_E}{|AP|_E - |AB|_E} \right), \text{ zatem } \frac{|AB|_E}{|AP|_E - |AB|_E} = \frac{e^{2d}}{2} \text{ i stąd wynika, że}$$

$$\frac{|AB|_E}{|AP|_E} = \frac{|AB|_E}{|AQ|_E} = \frac{e^{2d}-1}{e^{2d}+1} = \textbf{const}$$

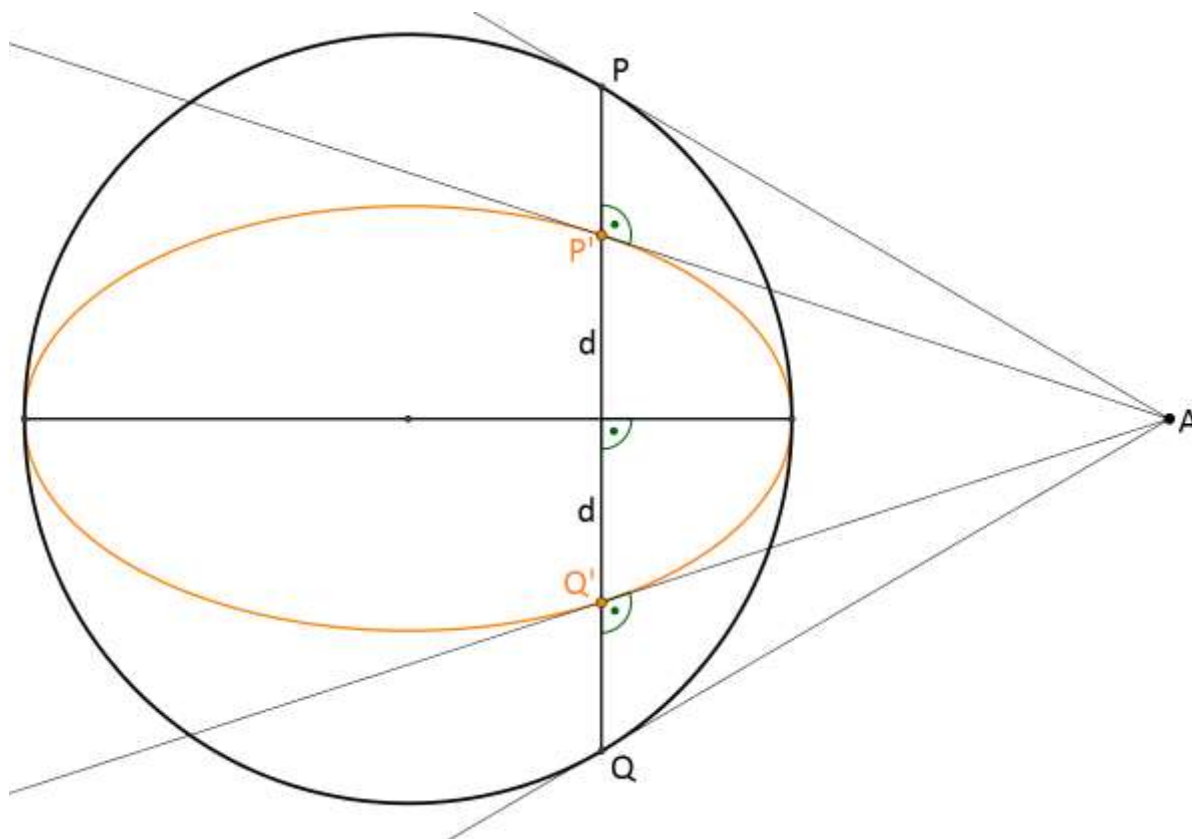
Przy ustalonej wartości d stosunek długości odcinka AB do odcinka AQ jest stały. W miarę przesuwania się punktu A (wraz z punktem B leżącym w odległości d na prostopadłej) od środka modelu długość PQ, więc także długość d zmniejsza się, to przesunięcie zakreśla ekwidystantę, która nie jest prostą, ani w modelu, ani w geometrii hiperbolicznej.



## Dowód, prostokątności ekwidystanty do każdej prostej prostopadłej do prostej bazowej<sup>16</sup>

Prosta bazowa jest średnicą modelu, prostopadłymi do niej są proste euklidesowo prostopadłe. Prowadzimy styczną do ekwidystanty w punkcie  $P'$  (i dla drugiej ekwidystanty w punkcie  $Q'$ ). Wiedząc, że ekwidystanta jest półelipsą powstałą poprzez spłaszczenie okręgu będącego brzegiem modelu możemy skorzystać z faktu, że istnieje w geometrii euklidesowej przekształcenie okręgu w elipsę- powinowactwo prostokątne względem ustalonej prostej. W tym przypadku jest to prosta, na której leży nieeuklidesowa prosta bazowa ekwidystanty. Nie będziemy zajmować się tym przekształceniem, jednak skorzystamy z kilku jego własności:

- proste przekształcają się na proste,
- jeśli prosta  $p$  przechodzi przez punkt  $X$ , to jej obraz prosta  $p'$  przechodzi przez punkt  $X'$
- styczność jest zachowana.



Punkt  $A$  leży na osi przekształcenia więc jest swoim obrazem  $A'$ . Półproste  $AP'$  i  $AQ'$  są styczne do ekwidystant i przechodzą przez punkt  $A$  leżący na przedłużeniu średnicy, z własności modelu wynika, że styczne przecinają prostą  $PQ$  pod kątem prostym, czyli ekwidystanta przecina tę prostą pod kątem prostym.

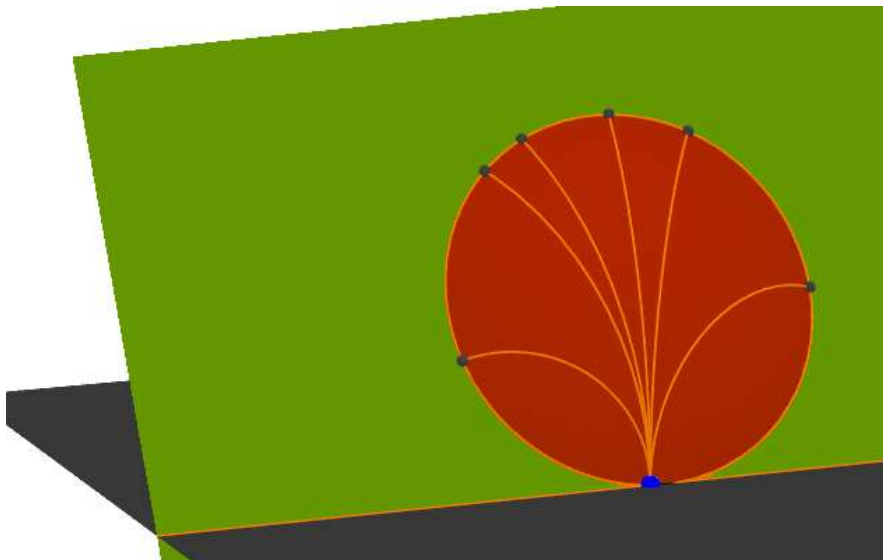
## Horycykl<sup>17</sup>

Wprzeciwieństwie do ekwidystanty nie posiada odpowiednika w geometrii euklidesowej.

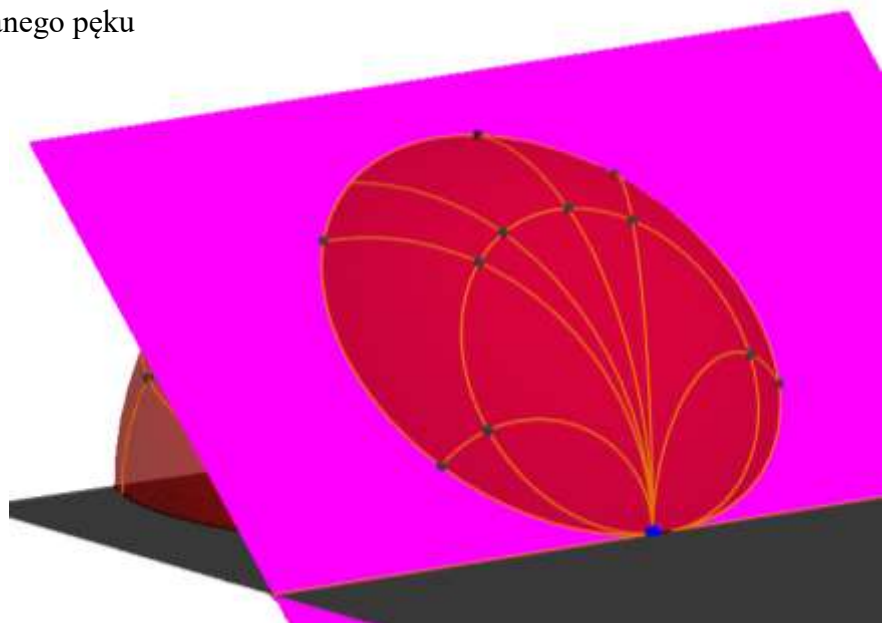
Horycyklem nazywamy linię prostopadłą do każdej prostej ustalonego pęku asymptotycznych.

