Gimnazjum Nr1 im. Tadeusza Kościuszki
w Nowym Targu
Plac Słowackiego 14, 34 – 400 Nowy Targ
(18) 2665944, gimnazjum1@nowytarg.pl

Równania diofantyczne

Jakub Jarząbek

Klasa 1 F

Opiekun pracy

Anna Kutyła

Kraków luty 2016

Spis treści

Wstęp

Nazywam się Jakub Jarząbek. Mam 13 lat. Jestem uczniem pierwszej klasy Gimnazjum Nr1 im. Tadeusza Kościuszki.

Na temat pracy wybrałem „Równania diofantyczne”. Będąc jeszcze w szóstej klasie szkoły podstawowej zainteresowałem się tym działem matematyki. Postanowiłem rozszerzyć wiedzę w tym temacie.

materiałów na temat tych równań zaciekawił mnie ich twórca - Diofantos , grecki matematyk żyjący w III w. n.e. w Aleksandrii. Był on autorem dzieła Arytmetyka, składającego się z 13 ksiąg, z których zachowało się 6 w języku greckim i 4 przetłumaczone na arabski.

Gdy już wybrałem temat zająłem się rozwiązywaniem zadań pod okiem pani od matematyki; równania rozwiązywałem m.in. metodą Euklidesową, metodą Eulera i innymi.

Równanie diofantyczne *to równanie, którego rozwiązania szuka się w zbiorze liczb całkowitych lub liczb naturalnych. Zwykle rozważa się równania diofantyczne o dwóch lub więcej niewiadomych – równania z jedną dają się rozwiązać metodami algebraicznymi. Nazwa równań pochodzi od ich twórcy Diofantosa.*

Diofantos

Przełomu w greckiej tradycji matematycznej dokonał dopiero działający w III w. n.e. wybitny matematyk Diofantos z Aleksandrii (ur: około 200/214 p.n.e, zm: około 284/298 p.n.e).Był to pierwszy uczony, który zajął się głównie algebrą. Działalność Diofantosa przypada na okres upadku Grecji, która, jak wiemy, dostała się pod panowanie Rzymu. Uczeni greccy znaleźli schronienie w Egipcie, głównie w Aleksandrii, będącej w tym czasie centrum kultury ówczesnego świata. Stworzono tam wspaniałą Bibliotekę, która przemieniła się wkrótce w ośrodek myśli humanistycznej, oraz Muzeum (Muzejon) skupiające najwybitniejszych przedstawicieli nauk matematyczno - przyrodniczych. Wśród nich znalazł się właśnie Diofantos, matematyk. Dzięki swoim kontaktom z uczonymi syryjskimi i hinduskimi przeszczepił na grunt hellenistyczny babilońskie zdobycze z dziedziny algebry. Biografia Diofantosa z Aleksandrii nie jest pełna. Mało o nim wiemy, a nawet nie możemy ustalić dokładnych dat jego życia. Pewne szczegóły, mało w istocie ważne, można obliczyć z "Epitafium Diofanta", które umieścił w swojej antologii mnich grecki z XIV w. Maksymus Planudes. Treścią tego wiersza nagrobnego jest następujące zadanie tekstowe:

Pod tym nagrobkiem spoczywa Diofant - a dzięki przedziwnej

Sztuce zmarłego i wiek jego zdradzi ci ten głaz:

Chłopcem przez szóstą część życia pozostać bóg mu pozwolił,

Lica pokwitły mu zaś, kiedy dwunasta znów część

Życia minęła, a znowu żywota gdy przebył część siódmą.

Młodą małżonkę w dom dobry wprowadził mu bóg,

Która, gdy pięć lat minęło, małego powiła mu synka,

Ale okrutny chciał los, że kiedy syn ledwie wiek

Ojca w połowie osiągnął, ponury zabrał go Hades.

Kojący ogromny swój ból, szukał Diofant wśród liczb

Jeszcze przez cztery lata pociechy, aż rozstał się z życiem.

Rozwiązanie:

x – czas życia Diofantosa

1/6x – jego dzieciństwo

1/12x – okres młodości

1/7x – czas między wiekiem młodzieńczym a ślubem

5 – lata oczekiwania na syna

1/2x – czas życia syna

4 – czas, jaki Diofantos żył po śmierci syna.

Rozwiązanie zadania polega na ułożeniu protego równania z jedną niewiadomą:

$1/6x + 1/12x + 1/7x + 5 + 1/2x + 4 = x$

$3/4x + 1/7x + 9 = x \quad / \cdot 28$

$3x=252$

$x=84$

Rozwiązując powyższe zadanie, dowiadujemy się, iż ów słynny Grek nazwany słusznie "ojcem algebry", osiągnął wiek 84 lat. Wiek chłopięcy trwał u niego 14 lat, w 21 roku "pokwitły mu lica", ożenił się mając 33 lata, w 38 roku życia urodził mu się syn, który żył 42 lata, czyli do 80 roku życia Diofanta. Przez dalsze 4 lata szukał uczony pociechy w matematyce.

Głównym dziełem Diofanta jest "Arithmetika" (ok. 250 – 275), składająca się z 13 ksiąg, z których ocalało niestety tylko 6. Są one dowodem genialnych osiągnięć algebraicznych. Uczony rozwiązuje równania do trzeciego stopnia włącznie, wprowadza także więcej niż Babilończycy niewiadomych, które oznacza specjalnymi literami.

