

Maciej Frączek Dominik Trąbka

uczniowie klasy 2b

Gimnazjum nr 37 z Oddziałami Integracyjnymi

Im. Maksymiliana Marii Kolbe w Krakowie

Os. Złotego Wieku 36

Symetryczne eksperymenty

Opiekun – mgr Teresa Sklepek

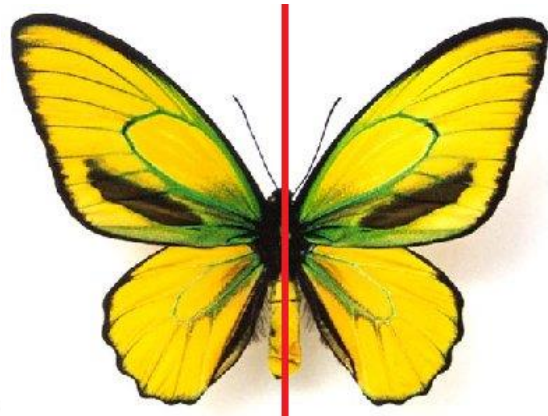
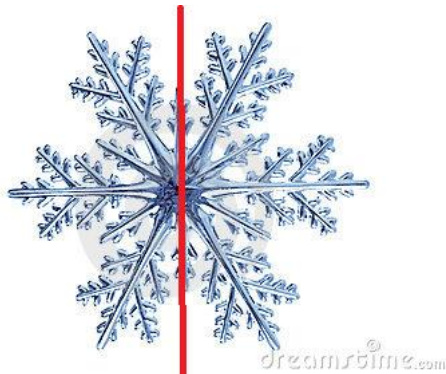
Kraków 2016 rok

Spis treści

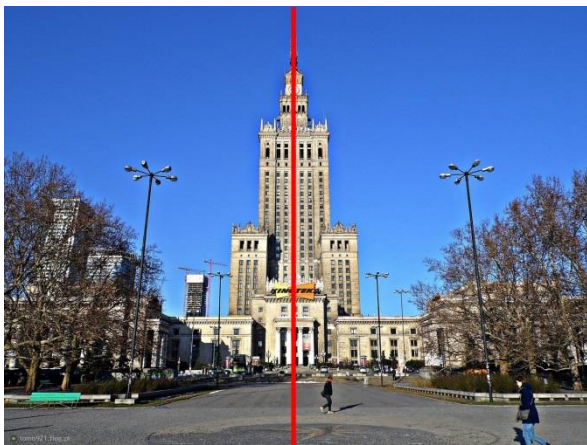
Wstęp	<i>str. 3</i>
1. Symetria osiowa	<i>str. 4</i>
1.1. Trójkąty	<i>str. 4</i>
1.2. Ciekawe figury	<i>str. 12</i>
1.3. Czworokąty	<i>str. 16</i>
1.4. Wielokąty foremne	<i>str. 20</i>
2. Symetria środkowa	<i>str. 23</i>
2.1. Trójkąty	<i>str. 23</i>
2.2. Czworokąty	<i>str. 26</i>
2.3. Ciekawe figury	<i>str. 28</i>
2.4. Wielokąty foremne	<i>str. 30</i>
Zakończenie	<i>str. 32</i>
Literatura i pomoce	<i>str. 32</i>

Wstęp

Podziwiamy piękno symetrii w przyrodzie...



architekturze,



Pałac Kultury i Nauki w Warszawie



Brama Floriańska w Krakowie

ornamentach...



Dom pod Pająkiem w Krakowie

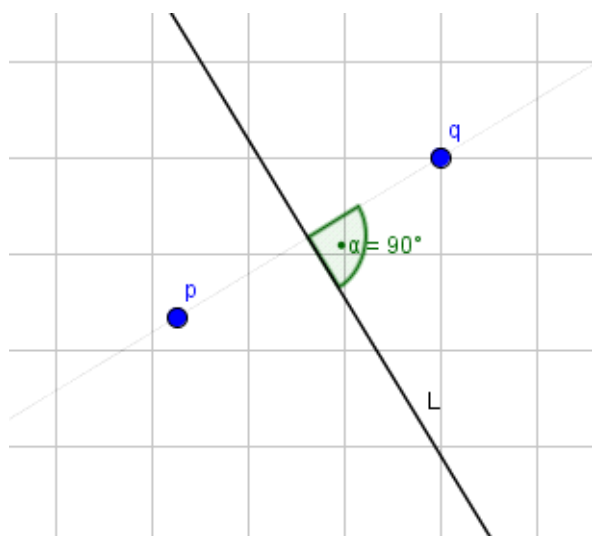


Fragment fresku Stanisława Wyspiańskiego

W naszej pracy chcieliśmy sprawdzić, czy odkryjemy coś ciekawego badając figury i ich obrazy w symetrii. W pracy badawczej pomógł nam program GeoGebra i Cabri II Plus.