Jaki kształt ma horycykl w modelu Kleina i jak go narysować?

Do modelu dołączamy półsferę o wspólnym brzegu, wyznaczay na niej półokręgi zawarte w płaszczyznach prostopadłych do modelu i zawierających poszczególne proste i mające wspólne z cięciwami (które reprezentują proste) końce. Przecinamy półsferę dowolną płaszczyzną euklidesową, której punkty wspólne z modelem leżą na prostej stycznej do modelu w punkcie stanowiącym początek pęku prostych, dla których wyznaczamy horycykl. Przekrój płaszczyzny z półsferą jest okręgiem euklidesowym, który jest styczny z modelem w punkcie będącym początkiem pęku równoległych.

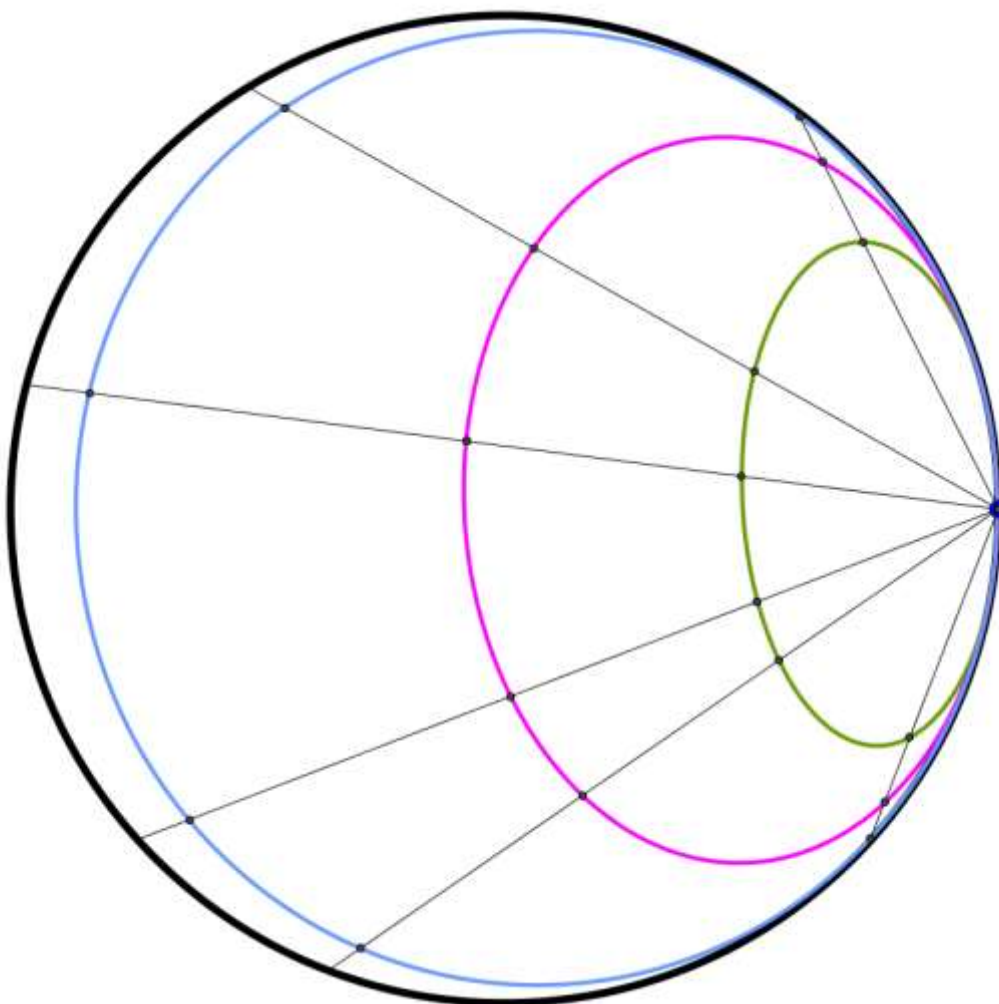
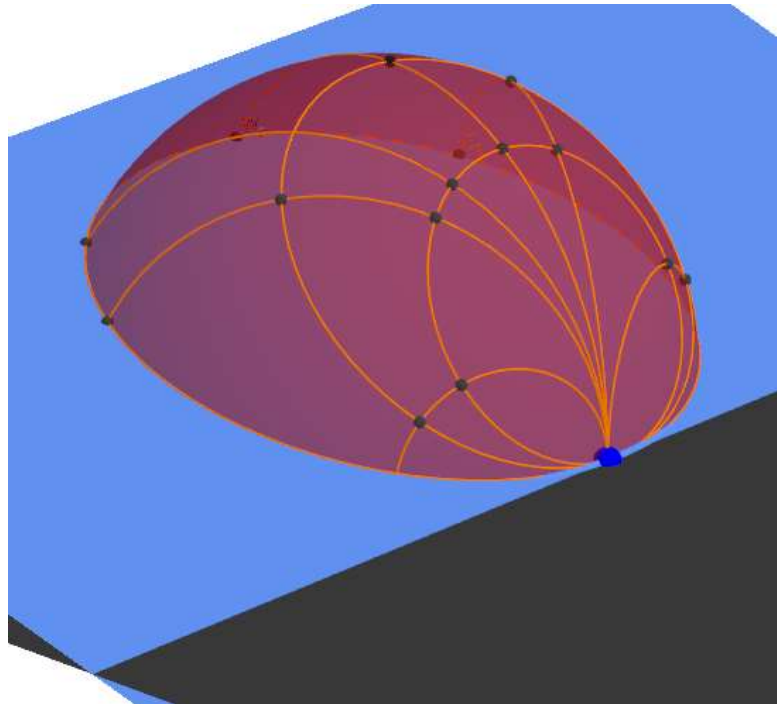


Rzutując ten okrąg na model  
otrzymujemy horycykl danego pęku



Kolor horycyklu odpowiada kolorowi płaszczyzny, która zawiera okrąg, którego rzutem jest horycykl.

Horycykl można uznać za okrąg o nieskończonym promieniu.



Wszystkie horycykle są przystające, wynika to z tego, że pęki równoległych są przystające.

## Przestrzeń hiperboliczna<sup>18</sup>

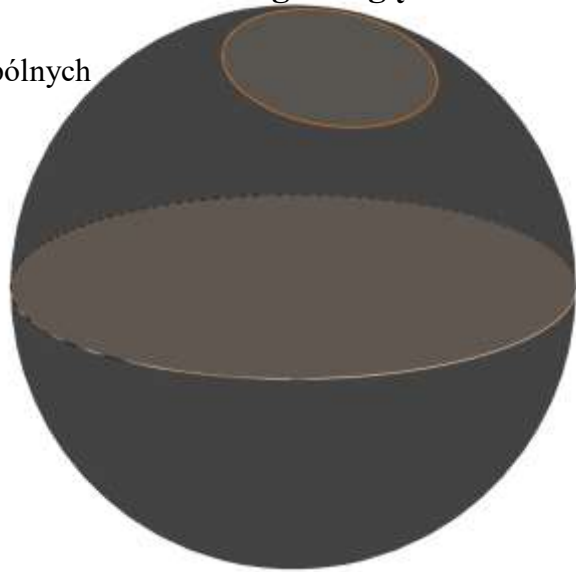
Przestrzeń hiperboliczną, analogicznie do płaszczyzny, przedstawiamy modelem Beltramiiego-Kleina w kuli. Umowy interpretacyjne:

1. Punkt hiperboliczny jest to euklidesowy punkt wewnętrznego (oddalonego  $0 \leq r$  od środka sfery) obszaru danej sfery (zwanej sferą podstawową).
2. Prosta hiperboliczna jest to euklidesowa cięciwa sfery podstawowej bez końców (zwanych punktami niewłaściwymi prostej hiperbolicznej).
3. Płaszczyzna hiperboliczna jest to koło przekroju sfery podstawowej euklidesową płaszczyzną, bez okręgu ograniczającego to koło (bez miejsca geometrycznego punktów niewłaściwych płaszczyzny hiperbolicznej).
4. Przynależność hiperboliczna jest to przynależność euklidesowa.
5. Uporządkowanie hiperboliczne jest to uporządkowanie euklidesowe.
6. Ruch hiperboliczny jest to kolineacja automorficzna zachowująca sferę podstawową.