Diofantos posługuje się już symbolem odejmowania i stosuje skróty słowne dla poszczególnych określeń i działań. Tak więc jest autorem pierwszego języka algebraicznego. Na przykład równanie: 4 ar 3 mo is 2 ar 9 mo w którym ar (skrót od arithmos - liczba) oznacza niewiadomą, mo {skrót od monas – jedność), is (isos – równy). Przykład powyższy dowodzi, iż Diofantos w miejsce całkowicie słownego opisu wyrażeń algebraicznych {algebra retoryczna) wprowadził oznaczenia skrótowe (algebra synkopatyczna).

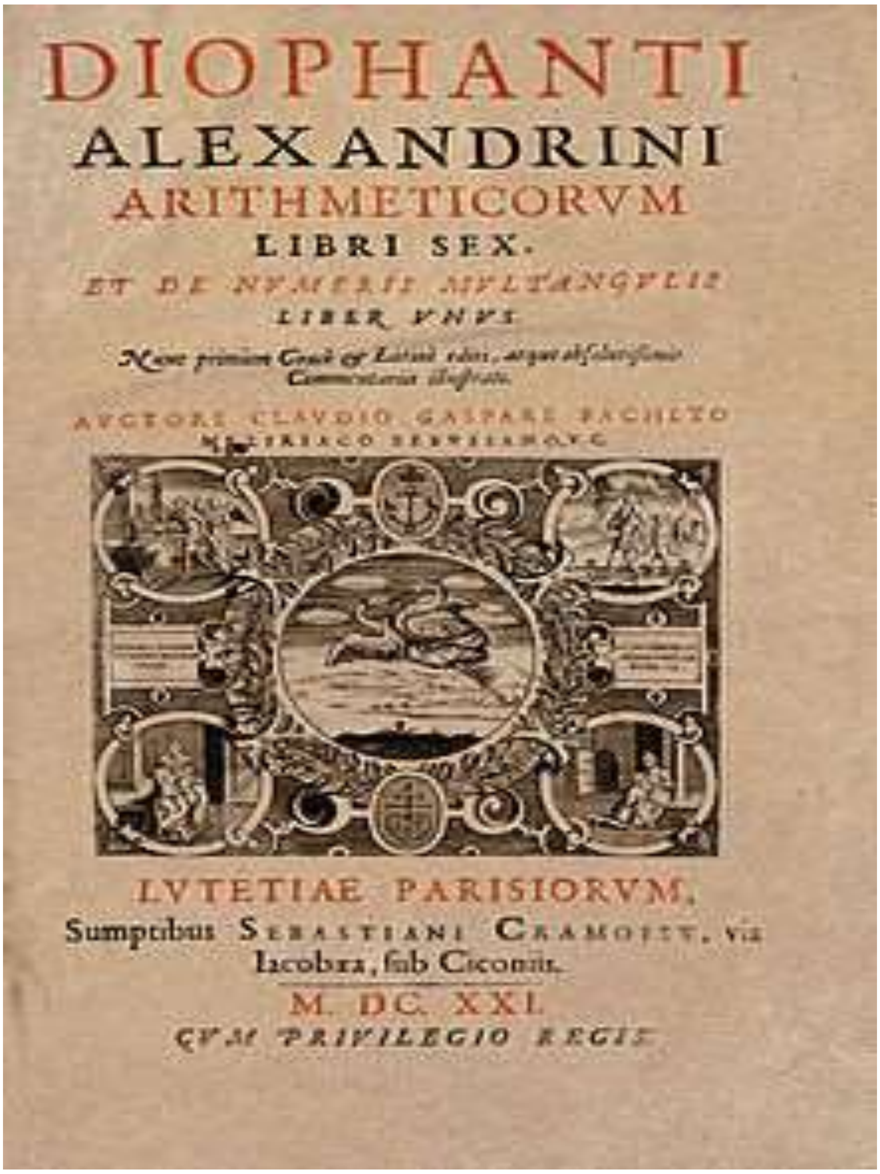
Z innych prac Diofantosa poza 6 księgami "Arithmetika" zachowały się także fragmenty traktatu tego uczonego o liczbach wielokrotnych i rozpraw o arytmetyce egipskiej. Prace Diofantosa stanowiły punkt wyjścia do badań w dziedzinie teorii liczb, którą zajmowali się uczeni tej miary, co P. Fermat, L. Euler i K. Gauss. Jednym z działów tej teorii są tzw. aproksymacje diofantyczne, traktujące, ogólnie rzecz biorąc, o rozwiązywaniu nierówności algebraicznych w liczbach całkowitych. Aproksymacjom wiele uwagi poświęciło pięciu matematyków: A. Hurwitz, K. Roth, H. Minkowski, A. Chinczin
i W. Sierpiński.

Do nauki wszedł także termin "równania diofantyczne" na oznaczanie problemu znalezienia rozwiązań w liczbach naturalnych (lub całkowitych) pewnego równania. Na przykład równanie: ***ax+by=c*** *w którym a, b, c są liczbami całkowitymi, jest rozwiązalne w liczbach całkowitych wtedy, kiedy c jest podzielna przez największy wspólny dzielnik liczb a i b.*

Warto podkreślić, że najważniejsze wyniki w teorii wspomnianych równań, które zapoczątkował Diofantos z Aleksandrii osiągnęli P. Fermat, L. Euler, J. Lagrange, E. Kummer, H.Thue, Th. Skolem i T. Nagell. Współczesne badania w zakresie teorii równań diofantycznych są ściśle związane z algebraiczną teorią liczb oraz teorią aproksymacji diofantycznych.