1. Symetria osiowa

Symetria osiowa – wyjaśnienie ze Szkolnej Encyklopedii Matematycznej

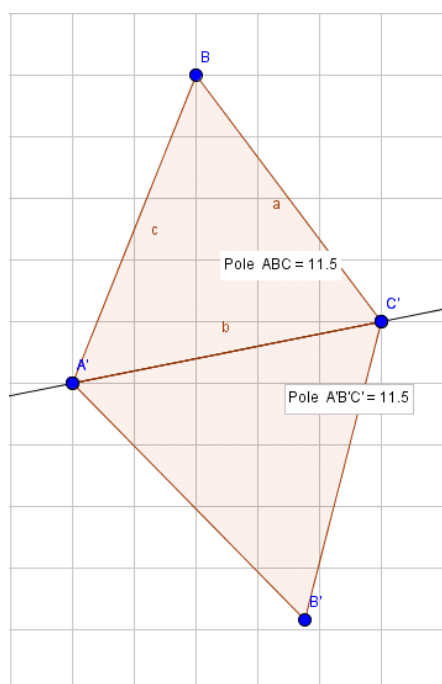


Symetria osiowa, symetria względem prostej L - odwzorowanie geometryczne płaszczyzny lub przestrzeni przyporządkowujące każdemu punktowi p swej dziedziny punkt q leżący na prostej prostopadłej do prostej L i przechodzącej przez punkt p (...). Jeżeli p leży na L to $q=p$, a jeśli p nie leży na L to punkty p i q leżą po przeciwnych stronach prostej L - w tej samej od niej odległości.

1.1 Trójkąty.

Figury jakie powstają, gdy narysujemy trójkąt symetryczny do danego względem jednego z boków trójkąta.

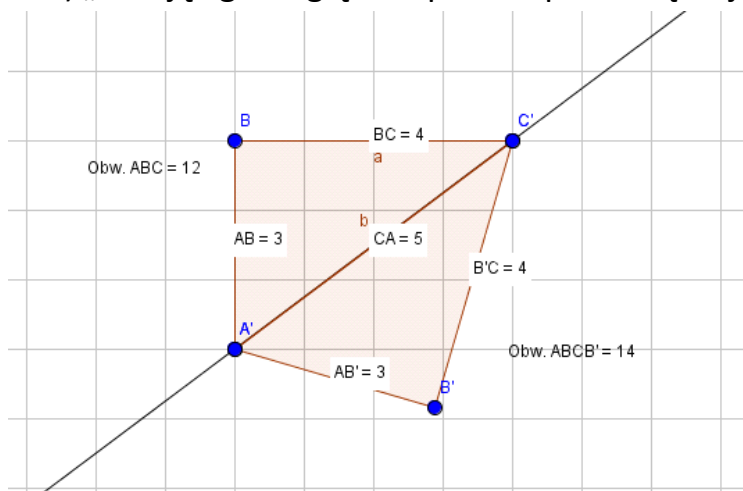
Najpierw zająłem się trójkątami. Chciałem sprawdzić, jakie figury powstają, gdy narysujemy trójkąt symetryczny do danego względem jednego boku.



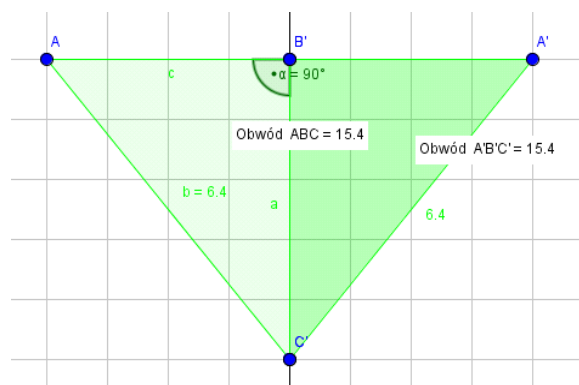
Powstał **czworokąt**, którego pole jest dwa razy większe od pola narysowanego trójkąta. Obwód czworokąta nie jest dwa razy większy niż obwód trójkąta. Obwód czworokąta zmienia się zależnie od długości boku, względem którego „odbiliśmy” trójkąt. Czworokąt, który powstał ma jedną oś symetrii.