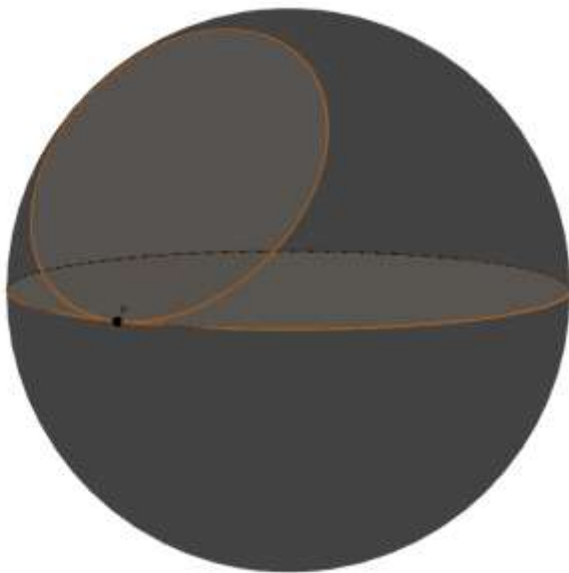


## Dwie płaszczyzny w geometrii Łobaczewskiego mogą<sup>19</sup>:

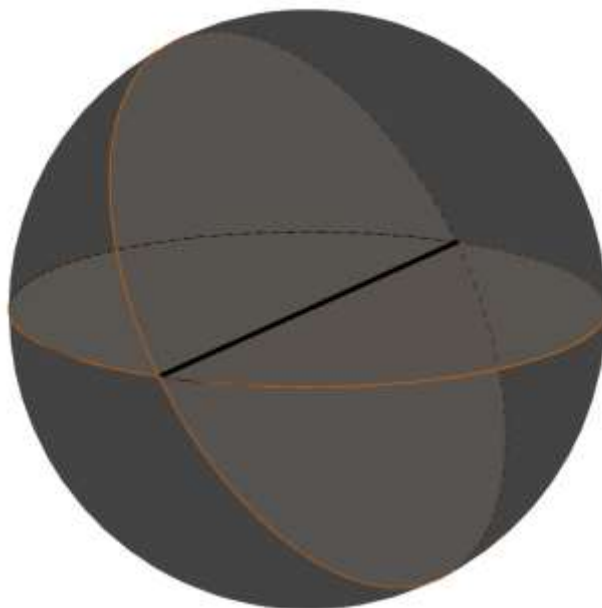
-nie mieć punktów nieskończenie dalekich wspólnych  
(płaszczyzny rozbieżne)→



- mieć 1 punkt nieskończenie daleki wspólny  
←(płaszczyzny równoległe)

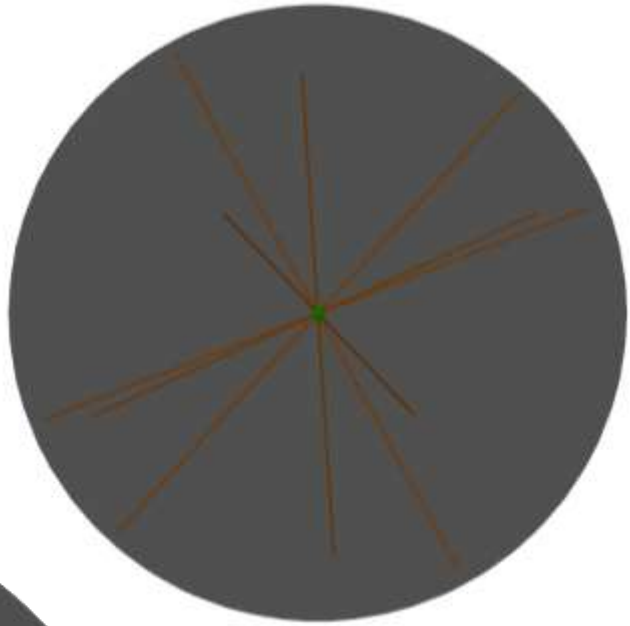


-mieć 2 takie punkty wspólne  
(płaszczyzny przecinające się)→

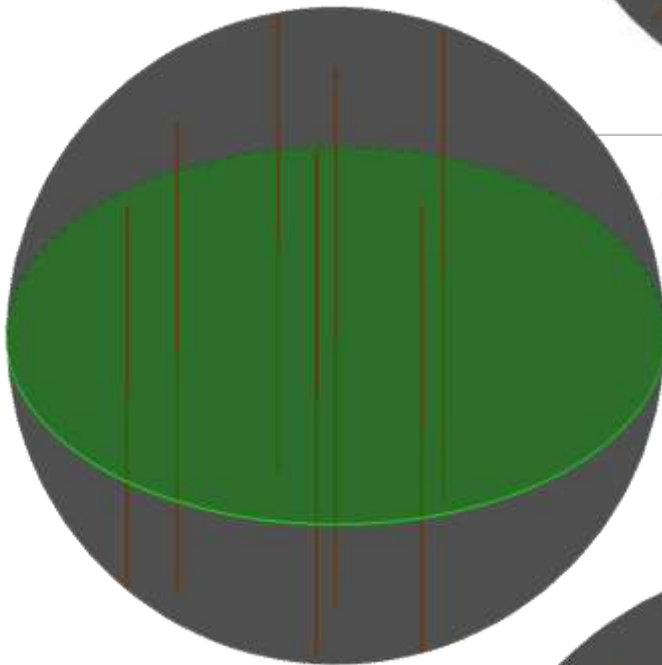


## Wiązki prostych w przestrzeni hiperbolicznej<sup>20</sup>

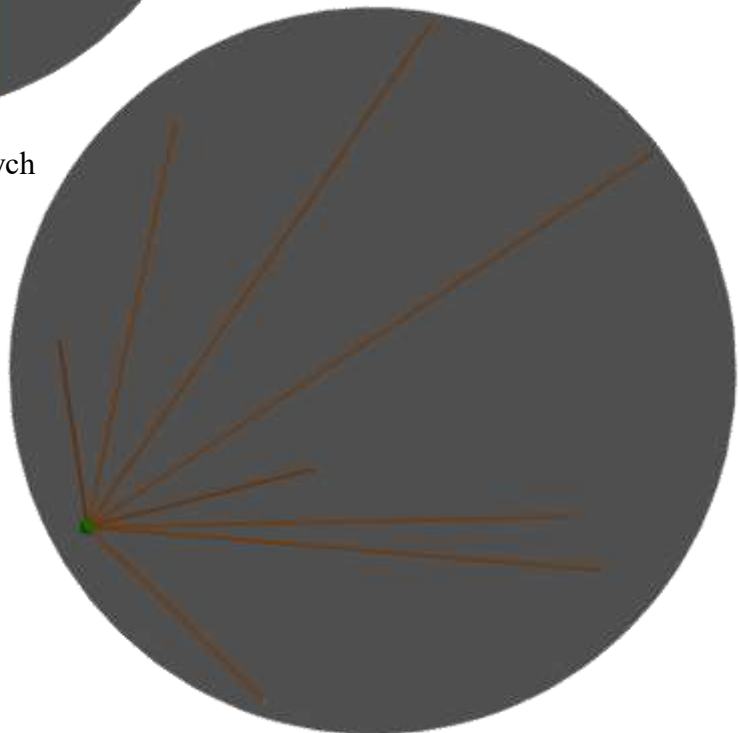
**Wiązka środkowa**- zespół prostych przechodzących przez dany punkt.