Po Diofantosie, w okresie od III do VI w. n.e., nie znamy żadnego wybitniejszego matematyka greckiego. Jego dzieło nie znalazło kontynuatorów. Sięgnęli dopiero po nią w średniowieczu Arabowie, wcześniej zaś matematycy indyjscy. Pełny wszakże plon wydało dzieło Diofantosa znacznie później, gdy na firmamencie nauki ukazały się gwiazdy pierwszej wielkości: Fermat, Euler i Gauss

Diofantos z Aleksandrii



„Arytmetyka" Diofantosa w przekładzie Claude'a Gaspara Bacheta, 1621 r.

Arithmeticorum Liber II. 61

QVÆSTIO VIII.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

QVÆSTIO IX.

„Arytmetyka" Diofantosa w przekładzie Claude'a Gaspara Bacheta, 1621 r.

Równanie diofantyczne stopnia pierwszego

Definicja *Równaniem diofantycznym stopnia pierwszego nazywamy równanie liniowe w postaci*

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n = b$$

$$Inaczej\ \sum_{i=1}^{n} a_iX_i = b$$

gdzie $a_1, \ldots, a_n, b \in Z$*, a szukanie rozwiązania (X,Y) są liczbami całkowitymi.*

Dla n=1 otrzymujemy równanie $a_1X_1 = b$*. Takie równanie ma rozwiązanie w liczbach całkowitych wtedy i tylko wtedy, gdy* $a_1 | b$ *i wówczas* $X=\frac{b}{a}$ *.*

Rozważmy równanie 6X=12; Oczywiście $6 | 12$ *oraz* $X = \frac{12}{6} = 2$*.*

Dla n = 2 dostajemy równanie w postaci $a_1X_1 + a_2X_2 = b$*. Kiedy takie równanie ma rozwiązanie? Jeśli zastosować rozumowanie powyżej, to można przyjąć, że takie równanie ma rozwiązanie, gdy* $a_1 | b$ *i* $a_2 | b$*. Zauważmy jednak, że np. równanie* $4X + 6Y = 10$ *ma rozwiązanie X=10 I Y= -5, pomimo iż* $4 \nmid 10$ *i* $6 \nmid 10$*.*

Jaki zatem warunek muszą spełniać współczynniki takiego równania, aby miało ono rozwiązanie? Mówi nam o tym następujące twierdzenie:

Twierdzenie *Równanie diofantyczne* $aX + bY = c$ *ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy* $d|c$*, gdzie* $d = NWD(a,b)$*. Ponadto jeśli* (X_0, Y_0) *jest pewnym rozwiązaniem tego równania, to wszystkie inne rozwiązania mają postać:*

$$\begin{cases} X = X_0 + \frac{b}{d}\, t, \\ Y = Y_0 - \frac{a}{d}\, t. \end{cases}$$

Uwaga 2.1 Ogólnie: Równanie diofantyczne $a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n = b$ *ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy* $NWD(a_1, \ldots a_n) | b$*.*

Przykład

(a) $2X + 6Y = 3$*,* $NWD(2,6) = 2$ *i* $2 \nmid 3$ *zatem równanie nie ma rozwiązania.*

(b) $3X + 5Y = 11$, $NWD(3,5) = 1$ I $1|11$, czyli równanie ma rozwiązanie. Wiemy, że istnieją liczby całkowite X,Y, że $NWD(3,5) = 3X + 5Y = 1$. Korzystając z algorytmu Euklidesa mamy:

$$5 = 3 \cdot 1 + 2$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$2 = 1 \cdot 2 + 0$$

$$1 = 3 - 2 \cdot 1 = 3 - (5 - 3 \cdot 1) = 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) \;|\; \cdot 11$$

$$11 = 3 \cdot 22 + 5 \cdot (-11)$$

Zatem $X_0 = 22$ i $Y_0 = -11$. Ostatecznie:

$X = 22 + 5t, \quad t \in Z$

$Y = -11 - 3t, \ , \quad t \in Z$

Algorytm Euklidesa

Algorytm Euklidesa polega na wyznaczania największego wspólnego dzielnika dwóch liczb. Został opisany przez greckiego matematyka, Euklidesa w jego dziele "Elementy", w księgach siódmej oraz dziesiątej. Pierwsze wzmianki na temat tego algorytmu pojawiły się w dziele Euklidesa zatytułowanym "Elementy", około trzechsetnego roku przed naszą erą, co sprawia, że jest jednym z najstarszych, wciąż używanych algorytmów numerycznych. Pierwsza wersja algorytmu został opisana tylko dla liczb naturalnych. W XIX wieku powstały odmiany algorytmu dla liczb całkowitych Gaussa oraz wielomianów z jedną niewiadomą. Doprowadziło to do powstania współczesnych pojęć algebry abstrakcyjnej, takich jak dziedzina Euklidesa. W późniejszych czasach opracowano odmiany algorytmu dla innych struktur matematycznych, jak węzły czy wielomiany z wieloma niewiadomymi.
Istnieje wiele teoretycznych i praktycznych zastosowań algorytmu. Może on zostać wykorzystany do generowania rytmów muzycznych, stosowanych jako ostinato w muzyce. Jest wykorzystywany w algorytmie RSA. Algorytm Euklidesa używany jest też do rozwiązywania równań diofantycznych, na przykład do znajdowania liczb spełniających zadany układ kongruencji (chińskie twierdzenie o resztach) czy znajdowania liczb odwrotnych w ciele skończonym. Może być także stosowany do generowania ułamków łańcuchowych w metodzie Sturma do obliczania pierwiastków rzeczywistych wielomianu. Wykorzystywany jest również w kilku współczesnych algorytmach do faktoryzacji liczb całkowitych.