Jeśli narysuję trójkąt prostokątny, to gdy

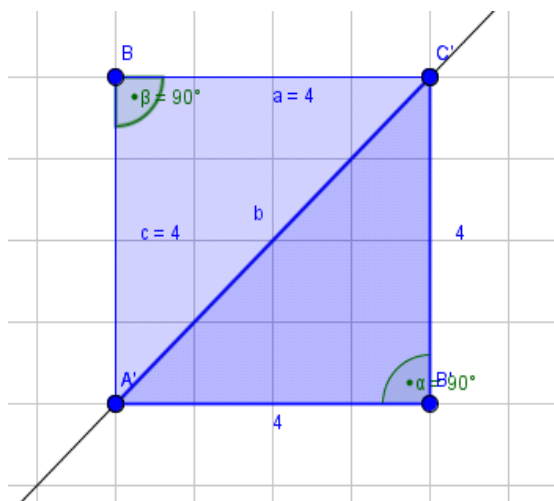
a) „odbiję” go względem przeciwprostokątnej powstaje **czworokąt -deltoid**,



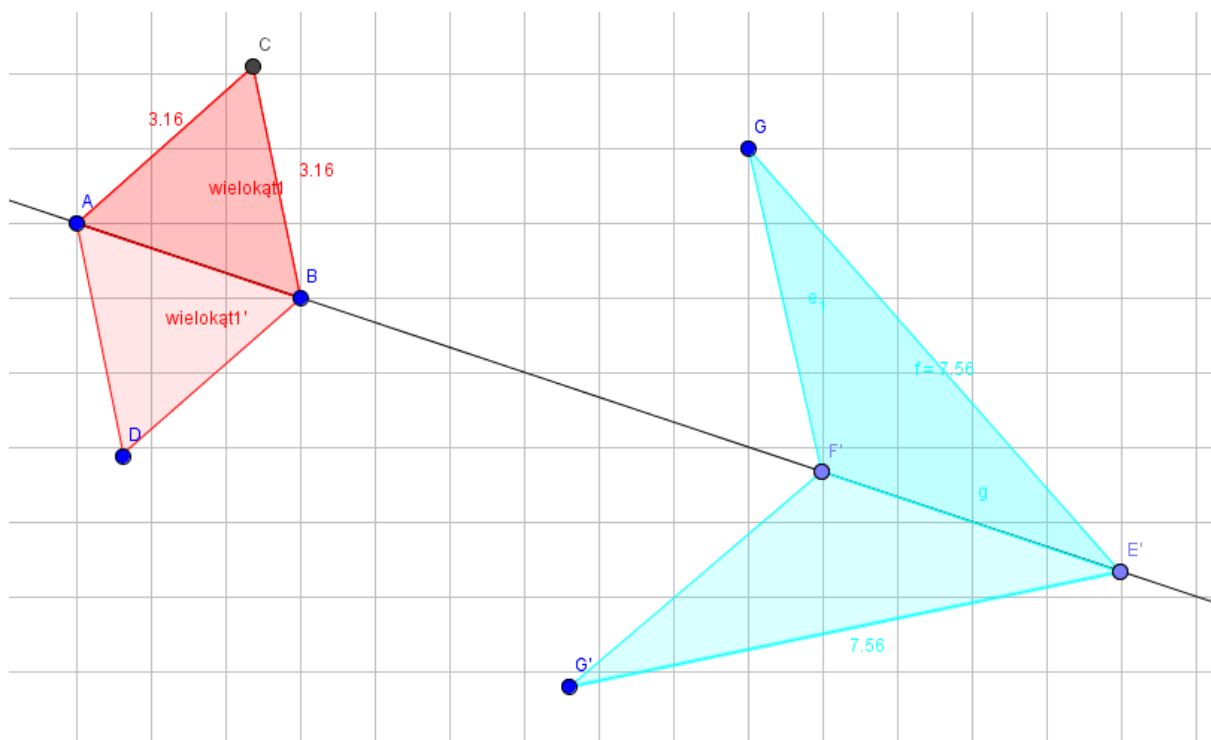
b) „odbiję” go względem jednej z przyprostokątnych. powstaje dwa razy większy **trójkąt równoramienny**.



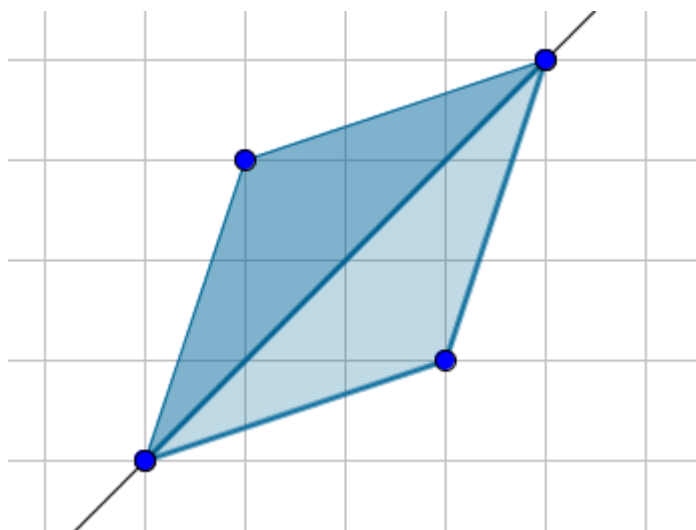
Jeżeli trójkąt jest prostokątny równoramienny, to po odbiciu trójkąta względem przeciwprostokątnej powstanie **kwadrat**.