**Wiązka hiperboliczna**- zespół prostych prostopadłych do danej płaszczyzny.

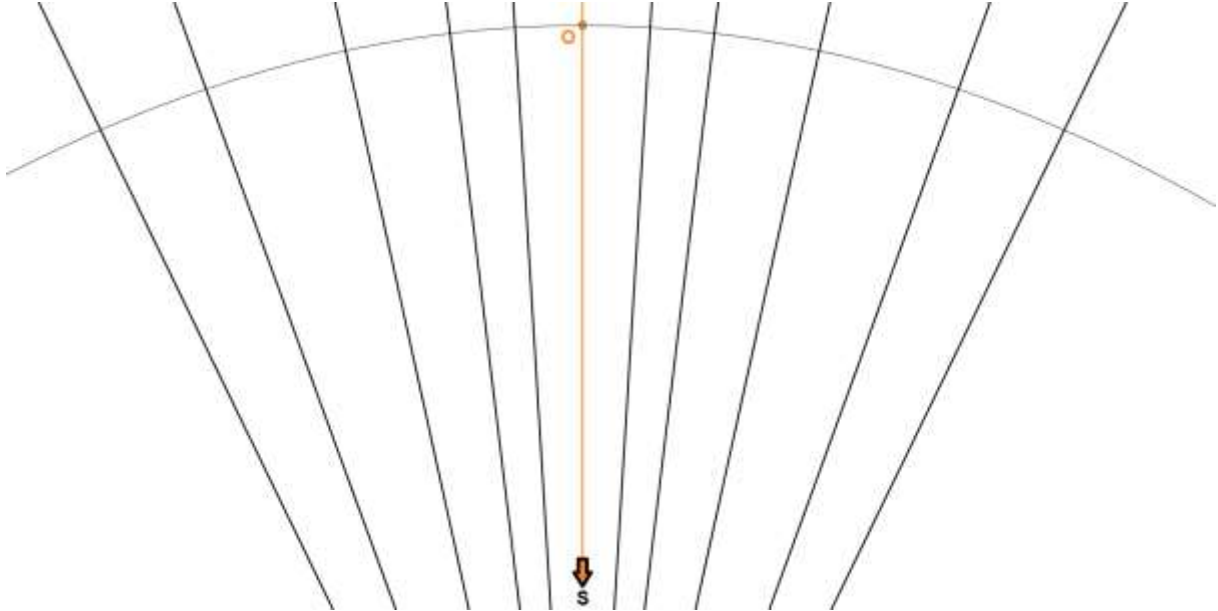


**Wiązka paraboliczna**- zespół prostych równoległych w jednym kierunku.

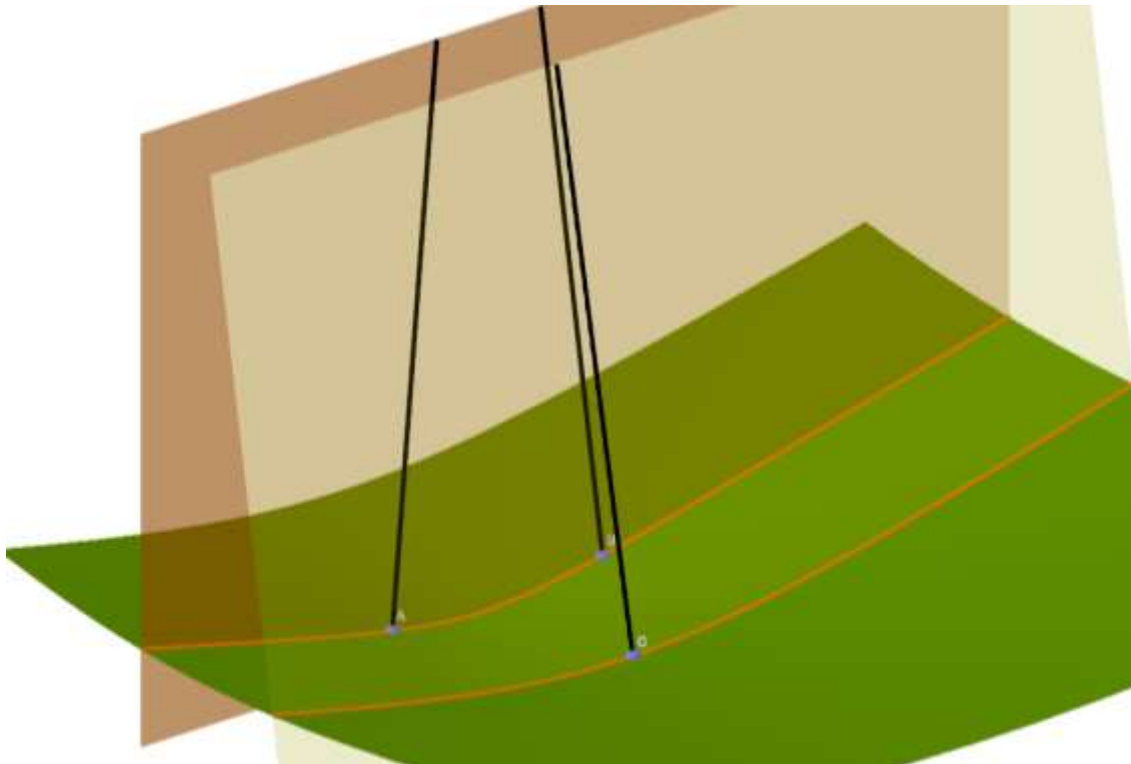


## Horysfera<sup>21</sup>

Horysferą lub powierzchnią graniczną nazywamy powierzchnię złożoną ze wszystkich punktów symetrycznych do danego punktu  $O$  względem prostych wiązki parabolicznej. Punkt  $S$  nieskończenie daleki, z którego wychodzą proste wiązki, nazywamy środkiem horysfery, a promieniami horysfery nazywamy półproste łączące punkt  $S$  z punktami horysfery.



Punkt  $C$  i horycykl  $AB$  leżą na powierzchni granicznej. Punkt  $C$  leży na horysferze jednak nie należy do tego horycyklu. Prowadzimy półproste  $AS$ ,  $BS$ ,  $CS$  łączące dane punkty powierzchni granicznej ze środkiem horysfery. Półproste  $AS$  i  $BS$  są zawarte w płaszczyźnie  $\alpha$ . Przez punkt  $C$  przechodzi tylko jedna płaszczyzna  $\gamma$  nieprzecinająca  $\alpha$ . Linie powstające na przecięciu płaszczyzn  $\alpha$  i  $\gamma$  są horycyklami. Przez punkt  $C$  przechodzi tylko jeden horycykl nie przecinający horycyklu  $AB$ . Na powierzchni granicznej spełniony jest postulat Playfaira



## Czy na horysferze zachodzi geometria euklidesowa<sup>22</sup>?

Zachodzi, ale musimy ustalić kilka pojęć:

1. Punkt jest to punkt horysfery  $\Psi$ .
2. Prosta jest to linia graniczna (horycykl) horysfery  $\Psi$ .
3. Punkt A jest przynależny do horycyklu jeżeli leży na horycyklu.
4. Uporządkowanie. Punkt B leży "pomiędzy" punktami A i C jeżeli punkty A, B, C leżą na linii granicznej i półprosta BS leży między półprostymi AS i CS (kiedy leżą w różnych płaszczyznach względem półprostej BS), gdzie półproste AS, BS i CS należą do wiązki parabolicznej horysfery  $\Psi$ .
5. Ruch jest to przekształcenie punktów i linii granicznych horysfery  $\Psi$  spowodowane takim ruchem euklidesowym w przestrzeni, który punkty i przechodzące przez nie półproste parabolicznej wiązki horysfery przenosi w odpowiednie punkty horysfery  $\Psi$  i półproste odpowiedniej wiązki tej horysfery.

Aksjomaty geometrii euklidesowej są spełnione na horysferze, np.

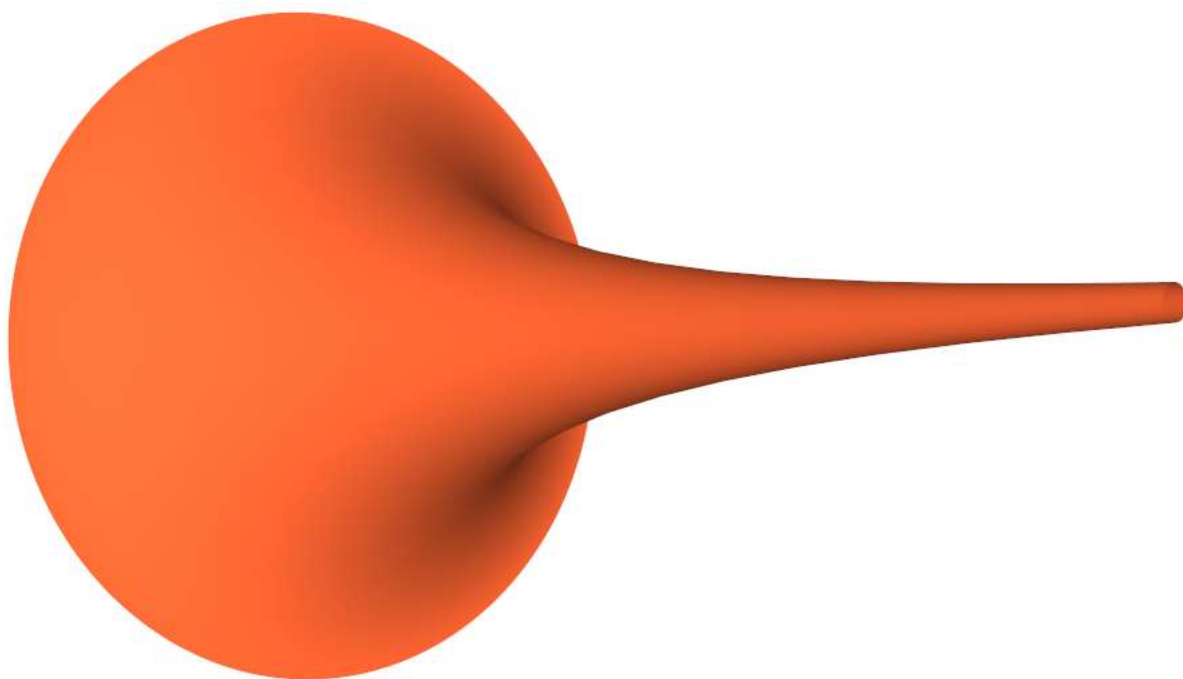
Aksjomaty  $I_1$  i  $I_2$  są spełnione, ponieważ przez każde 2 punkty na powierzchni granicznej przechodzi tylko jedna linia graniczna.