Jeżeli algorytm zostanie zaimplementowany poprzez obliczanie reszt z dzielenia, a nie odejmowanie, to jest wydajny dla dużych liczb: nigdy nie wymaga więcej dzieleń niż *liczba cyfr (w systemie dziesiętnym) mniejszej liczby pomnożona przez 5. Zostało to udowodnione przez Gabriela Lamé w 1844 i uważane jest za pierwszy przypadek analizy złożoności obliczeniowej algorytmu. Sposoby zwiększenia wydajności algorytmów zostały opracowane w XX wieku.*

Algorytm Euklidesa jest algorytmem rekurencyjnym, chociaż w bardzo prosty sposób można go przekształcić do formy iteracyjnej. Mając do policzenia NWD (a,b) sprawdzamy, czy b=0. Jeśli tak jest, to NWD (a,b) = a. W przeciwnym przypadku wywołujemy rekurencyjnie algorytm dla liczb b i reszty z dzielenia a przez b.

Dane są dwie liczby naturalne a i b.

1. *Jeśli b≠0 oblicz c jako resztę z dzielenia a przez b i zastąp a przez b, zaś b przez c.*
2. *Jeżeli b=0, NWD wynosi a, w przeciwnym przypadku wróć do punktu pierwszego i kontynuuj.*

Przykład

Stosując algorytm Euklidesa wyznacz liczby całkowite x i y spełniające równość

966x – 686y= 70

Rozwiązanie

Mamy:

$966 = 1 \cdot 686 + 280$

$686 = 2 \cdot 280 + 126$

$280 = 2 \cdot 126 + 28$

$126 = 4 \cdot 28 + \underline{\mathbf{14}}$

$28 = 2 \cdot 14 + 0$

NWD (686,966) = ***14***

Zatem:

14 = 126 – 4 · 28 = 126 – 4(280 – 2 ·126) = 9 ·126 – 4 ·280 = 9 · (686 – – 2 ·280) – 4 ·280 = 9 ·686 – 22 ·280 = 9 ·686 – 22 (966 – 686) = 31 ·686 – – 22 ·966

A skoro 14 = 31 · 686 – 22 ·966 to:

70 = 155 · 686 – 110 ·966

czyli x= -110 i y = 155

Metoda Eulera

Jest to ogólna metoda rozwiązywania równań diofantycznych wprowadzona przez Eulera. Spróbujmy rozwiązać następujące równanie diofantyczne:

8x + 3y = 91

Rozpoczynamy, od wyznaczenia jednej zmiennej z równania. Najlepiej tą, przy której znajduje się mniejszy współczynnik liczbowy, u nas jest to y:

3y = 91 – 8x

$$y = \frac{91-8x}{3}$$

Następnie, rozkładamy powstały ułamek na całości i reszty ułamkowe oraz ustawiamy obok siebie "całości" i "reszty ułamkowe":

$$y = \frac{91}{3} - \frac{8x}{3} = 30 + \frac{1}{3} - 2x - \frac{2x}{3} = 30 - 2x + \frac{1}{3} - \frac{2x}{3} = 30 - 2x - \frac{2x-1}{3}$$

Szukając rozwiązań w liczbach całkowitych, zauważamy, że powstałe wyrażenie także musi być całkowite a w szczególności ułamek $\frac{2x-1}{3}$ *. Zakładamy więc, że powyższy ułamek jest liczbą całkowitą i oznaczmy go przez* $n_1 = \frac{2x-1}{3}$*. Teraz ponownie przekształcamy powstałe równanie, starając się wyrazić x.*

$3n_1 = 2x - 1$

$$x = \frac{3n_1 + 1}{2}$$

Powstałe wyrażenie, znowu rozkładamy na części całkowite i ułamkowe.

$x = \frac{3n_1}{2} + \frac{1}{2} = n_1 + \frac{n_1}{2} + \frac{1}{2} = n_1 + \frac{n_1 + 1}{2}$

Pamiętając, że x musi być całkowite, ułamek $\frac{n_1 + 1}{2}$ *także musi być liczbą całkowitą. Oznaczamy go zatem kolejnym indeksem* $n_2 = \frac{n_1 + 1}{2}$ *wyliczamy z niego* n_1:

$2n_2 = n_1 + 1$

$n_1 = 2n_2 - 1$

W tym momencie nie pojawia nam się kolejna reszta ułamkowa, więc jedyne co nam pozostaje, to odzyskać x i y. Pamiętamy, że $x = n_1 + \frac{n_1 + 1}{2}$ *oraz że* $n_2 = \frac{n_1 + 1}{2}$ *i* $n_1 = 2n_2 - 1$ *wszystko to podstawiamy do pierwszego wzoru, po czym otrzymujemy:*

$x = n_1 + \frac{n_1 + 1}{2} = (2n_2 - 1) + n_2 = 3n_2 - 1$

Podobnie postępujemy z równaniem $y = 30 - 2x - \frac{2x-1}{3}$ *za x podstawiamy* $3n_2 - 1$:

$y = 30 - 2x - \frac{2x-1}{3} = 30 - 2(3n_2 - 1) - \frac{2(3n_2-1)-1}{3} = 33 - 8n_2$

Mając już gotowe wzory, możemy opuścić indeksy, oraz zapisać je już "na czysto":

$\boldsymbol{x = 3n - 1}$

$\boldsymbol{y = 33 - 8n}$

Dzięki metodzie Eulera, podobnie jak poprzednio, uzyskaliśmy wzory na wszystkie rozwiązania naszego równania diofantycznego.