Dla trójkąta równobocznego otrzymamy romb i nie ma znaczenia, który bok będzie leżał na osi symetrii. Obwód takiego rombu jest o $\frac{1}{3}$ większy od obwodu trójkąta. Romb ma dwie osie symetrii.



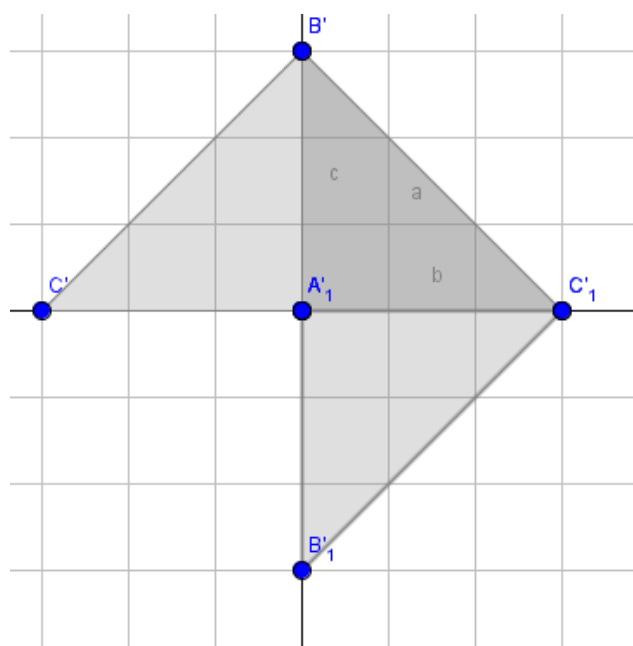
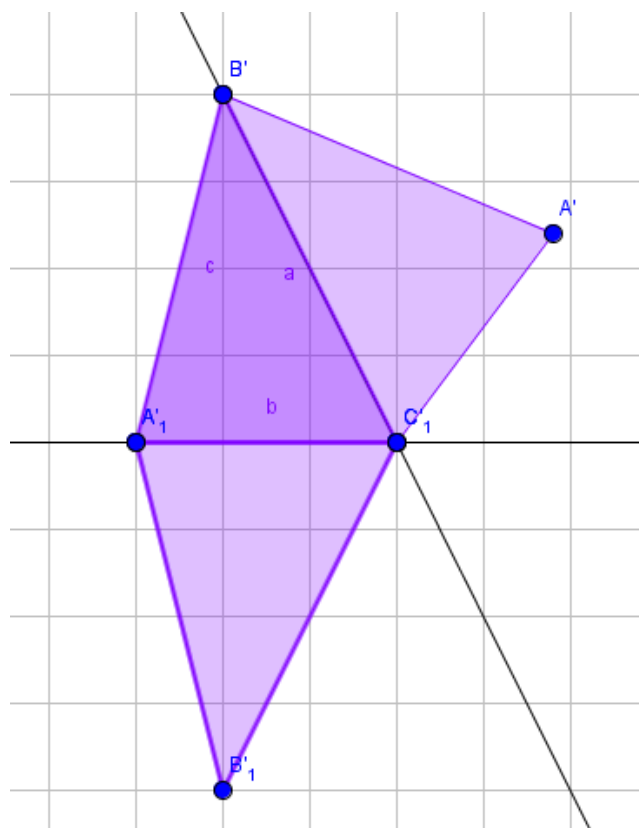
Dla trójkąta rozwartokątnego równoramiennego otrzymujemy romb (poniżej) lub deltoid (powyżej).



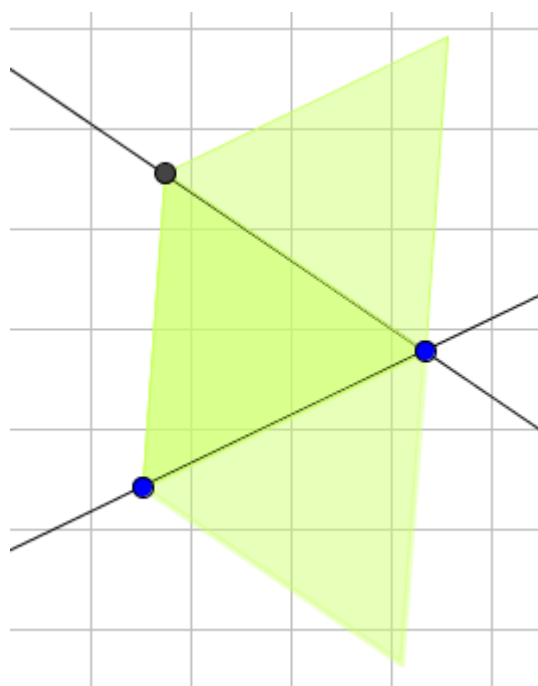
Figury jakie powstają, gdy narysujemy trójkąty symetryczne do danego względem dwóch boków trójkąta.