Aksjomat  $I_3$  jest spełniony, ponieważ na horycyklu występuje continuum punktów.

Aksjomat V został udowodniony poprzez wykazania prawdziwości (na powierzchni granicznej) postulatu Playfaira.

Skoro w przestrzeni hiperbolicznej istnieje powierzchnia o własnościach płaszczyzny euklidesowej, to czy w przestrzeni euklidesowej istnieje powierzchnia o własnościach powierzchni hiperbolicznej?<sup>23</sup>

Jest to **pseudosefera**, czyli powierzchnia obrotowa powstała przez obrót traktrysty wokół jej asymptoty. Lokalnie realizuje się na niej geometria Bolyaia-Łobaczewskiego.



Na ilustracji przedstawiłem tylko fragment pseudosfery, ponieważ traktysta rozciąga się w nieskończoność, więc pseudosfera także. Mimo to ma ona ograniczoną powierzchnię i objętość<sup>24</sup>.

**r**- maksymalna odległość punktów pseudosfery od jej osi.

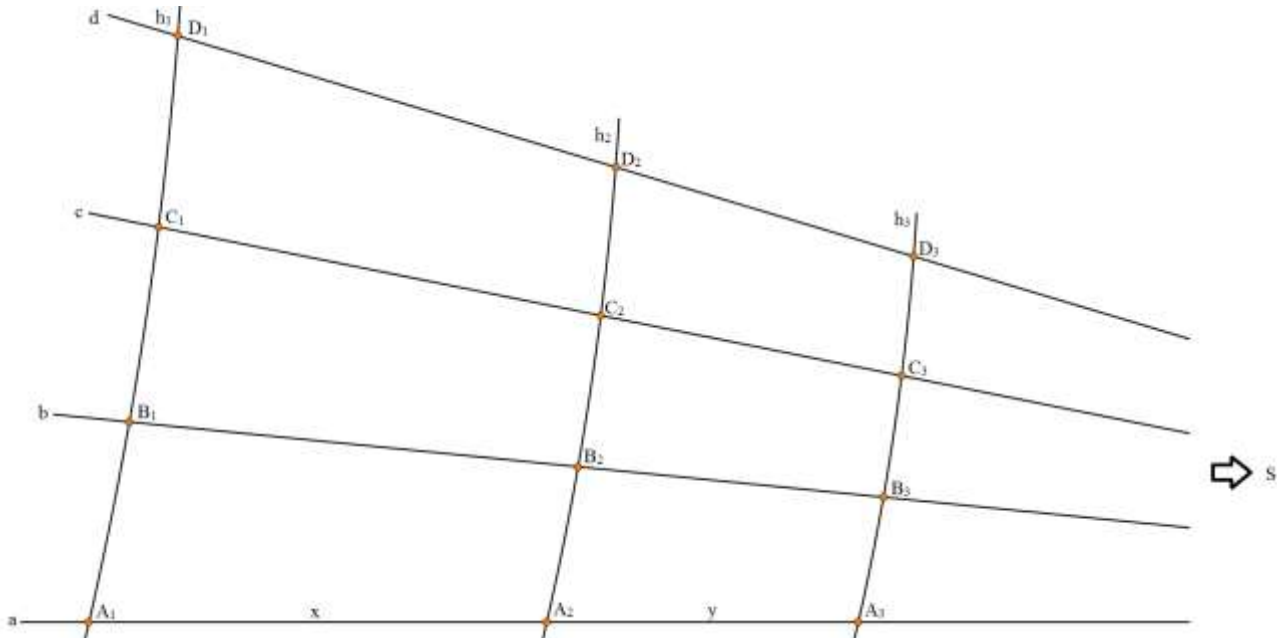
$$S = 4\pi r^4$$

$$V = \frac{2}{3} \pi r^3$$

Objętość i powierzchnia pseudosfery są takie same jak sfery o tym samym promieniu.

## Trygonometria hiperboliczna<sup>25</sup>

Długość łuku horycyklu można określić jako granicę długości łamanych wpisanych w łuk lub jako kres górny długości tych łamanych. Nie będę się nad tym rozpisywał, ponieważ nie jest to zbyt istotne. Wystarczy wiedzieć, że każdy łuk horycyklu ma swoją "długość" i że przy łączeniu łuków ich długości się dodają. Niech „ $\frown$ ” oznacza łuk horycyklu.



Horycikle  $h_1$ ,  $h_2$  i  $h_3$  o środku  $S$  są przecinane przez proste pęku równoległych.  $\frown A_1 B_1 = \frown B_1 C_1$  to obracając ten horycykl wokół środka  $S$  o odpowiedni kąt nałożymy pierwszy horycykl na drugi. Co więcej prosta  $a$  nałoży się na prostą  $b$ , a  $b$  na  $c$ . To samo tyczy się łuku  $A_2 B_2$ , który nakłada się na łuk  $B_2 C_2$  z czego wynika, że  $\frown A_2 B_2 = \frown B_2 C_2$ . Jeżeli łuki na horycyklu  $h_1$  są równe to odpowiednie łuki na horycyklu  $h_2$  też są równe, ponieważ horycikle te są współśrodkowe  $\Rightarrow \frac{\frown A_1 C_1}{\frown C_1 D_1} = \frac{m}{n}$ , jeżeli  $\frown A_1 B_1$  składa się z  $m$  równych części, a  $\frown C_1 D_1$  jest zbudowany z  $n$  części takiej samej wielkości, to podobnie ma się rzecz z łukami  $A_2 C_2$  i  $C_2 D_2$  horycyklu  $h_2$ . Stosunek  $\frac{m}{n}$  także zachodzi dla łuków horycyklu  $h_2$ , więc:

$$\frac{\frown A_1 C_1}{\frown C_1 D_1} = \frac{\frown A_2 C_2}{\frown C_2 D_2}$$

W sposób identyczny z dowodem twierdzenia Talesa w geometrii euklidesowej można pokazać, że proporcja ta zachodzi także, gdy stosunek  $\frac{\frown A_1 C_1}{\frown C_1 D_1}$  nie jest liczbą wymierną.

**Odpowiednie łuki horycyków współśrodkowych są proporcjonalne.**

$$\frac{\frown A_1 C_1}{\frown A_2 C_2} = \frac{\frown C_1 D_1}{\frown C_2 D_2} = \text{const.}$$

Stała ta zależy od tego jakie są horycikle  $h_1$  i  $h_2$  oraz jest większa od 1, ponieważ  $\frown A_2 C_2 < \frown A_1 C_1$  cechą charakterystyczną figury zbudowanej z dwóch horycyków współśrodkowych jest odległość między nimi, czyli długość odcinka  $A_1 A_2 = x$ , stała wartość stosunku  $\frac{\frown A_1 C_1}{\frown A_2 C_2}$  jest pewną funkcją tej zmiennej:

$$\frac{\cap A_1 C_1}{\cap A_2 C_2} = f(x)$$

Oddalając punkt  $A_2$  na prawo od  $A_1$  (w kierunku S) równoległe  $a$  i  $c$  zbliżają się do siebie, więc długość łuku horycyklu  $A_2 C_2$ . Niech  $A_2 A_3 = y$ , wtedy stosunek łuków  $\cap A_2 C_2$  i  $\cap A_3 C_3$  horycyklów  $h_2$  i  $h_3$  oddalonych o  $y$  jest równy  $f(y)$ , tj.

$$\frac{\cap A_2 C_2}{\cap A_3 C_3} = f(y)$$

Po przemnożeniu obu stosunków mamy:

$$\frac{\cap A_1 C_1}{\cap A_3 C_3} = f(x)f(y)$$

Ponadto odległość między horycyklami  $h_1$  i  $h_3$  wynosi  $x + y$ , więc

$$\frac{\cap A_1 C_1}{\cap A_3 C_3} = f(x + y)$$

Dla każdego dodatniego  $x$  i dodatniego  $y$  mamy równość:

$$f(x)f(y) = f(x + y),$$

która pozostaje prawdziwa dla  $x=0$  i  $y=0$ .

Wyznaczenie funkcji dodatniej rosnącej jednej zmiennej, która spełnia równanie funkcyjne

$$f(x)f(y) = f(x + y)$$

dla wszystkich nieujemnych  $x$  i  $y$ .

Rozwiązanie tego równania funkcyjnego zależy od wartości funkcji dla  $x=1$ . Gdy znamy tę wartość, np. równa  $a$ , gdzie  $a>0$ , funkcja jest jednoznacznie określona.