Ograniczanie przedziałów

Rozwiązując równanie diofantyczne metodą Eulera lub korzystając z algorytmu Euklidesa możemy mieć potrzebę ograniczenia zbioru rozwiązań do jakiegoś przedziału, czy to liczb naturalnych czy dowolnego innego przedziału ograniczonego. Wystarczy wówczas stworzyć odpowiednią nierówność, na przykład ograniczmy zbiór rozwiązań ostatniego przykładu tylko do liczb naturalnych (bez zera):

$x > 0$ *i* $y > 0$, *więc:*

$3n - 1 > 0$ *i* $33 - 8n > 0$,

w końcu otrzymujemy:

$n > \frac{1}{3}$ *i* $n > 4\frac{1}{8}$

Ostatecznie, bierzemy część wspólną oraz zaznaczamy, że n jest liczbą całkowitą z czego wynika, że $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ *jeśli chcemy aby rozwiązania równania były liczbami naturalnymi.*

Układy równań diofantycznych

Aby rozwiązać dowolny układ równań diofantycznych wystarczy zastosować dowolną metodę do rozwiązania "standardowego" układu równań (na przykład metodę wyznaczników). Jedyna różnica, polega na sprawdzeniu, czy otrzymane przez nas dwie liczby są liczbami całkowitymi. Dla przykładu rozwiążmy następujący prosty układ równań diofantycznych:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2, \quad W_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1, \quad W_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$$

Wszystkie wyznaczniki są różne od zera, więc nasz układ ma jedno rozwiązanie. Aby je otrzymać, korzystamy z wzorów Cramera, dzięki czemu otrzymujemy:

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \qquad y = \frac{W_y}{W} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Rozwiązanie naszego układu równań jest para liczb $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *niestety współrzędne nie są całkowite, więc nasz układ równań nie posiada rozwiązań całkowitych.*

Przykładowe zadania rozwiązane wybranymi metodami

Zadanie 1. *Rozwiąż równanie diofantyczne*

$172x + 20y = 100$

Obliczmy NWD (172,20), korzystając z metody Euklidesa.

$172 = 20 \cdot 8 + 12$

$20 = 12 \cdot 1 + 8$

$12 = 8 \cdot 1 + \underline{4}$

$8 = 4 \cdot 2 + 0$

$100 : 4 = 25$, czyli $4 | 100$ zatem równanie $172x + 20y = 100$ ma rozwiązanie w zbiorze liczb całkowitych.

$4 = 12 - 1 \cdot 8 = 12 - 1 \cdot (20 - 12 \cdot 1) = 12 - 1 \cdot 20 + 1 \cdot 12 = 2 \cdot 12 - 1 \cdot 20 = 2 \cdot (172 - 20 \cdot 8) - 1 \cdot 20 = 2 \cdot 172 - 16 \cdot 20 - 1 \cdot 20 = 2 \cdot 172 - 17 \cdot 20$

$2 \cdot 172 - 17 \cdot 20 = 4 \,|\, \cdot 25$

$50 \cdot 172 - 425 \cdot 20 = 100$

Zatem

$x_0 = 50$ *i* $y_0 = -425$

ostatecznie rozwiązania równania mają postać:

$$\begin{cases} x = 50 + \frac{20}{4} \cdot t \\ y = -425 - \frac{172}{4} \cdot t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x = 50 + 5t} \\ \mathbf{y = -425 - 43t} \end{cases} \qquad \textbf{dla } t \in C$$

Sprawdzenie

dla t=2

$x = 50 + 5 \cdot 2 = 60$

$y = -425 - 43 \cdot 2 = -511$

$\boldsymbol{x=60}$

$\boldsymbol{y=-511}$

$172 \cdot 60 + 20 \cdot (-511) = 10\,320 - 10\,220 = \mathbf{100}$

Odpowiedź: *Rozwiązaniem równania jest*

$$\begin{cases} x = 50 + 5t \\ y = -425 - 43t \end{cases} \qquad \text{dla } t \in C$$

Zadanie 2. Rozwiąż równanie diofantyczne

$\boldsymbol{40x + 63y = 521}$

Obliczmy NWD (40,63), korzystając z metody Euklidesa.

$63 = 1 \cdot 40 + 23$

$40 = 1 \cdot 23 + 17$

$23 = 1 \cdot 17 + 6$

$17 = 2 \cdot 6 + 5$

$6 = 1 \cdot 5 + \mathbf{1}$

$5 = 1 \cdot 5 + 0$

NWD (40, 63) = 1

521 : 1 = 521, czyli 1|521, zatem równanie 40x + 63y = 521 ma rozwiązanie w zbiorze liczb całkowitych.