Sprawdziłem jakie figury otrzymam, gdy trójkąt „odbiję” względem 2 boków. Przypuszczałem, że za każdym razem otrzymam figurę o polu 3 razy większym niż pole pierwszego trójkąta.

Dla trójkąta ostrokątnego i prostokątnego faktycznie tak jest.

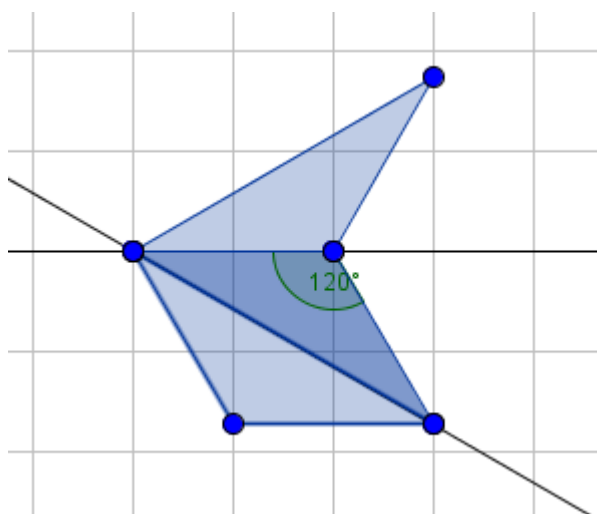
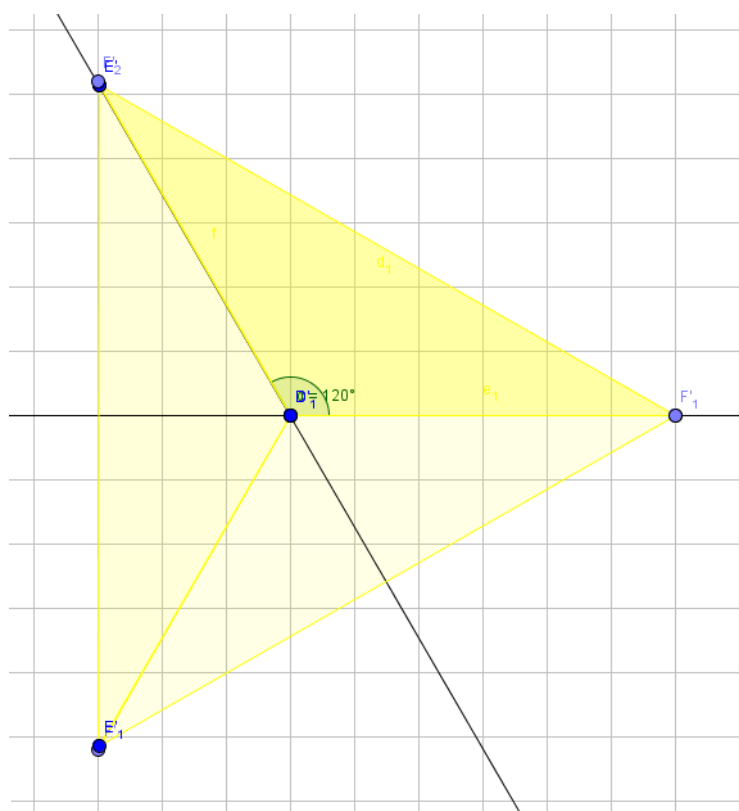


Dla trójkąta prostokątnego równoramiennego otrzymany pięciokąt ma jedną oś symetrii.



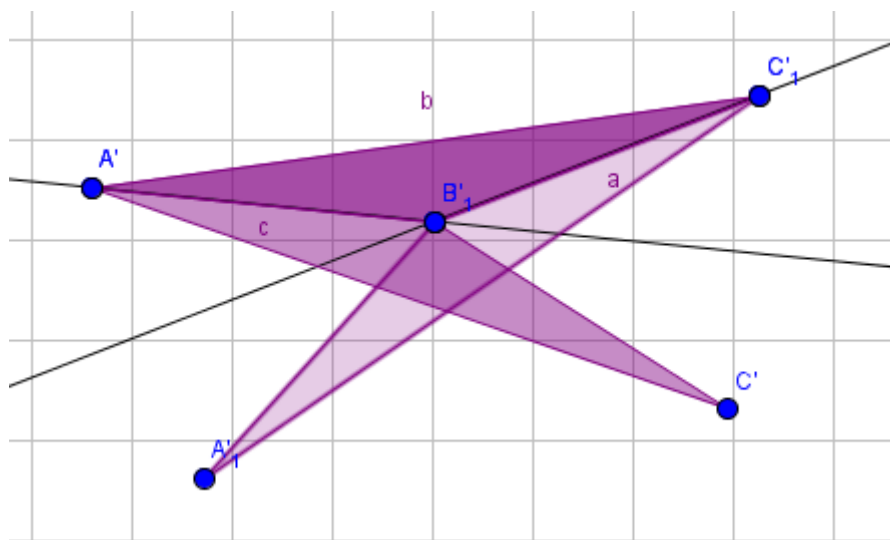
Dla trójkąta równobocznego otrzymamy trapez równoramienny. Też ma jedną oś symetrii.