Niech

$$f(1) = a,$$

to

$$f(2) = f(1 + 1) = f(1)f(1) = a \times a = a^2$$

Tak samo dalej

$$f(3) = a^3, \dots, f(k) = a^k \quad (k \in \mathbb{N})$$

Niech  $m \in \mathbb{C}_+$ , wtedy:

$$f(1) = f\left(\underbrace{\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m}}_{m \text{ składników}}\right) = \underbrace{f\left(\frac{1}{m}\right)f\left(\frac{1}{m}\right)\dots f\left(\frac{1}{m}\right)}_{m \text{ czynników}}$$

Jak to wynika z równania funkcyjnego. Zatem:

$$\left[f\left(\frac{1}{m}\right)\right]^m = a \Rightarrow f\left(\frac{1}{m}\right) = a^{\frac{1}{m}}$$

$\Downarrow$

$$f\left(\frac{n}{m}\right) = a^{\frac{n}{m}} \quad \left(\frac{n}{m} \text{ jest liczbą wymierną}\right).$$

Dla wymiernych dodatnich  $x$  funkcja  $f(x)$  ma taką samą wartość co funkcja  $a^x$ , liczba  $a$  musi być większa od 1, ponieważ inaczej funkcja  $f(x)$  nie była by rosnącą. Dla niewymiennych wartości  $x$  funkcja  $f(x)$  musi też przyjmować wartość  $a^x$ , w innym przypadku nie byłaby funkcją rosnącą. Dla wszystkich dodatnich wartości  $x$  mamy:

$$f(x) = a^x$$

Jako, że funkcję wykładniczą powinno się zapisywać jako funkcję o podstawie e, której przybliżona wartość wynosi 2,71828182...

Stałą a możemy zapisać jako  $a = e^b$ , gdzie  $b = \log_e a$ . Jako, że dalej b jest bardzo małą liczbą to zapiszemy  $b = \frac{1}{k}$ . Z tego mamy:

$$a = e^{\frac{1}{k}}, \quad f(x) = e^{\frac{x}{k}}.$$

Wzór:

$$\frac{\cap A_1 C_1}{\cap A_2 C_2} = f(x)$$

przeczytamy jako:

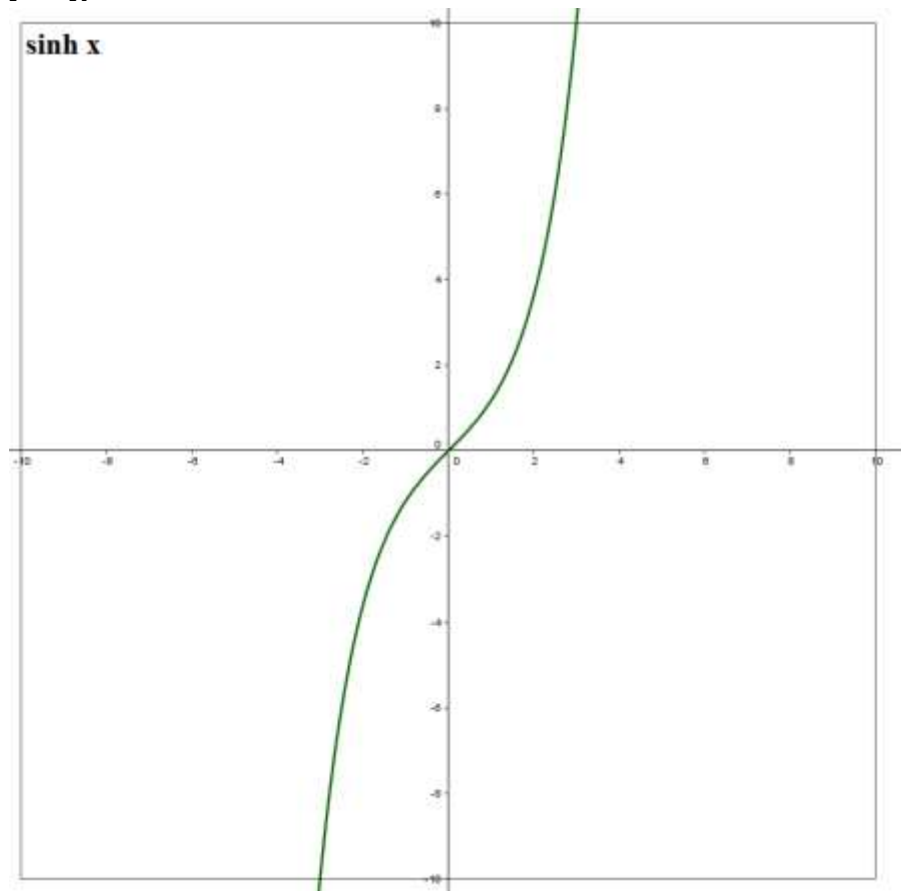
Stosunek odpowiednich łuków dwóch horycyklów współśrodkowych, których odległością jest x, równa się  $e^{\frac{x}{k}}$ , gdzie k jest pewną stałą dodatnią, której wartość zależy od tego jaką wybierzemy jednostkę. Jeśli jednostkę zmniejszymy dwukrotnie, to stosunek łuków horycyklów nie uległ by zmianie, więc także i funkcja  $e^{\frac{x}{k}}$  nie zmieniałaby się, jednakże x zwiększyło by się dwukrotnie, więc k też podwoiłoby się. Jeżeli  $x = k$  to stosunek łuków horycyklów o wspólnym środku jest równy e.  $\Rightarrow$  Wielkość k jest długością pewnego określonego odcinka.

Gdybyśmy mieli kilka horycyklów współśrodkowych o odległościach równych x, to stosunek ich odpowiednich łuków byłby równy  $e^{\frac{x}{k}}$ , więc takie łuki tworzą postęp geometryczny o ilorazie  $\frac{1}{e^{\frac{x}{k}}} = e^{-\frac{x}{k}}$ .

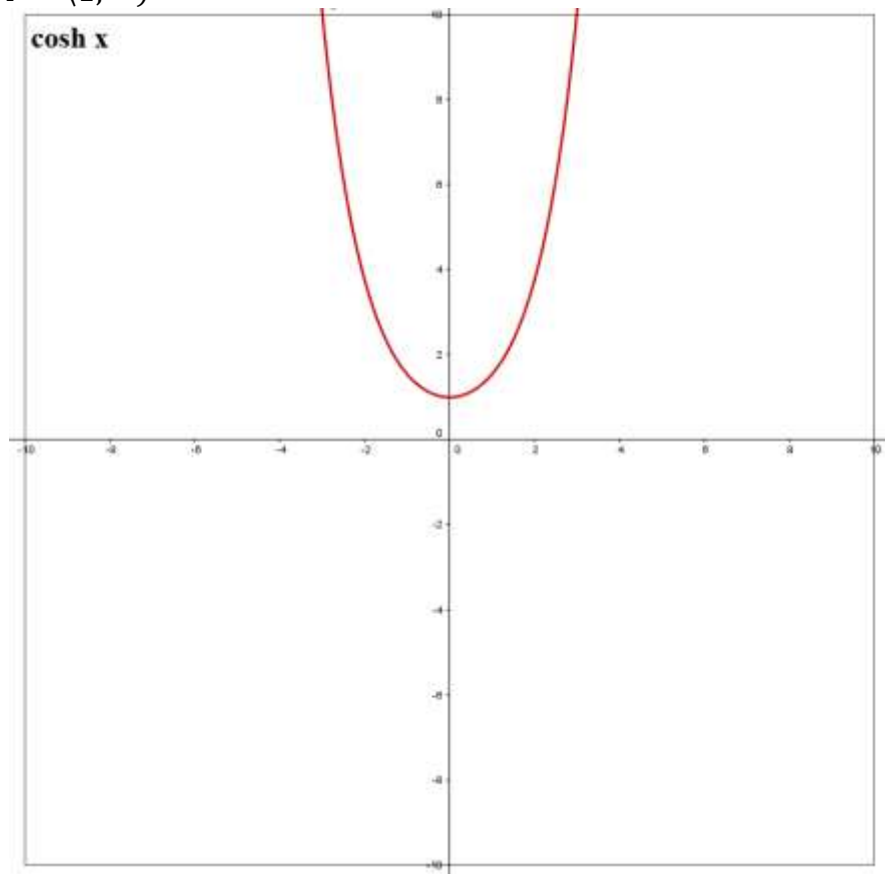
Po wyjaśnieniu dlaczego we wzorach trygonometrycznych w geometrii hiperbolicznej występuje  $e^x$  mogę omówić zależności między nimi.