„Odwracając" algorytm Euklidesa otrzymujemy:

$1 = 6 - 1 \cdot 5 = 6 - 1 \cdot (17 - 2 \cdot 6) = 6 - 1 \cdot 17 + 2 \cdot 6 = 3 \cdot 6 - 1 \cdot 17 = 3 \cdot (23 - 1 \cdot 17) - 1 \cdot 17 = 3 \cdot 23 - 3 \cdot 17 - 1 \cdot 17 = 3 \cdot 23 - 4 \cdot 17 = 3 \cdot 23 - 4 \cdot (40 - 1 \cdot 23) = 3 \cdot 23 - 4 \cdot 40 + 4 \cdot 23 = 7 \cdot 23 - 4 \cdot 40 = 7 \cdot (63 - 1 \cdot 40) - 4 \cdot 40 = 7 \cdot 63 - 7 \cdot 40 - 4 \cdot 40 =$
$= 7 \cdot 63 - 11 \cdot 40$

stąd

$-11 \cdot 40 + 7 \cdot 63 = 1 \quad | \cdot 521$

$-5731 \cdot 40 + 3647 \cdot 63 = 521$

zatem

$x_0 = -5731$ *i* $y_0 = 3647$

ostatecznie mamy

$$\begin{cases} x = -5731 + \frac{63}{1} \cdot t \\ y = 3647 - \frac{40}{1} \cdot t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = -5731 + 63 \cdot t} \\ \boldsymbol{y = 3647 - 40 \cdot t} \end{cases} \qquad \textbf{dla } \boldsymbol{t \in C}$$

Odpowiedź: *Rozwiązaniem równania jest*

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = -5731 + 63 \cdot t} \\ \boldsymbol{y = 3647 - 40 \cdot t} \end{cases} \qquad \textbf{dla } \boldsymbol{t \in C}$$

Zadanie 3. Rozwiąż równanie diofantyczne

13x + 29y = 31

Obliczmy NWD (13, 29), korzystając z metody Euklidesa.

$29 = 2 \cdot 13 + 3$

$13 = 4 \cdot 3 + \underline{1}$

$3 = 1 \cdot 3 + 0$

$NWD\ (13,29) = 1$

$31 : 1 = 31$, czyli $1|31$, zatem równanie $13x + 29y = 31$ ma rozwiązanie w zbiorze liczb całkowitych.

„Odwracając" algorytm Euklidesa otrzymujemy:

$1 = 13 - 4 \cdot 3 = 13 - 4 \cdot (29 - 2 \cdot 13) = 13 - 4 \cdot 29 + 8 \cdot 13 = 9 \cdot 13 - 4 \cdot 29$

$9 \cdot 13 - 4 \cdot 29 = 1 \ | \cdot 31$

$279 \cdot 13 - 124 \cdot 29 = 31$

zatem

$x_0 = 279$ i $y_0 = -124$

ostatecznie mamy

$$\begin{cases} x = 279 + \frac{29}{1} \cdot t \\ y = -124 - \frac{13}{1} \cdot t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x = 279 + 29 \cdot t} \\ \mathbf{y = -124 - 13 \cdot t} \qquad \textbf{dla } \mathbf{t \in C} \end{cases}$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania jest

$$\begin{cases} \mathbf{x = 279 + 29 \cdot t} \\ \mathbf{y = -124 - 13 \cdot t} \qquad \textbf{dla } \mathbf{t \in C} \end{cases}$$

<u>Zadanie 4.</u> Rozwiąż równanie diofantyczne

$$\boldsymbol{15x + 7y = 111}$$

Równanie rozwiązałem korzystając z metody Eulera

$15x + 7y = 111$

$7y = 111 - 15x$

$y = \frac{111-15x}{7}$

$y = \frac{111-15x}{7} = 15 + \frac{6}{7} - 2x - \frac{x}{7} = 15 - 2x - \frac{x-6}{7}$

$n_1 = \frac{x-6}{7}$

$7n_1 = x - 6$

$\underline{\boldsymbol{x = 7n_1 + 6}}$

$y = 15 - 2 \cdot (7n_1 + 6) - \frac{(7n_1 + 6) - 6}{7} = 15 - 14n_1 - 12 - n_1 = 3 - 15n_1$

$\underline{\boldsymbol{y = 3 - 15n_1}}$

rozwiązaniem równania ma postać

$$\begin{cases} x = 7n + 6 \\ y = 3 - 15n \end{cases}$$

<u>Sprawdzenie</u>

dla n=2

$x = 7 \cdot 2 + 6 = 20$

$y = 3 - 15 \cdot 2 = 3 - 30 = -27$

$15 \cdot 20 + 7 \cdot (-27) = 300 - 189 = \underline{\boldsymbol{111}}$

dla n=0

$x = 7 \cdot 0 + 6 = 6$

$y = 3 - 15 \cdot 0 = 3$

$15 \cdot 6 + 7 \cdot 3 = 90 - 21 = \underline{\mathbf{111}}$

Odpowiedź: *Rozwiązaniem równania jest*

$$\begin{cases} \mathbf{x = 7n + 6} \\ \mathbf{y = 3 - 15n} \qquad \textbf{dla } \mathbf{n \in C} \end{cases}$$

<u>Zadanie 5.</u> Rozwiąż równanie diofantyczne

$$\mathbf{3x + 5y = 1}$$

Równanie rozwiązałem korzystając z metody Eulera

$$3x + 5y = 1$$

$$3x = 1 - 5y$$

$$x = \frac{1-5y}{3}$$

$$x = \frac{1}{3} - \frac{5y}{3} = \frac{1}{3} - y - \frac{2y}{3} = -y + \frac{1}{3} - \frac{2y}{3} = y - \frac{2y-1}{3}$$

$$n_1 = \frac{2y-1}{3}$$

$$3n_1 = 2y - 1$$

$$2y = 3n_1 + 1$$

$$y = \frac{3n_1 + 1}{2}$$

$$y = \frac{3n_1 + 1}{2} = n_1 + \frac{n_1}{2} + \frac{1}{2} = n_1 + \frac{n_1 + 1}{2}$$

$$n_2 = \frac{n_1 + 1}{2}$$

$$2n_2 = n_1 + 1$$

$$n_1 = 2n_1 - 1$$

$y = n_1 + \frac{n_1 + 1}{2}$ *oraz* $n_2 = \frac{n_1 + 1}{2}$ *i* $n_1 = 2n_2 - 1$