Jednak, gdy największy kąt trójkąta równoramiennego ma miarę 120° i odbijemy względem dwóch ramion przy tym kącie, powstanie jeden duży trójkąt równoboczny o boku równym podstawie. Teraz figura ma trzy osie symetrii.



Trójkąt równoramienny o kącie 120° odbity względem podstawy i jednego z ramion. Daje pięciokąt z jednym kątem wklęsłym.

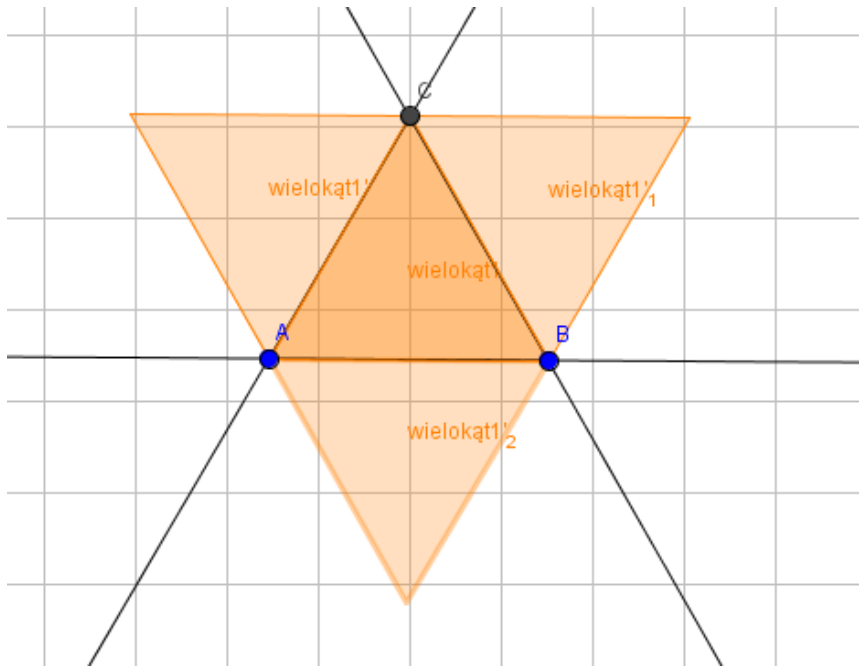
A gdy miara kąta rozwartego będzie powyżej 120 stopni, trójkąty „najdą na siebie” i powstanie siedmiokąt. Pole tej figury nie jest trzy razy większe od pola pierwszego trójkąta.



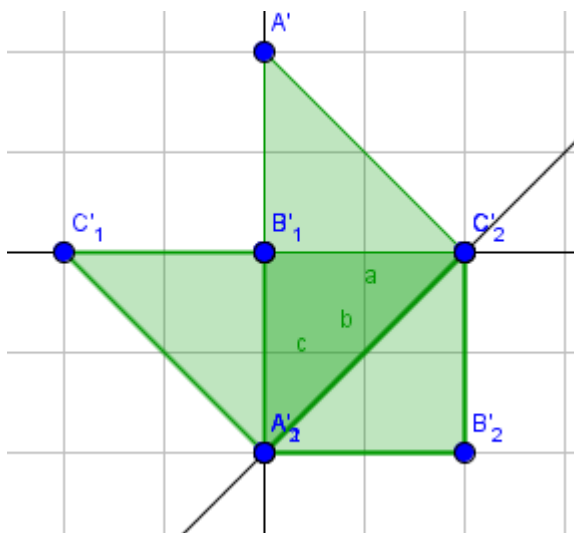
Figury jakie powstają, gdy narysujemy trójkąty symetryczne do danego względem trzech boków trójkąta.

A teraz odbicie trójkątów względem 3 boków. Figury jakie powstają na ogół mają pole cztery razy większe od pola jednego trójkąta.