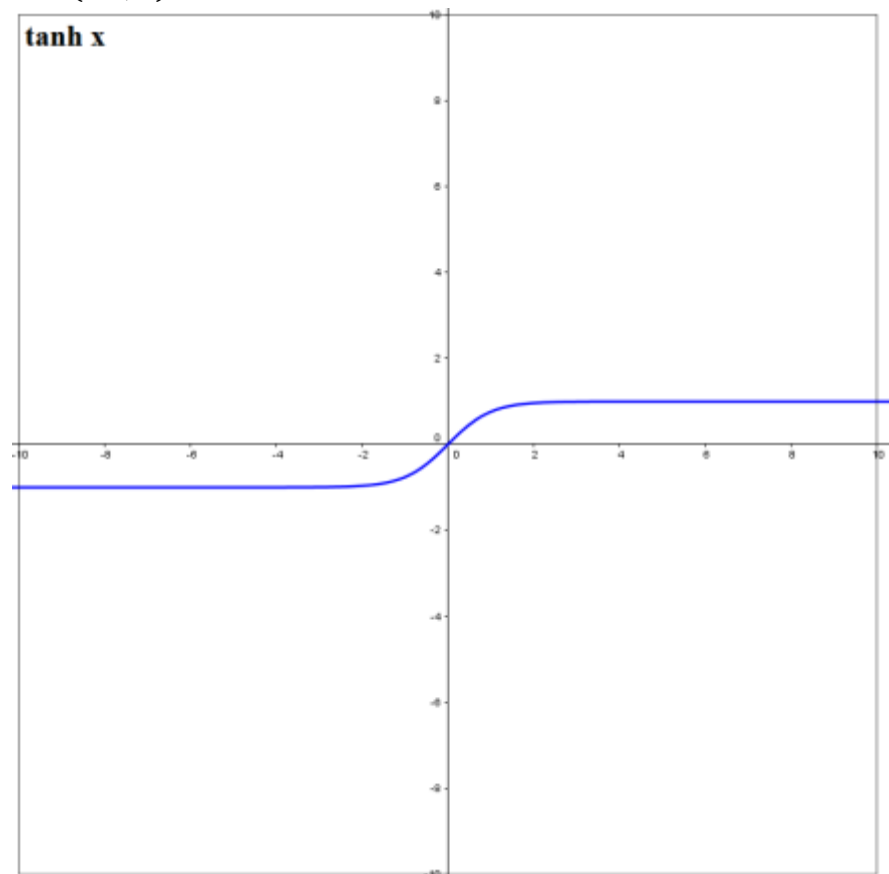
$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \quad X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}^{26}$$



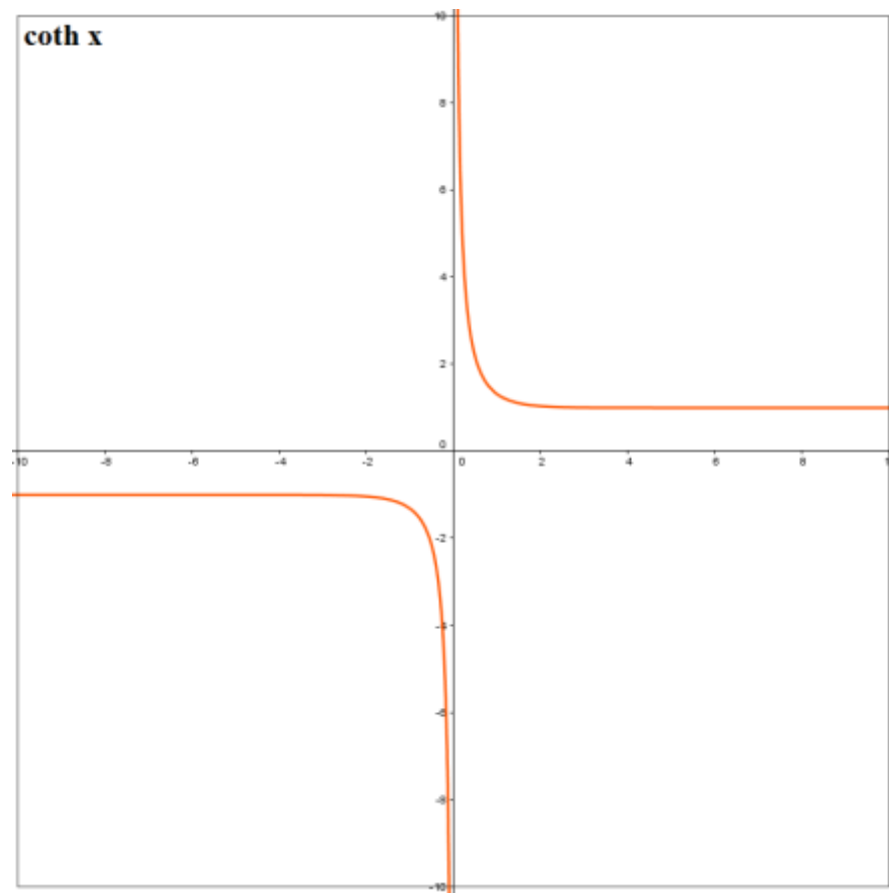
$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \quad X = \mathbb{R}, Y = \langle 1; \infty \rangle^{27}$$



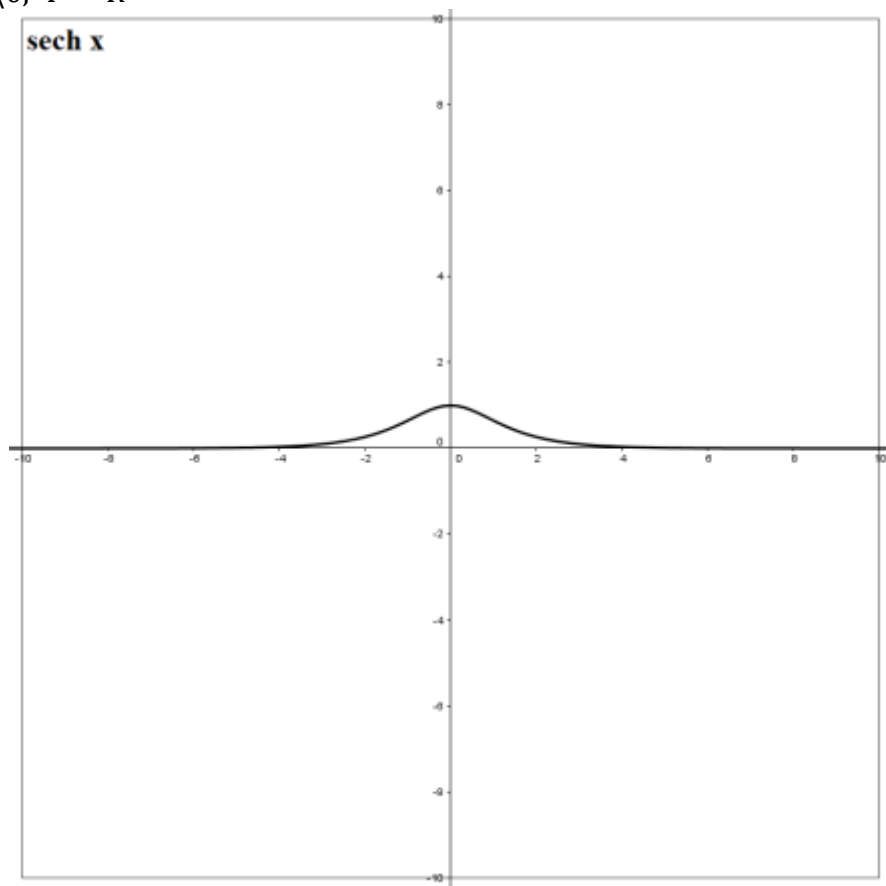
$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \tanh x \quad X = \mathbb{R}, \quad Y = (-1; 1)^{28}$$



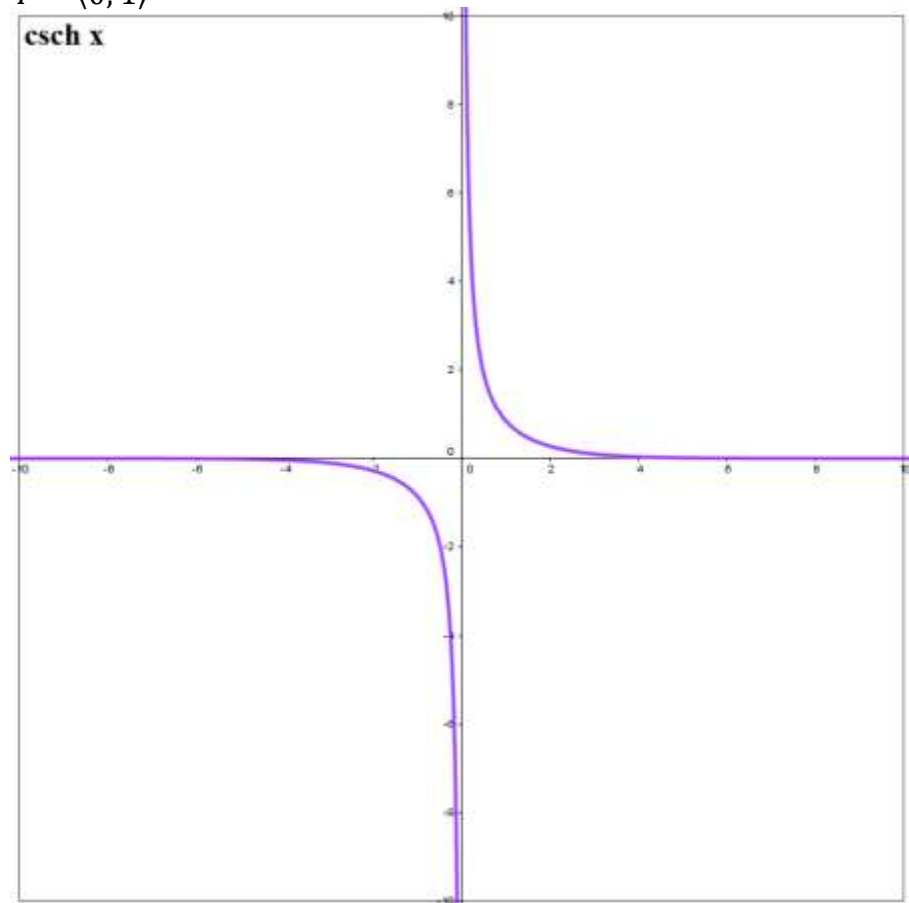
$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \coth x \quad X = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad Y = (-\infty; -1) \cup (1; \infty)^{29}$$