$y = n_1 + \frac{n_1 + 1}{2} = (2n_2 - 1) + \frac{2n_2 - 1 + 1}{2} = 2n_2 - 1 + n_2 = 3n_2 - 1$

$\mathbf{y = 3n_2 - 1}$

$x = -y - \frac{2y - 1}{3} = -(3n_2 - 1) - \frac{2(3n_2 - 1)}{3} = -3n_2 + 1 - \frac{6n_2 - 2 - 1}{3} = -3n_2 + 1 - \frac{3(2n_2 - 1)}{3} = -3n_2 + 1 - 2n_2 + 1 = -5n_2 + 2$

$\mathbf{x = -5n_2 + 2}$

$$\begin{cases} x = -5n + 2 \\ y = 3n - 1 \qquad \text{dla } n \in C \end{cases}$$

Odpowiedź: *Rozwiązaniem równania jest*

$$\begin{cases} x = -5n + 2 \\ y = 3n - 1 \qquad \text{dla } n \in C \end{cases}$$

<u>*Zadanie 6*</u>

Do przewozu zboża są do dyspozycji worki sześćdziesięciokilogramowe i osiemdziesięciokilogramowe. Ile potrzeba poszczególnych worków do przewozu 440 kg zboża (zakładamy, że worki muszą być pełne)?

x – liczba worków 60 kg

y – liczba worków 80 kg

$60 \cdot x + 80 \cdot y = 440$

$80 = 1 \cdot 60 + 20$

$60 = 2 \cdot 20 + \underline{\mathbf{20}}$

$20 = 1 \cdot 20 + 0$

NWD (60, 80) = 20

440 : 20 = 22, czyli 20|440 równanie $60x + 80y = 440$ ma rozwiązanie w zbiorze liczb całkowitych.

$20 = 60 – 2 \cdot 200 = 60 – 2 \cdot (80 – 1 \cdot 60) = 60 – 2 \cdot 80 + 2 \cdot 60 = 3 \cdot 60 – 2 \cdot 80$

$3 \cdot 60 – 2 \cdot 80 = 20 \mid \cdot 22$

$66 \cdot 60 – 44 \cdot 80 = 440$

zatem

$x_0 = 66$ *i* $y_0 = - 44$

$$\begin{cases} x = 66 + 4t \\ y = -44 - 3t \end{cases}$$

$$x > 0 \text{ i } y > 0$$

$66 + 4t > 0$ *i* $-44 – 3t > 0$

$4t > -66$ *i* $– 3t > 44$

$t > - 16{,}5$ *i* $t < - 14\frac{2}{3}$

dla t = - 15

$$\begin{cases} x = 66 + 4 \cdot (- 15) = 66 – 60 = 6 \\ y = - 44 – 3 \cdot (- 15) = - 44 + 45 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases}$$

$6 \cdot 60 + 1 \cdot 80 = 360 + 80 = 440$

dla t = - 16

$$\begin{cases} x = 66 + 4 \cdot (- 16) = 66 – 64 = 2 \\ y = - 44 – 3 \cdot (- 16) = - 44 + 48 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

$2 \cdot 60 + 4 \cdot 80 = 120 + 320 = 440$

Odpowiedź: Do przewozu 440 kg zboża potrzebnych jest 6 worków 60 kg i 1 worek 80 kg lub 2 worki 60 kg i 4 worki 80 kg.

Zadanie 7 Wyznacz wszystkie pary (x,y) liczb całkowitych spełniające równanie

$$\mathbf{xy = 3x + 5y + 7}$$

Przenoszę 3x i 5y na lewą stroną równania dostajemy

$xy - 3x - 5y = 7$

Aby zapisać lewą stronę równania jako iloczyn dwóch wyrażeń algebraicznych dodajemy do obu stron 15:

$xy - 3x - 5y + 15 = 7 + 15$

$xy - 3x - 5y + 15 = 22$

teraz możemy „zwinąć" wyrażenie po lewej stronie:

$(x - 5)(y - 3) = 22$

Iloczyn dwóch liczb całkowitych wynosi 22 wtedy i tylko wtedy, gdy:

$22 = 1 \cdot 22 = 22 \cdot 1 = 11 \cdot 2 = 2 \cdot 11 = -1 \cdot -22 = -22 \cdot -1 = -2 \cdot -11 = -11 \cdot -2$

Teraz układamy wszystkie możliwe układy równań:

$\begin{cases} x - 5 = 1 \\ y - 3 = 22 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x - 5 = 22 \\ y - 3 = 1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x - 5 = 11 \\ y - 3 = 2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x - 5 = 2 \\ y - 3 = 11 \end{cases}$ lub

$\begin{cases} x - 5 = -1 \\ y - 3 = -22 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x - 5 = -22 \\ y - 3 = -1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x - 5 = -11 \\ y - 3 = -2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x - 5 = -2 \\ y - 3 = -11 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 25 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 27 \\ y = 4 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 16 \\ y = 5 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 7 \\ y = 14 \end{cases} \text{ lub}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -19 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = -17 \\ y = 2 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = -6 \\ y = 1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 3 \\ y = -8 \end{cases}$$

stąd $(x,y) = (6,25)$ lub $(x,y) = (27,4)$ lub $(x,y) = (16,5)$ lub $(x,y) = (7,14)$ lub $(x,y) = (4,-19)$ lub $(x,y) = (-17,2)$ lub $(x,y) = (-6,1)$ lub $(x,y) = (3,-8)$.