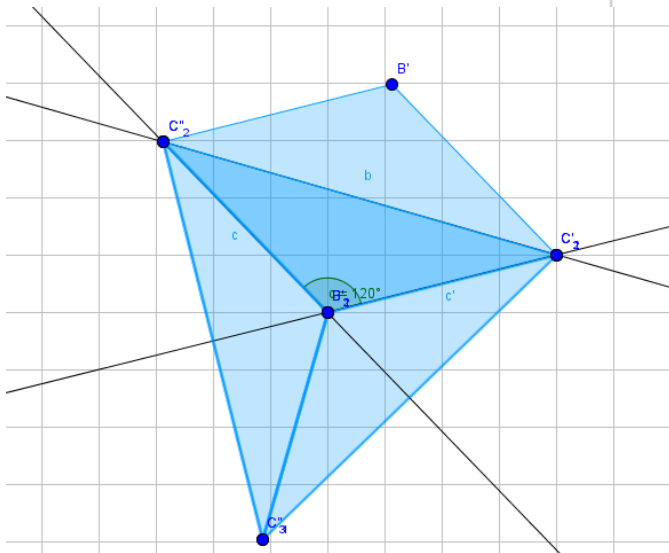
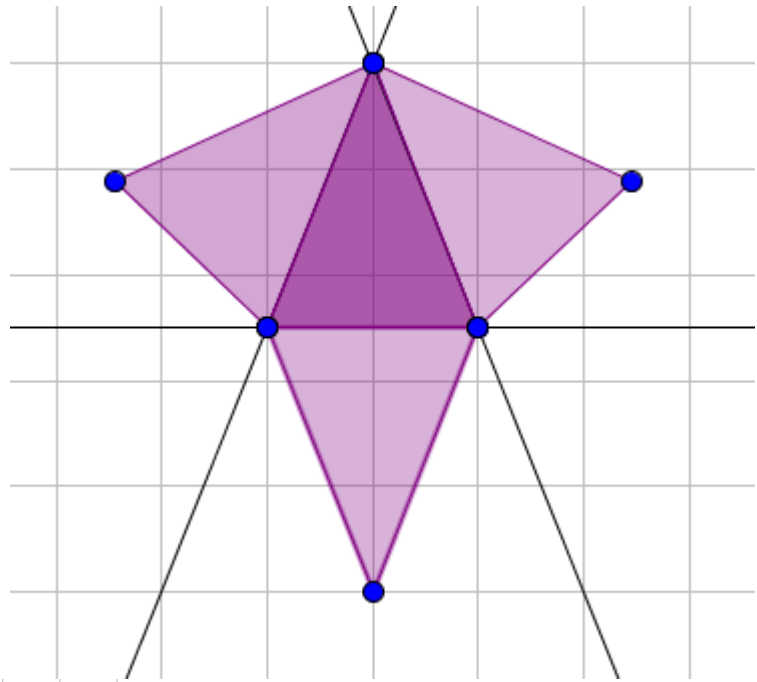
- a) Trójkąt równoboczny - powstaje jeden większy trójkąt równoboczny o czterokrotnie większym polu. Ma trzy osie symetrii. Jest podobny w skali 2. Obwód jest dwa razy większy.



- b) Trójkąt prostokątny równoramienny - powstaje sześciokąt, który ma jedną oś symetrii.