$$\frac{2}{e^x - e^{-x}} = \operatorname{sech} x \quad X = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad Y = \mathbb{R}^{30}$$



$$\frac{2}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{csch} x \quad X = \mathbb{R}, \quad Y = \langle 0; 1 \rangle^{31}$$



## Związki między funkcjami hiperbolicznymi<sup>32</sup>:

Jedynka hiperboliczna

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Jest to tożsamość bardzo podobna do tożsamości znanej z trygonometrii euklidesowej. Co więcej między tymi funkcjami zachodzą kolejne analogie, np. wzór na  $\cosh(x + y)$

Czy jest identyczny z wzorem znanym z klasycznej trygonometrii, cóż prawie jednakże znak „-” jest zastąpiony znakiem „+”, czyli:

$$\begin{aligned} & \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y = \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \times \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^y - e^{-y}}{2} \times \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2}, \end{aligned}$$

a to zgodnie z definicją jest wzór na  $\cosh(x + y)$ .

Podobnie ma się sytuacja z pozostałymi wzorami analogicznymi do wzorów trygonometrii euklidesowej.

Teraz mogę wyjaśnić dlaczego używam liczby  $e$  jako podstawy funkcji wykładniczej, dla bardzo małych wartości  $y$  w przybliżeniu wynosi:

$$e^y = 1 + y \text{ czy konkretniej, że } \frac{e^y - 1}{y} \text{ dąży do jedności gdy } y \text{ dąży do zera.}$$

## Bibliografia

---

<sup>1</sup> <http://expertisebay.wikidot.com/euklides-postulaty>

<sup>2</sup> [https://pl.wikipedia.org/wiki/Geometria\\_hiperboliczna](https://pl.wikipedia.org/wiki/Geometria_hiperboliczna)

<sup>3</sup> Stefan Kulczycki *Biblioteka Problemów Geometria Nieeuklidesowa* Warszawa 1960, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, str. 53

<sup>4</sup> W. Kostin *Podstawy Geometrii*, Warszawa 1953, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, str. 224

<sup>5</sup> Izabela Przezdzińska *Geometria Poincarego i Kleina. Skrypt do zajęć: Podstawy geometrii i elementy geometrii nieeuklidesowej*. Wrocław 2010, Uniwersytet Wrocławski Wydział Matematyki i Informatyki Instytut Matematyczny, str. 10

<sup>6</sup> Izabela Przezdzińska *Geometria Poincarego i Kleina. Skrypt do zajęć: Podstawy geometrii i elementy geometrii nieeuklidesowej*. Wrocław 2010, Uniwersytet Wrocławski Wydział Matematyki i Informatyki Instytut Matematyczny, str. 12

<sup>7</sup> Stefan Kulczycki *Biblioteka Problemów Geometria Nieeuklidesowa* Warszawa 1960, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, str. 63

<sup>8</sup> Stefan Kulczycki *Biblioteka Problemów Geometria Nieeuklidesowa* Warszawa 1960, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, str. 64

<sup>9</sup> Izabela Przezdzińska *Geometria Poincarego i Kleina. Skrypt do zajęć: Podstawy geometrii i elementy geometrii nieeuklidesowej*. Wrocław 2010, Uniwersytet Wrocławski Wydział Matematyki i Informatyki Instytut Matematyczny, str. 27

<sup>10</sup> Stefan Kulczycki *Biblioteka Problemów Geometria Nieeuklidesowa* Warszawa 1960, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, str. 65

<sup>11</sup> Stefan Kulczycki *Biblioteka Problemów Geometria Nieeuklidesowa* Warszawa 1960, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, str. 66

<sup>12</sup> Stefan Kulczycki *Biblioteka Problemów Geometria Nieeuklidesowa* Warszawa 1960, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, str. 75-77

<sup>13</sup> Stefan Kulczycki *Biblioteka Problemów Geometria Nieeuklidesowa* Warszawa 1960, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, str. 91

<sup>14</sup> Marek Kordos, *O różnych geometriach*, Warszawa 1987, Wydawnictwa Alfa, str.25

<sup>15</sup> Izabela Przezdzińska *Geometria Poincarego i Kleina. Skrypt do zajęć: Podstawy geometrii i elementy geometrii nieeuklidesowej*. Wrocław 2010, Uniwersytet Wrocławski Wydział Matematyki i Informatyki Instytut Matematyczny, str. 28-29

<sup>16</sup> Izabela Przezdzińska *Geometria Poincarego i Kleina. Skrypt do zajęć: Podstawy geometrii i elementy geometrii nieeuklidesowej*. Wrocław 2010, Uniwersytet Wrocławski Wydział Matematyki i Informatyki Instytut Matematyczny, str. 29-30

---

<sup>17</sup> Izabela Przewdzink *Geometria Poincarego i Kleina. Skrypt do zajęć: Podstawy geometrii i elementy geometrii nieeuklidesowej*. Wrocław 2010, Uniwersytet Wrocławski Wydział Matematyki i Informatyki Instytut Matematyczny, str. 31

W. Kostin Podstawy Geometrii, Warszawa 1953, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, str. 271-276

Stefan Kulczycki *Biblioteka Problemów Geometria Nieuuklidesowa* Warszawa 1960, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, str. 92-96

<sup>18</sup> W. Kostin Podstawy Geometrii, Warszawa 1953, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, str. 231

<sup>19</sup> Stefan Kulczycki *Biblioteka Problemów Geometria Nieuuklidesowa* Warszawa 1960, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, str. 99-100

<sup>20</sup> W. Kostin Podstawy Geometrii, Warszawa 1953, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, str. 277

<sup>21</sup> W. Kostin Podstawy Geometrii, Warszawa 1953, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, str. 281-287

Stefan Kulczycki *Biblioteka Problemów Geometria Nieuuklidesowa* Warszawa 1960, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, str. 102-108

<sup>22</sup> W. Kostin Podstawy Geometrii, Warszawa 1953, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, str. 283-286

<sup>23</sup> Stefan Kulczycki *Biblioteka Problemów Geometria Nieuuklidesowa* Warszawa 1960, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, str. 109

<sup>24</sup> <https://pl.wikipedia.org/wiki/Pseudosfera>

<sup>25</sup> Stefan Kulczycki *Biblioteka Problemów Geometria Nieuuklidesowa* Warszawa 1960, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, str. 110-114

W. Kostin Podstawy Geometrii, Warszawa 1953, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, str. 297-300

<sup>26</sup> [https://www.wolframalpha.com/input/?i=sinh\(x\)](https://www.wolframalpha.com/input/?i=sinh(x))

<sup>27</sup> [https://www.wolframalpha.com/input/?i=cosh\(x\)](https://www.wolframalpha.com/input/?i=cosh(x))

<sup>28</sup> [https://www.wolframalpha.com/input/?i=tanh\(x\)](https://www.wolframalpha.com/input/?i=tanh(x))

<sup>29</sup> [https://www.wolframalpha.com/input/?i=coth\(x\)](https://www.wolframalpha.com/input/?i=coth(x))

<sup>30</sup> [https://www.wolframalpha.com/input/?i=sech\(x\)](https://www.wolframalpha.com/input/?i=sech(x))

<sup>31</sup> [https://www.wolframalpha.com/input/?i=csch\(x\)](https://www.wolframalpha.com/input/?i=csch(x))

<sup>32</sup> Stefan Kulczycki *Biblioteka Problemów Geometria Nieuuklidesowa* Warszawa 1960, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, str. 115-118

**Wszystkie ilustracje zostały wykonane przeze mnie na bazie rysunków i opisów ze źródeł.**