Odpowiedź: *Równanie spełniają następujące pary liczb: (6,25), (27,4), (16,5), (7,14), (4,-19), (-17,2), (-6,1), (3,-8).*

<u>Zadanie 8</u> Wyznacz wszystkie pary (x,y) liczb całkowitych spełniające równanie

$\mathbf{2xy = x + y}$

Przenosząc x i y na lewą stronę równania dostajemy

$2xy - x - y = 0 \,/ : 2$

$xy - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 0$

Aby zapisać lewą stroną równania jako iloczyn dwóch wyrażeń algebraicznych dodajemy do obu stron $\frac{1}{4}$:

$xy - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \,/ \cdot 4$

$4xy - 2x - 2y + 1 = 1$

$2x(2y - 1) - 1(2y - 1) = 1$

$(2x - 1)(2y - 1) = 1$

Iloczyn dwóch liczb całkowitych wynosi 1 wtedy i tylko wtedy, gdy:

$1 = 1 \cdot 1 = -1 \cdot -1$

Teraz układamy wszystkie możliwe układy równań:

$$\begin{cases} 2x - 1 = 1 \\ 2y - 1 = 1 \end{cases} \quad lub \quad \begin{cases} 2x - 1 = -1 \\ 2y - 1 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 2\ /:2 \\ 2y = 2\ /:2 \end{cases} \quad lub \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad lub \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$(x,y) = (1, 1)$ lub $(x,y) = (0, 0)$

Odpowiedź: *Równanie spełniają następujące pary liczb: $(1, 1)$ lub $(0, 0)$*

Zadanie 9 *Wyznacz wszystkie pary (x,y) liczb całkowitych spełniające równanie*

$xy = x + 2y$

Przenoszę x i $2y$ na lewą stroną równania dostajemy

$xy - x - 2y = 0$

Aby zapisać lewą stronę równania jako iloczyn dwóch wyrażeń algebraicznych dodajemy do obu stron 2:

$xy - x - 2y + 2 = 2$

teraz możemy „zwinąć" wyrażenie po lewej stronie:

$(x - 2)(y - 1) = 2$

Iloczyn dwóch liczb całkowitych wynosi 2 wtedy i tylko wtedy, gdy:

$2 = 1 \cdot 2 = 2 \cdot 1 = -1 \cdot -2 = -2 \cdot -1$

Teraz układamy wszystkie możliwe układy równań:

$$\begin{cases} x - 2 = 1 \\ y - 1 = 2 \end{cases} \quad lub \quad \begin{cases} x - 2 = 2 \\ y - 1 = 1 \end{cases} \quad lub \quad \begin{cases} x - 2 = -1 \\ y - 1 = -2 \end{cases} \quad lub \quad \begin{cases} x - 2 = -2 \\ y - 1 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$(x,y) = (3, 3)$ lub $(x,y) = (4, 2)$ lub $(x,y) = (1, -1)$ lub $(x,y) = (0,0)$

Odpowiedź: *Równanie spełniają następujące pary liczb: (3, 3) lub (4, 2) lub (1, -1) lub (0,0).*

Zadanie 10 *Wyznacz wszystkie pary (x,y) liczb całkowitych spełniające równanie*

$3xy - x + 2y = 1$

$3xy - x + 2y = 1 \ /:3$

$xy - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = \frac{1}{3}$

Aby zapisać lewą stronę równania jako iloczyn dwóch wyrażeń algebraicznych odejmujemy od obu stron $\frac{2}{9}$:

$xy - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{9} = \frac{1}{3} - \frac{2}{9}$

$xy - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{9} = \frac{1}{9} \ / \cdot 9$

$9xy - 3x + 6y - 2 = 1$

teraz możemy „zwinąć" wyrażenie po lewej stronie:

$(3x + 2)(3y - 1) = 1$

Iloczyn dwóch liczb całkowitych wynosi 1 wtedy i tylko wtedy, gdy:

$1 = 1 \cdot 1 = -1 \cdot -1$

$$\begin{cases} 3x + 2 = 1 \\ 3y - 1 = 1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} 3x + 2 = -1 \\ 3y - 1 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = -1 \\ 3y = 2 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} 3x = -3 \\ 3y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$(x, y) = (-1, 0)$

Odpowiedź: *Równanie spełnia para liczb* $(-1, 0)$.

Literatura

Bolesław Gleichgewicht, Algebra, PWN, Warszawa 1983

Jerzy Rutkowski, Algebra abstrakcyjna w zadaniach, PWN, Warszawa 2000

Egmont Colerus, Od tabliczki do różniczki, PWKS, Lwów 1938

https://pl.wikipedia.org/wiki/**Równanie_diofantyczne**

www.matematyka.pl› Algebra › Algebra abstrakcyjna

Wacław Sierpiński, 250 zadań z elementarnej teorii liczb, Biblioteczka Matematyczna 17, PZWS, Warszawa 1987

Neal Koblitz, Wykład z teorii liczb i kryptografii, WNT, Warszawa 1995

Władysław Narkiewicz, Teoria liczb, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2003

Kwadrat, Nr5 czerwiec 2012

Encyklopedia Szkolna Matematyka, WSiP, Warszawa 1989