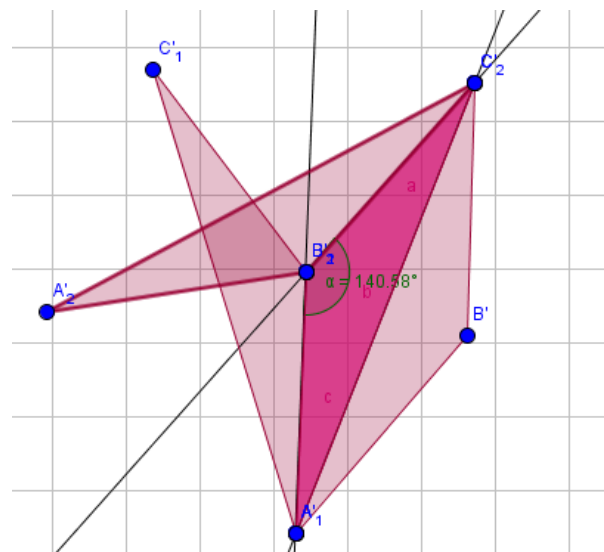


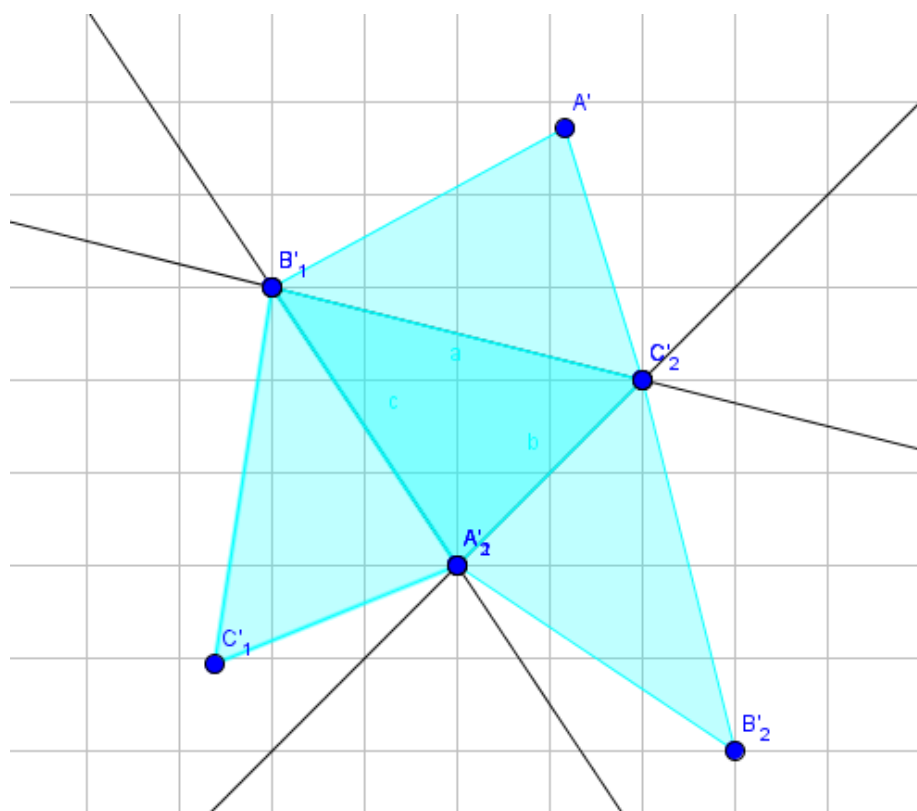
- c) Trójkąt równoramienny ostrokątny - powstaje sześciokąt, który ma jedną oś symetrii.



- d) Trójkąt równoramienny rozwartokątny, którego kąt rozwarty ma miarę 120° - powstaje deltoid, który ma jedną oś symetrii.

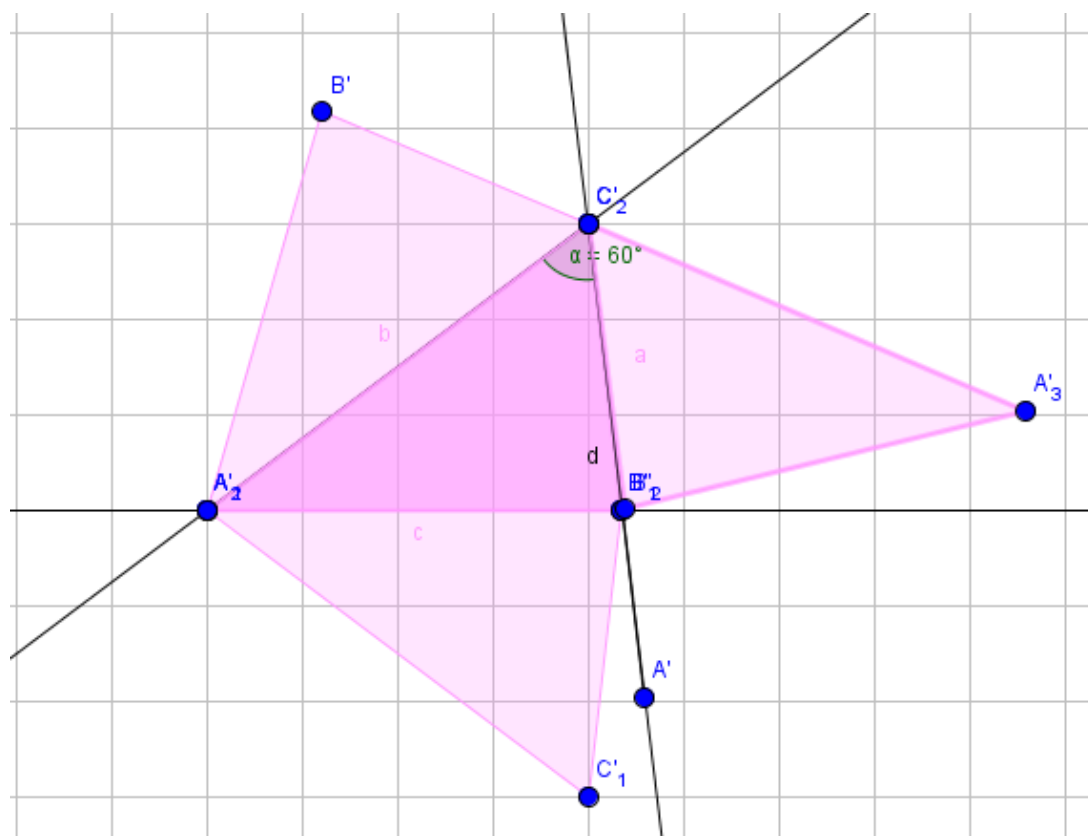
- e) Trójkąt równoramienny rozwartokątny o mierze kąta rozwartego większej od 120 stopni -powstaje ośmiokąt wklęsły. Trójkąty nachodzą na siebie, więc pole tego ośmiokąta nie jest cztery razy większe niż pole trójkąta ABC. Figura ma jedną oś symetrii.





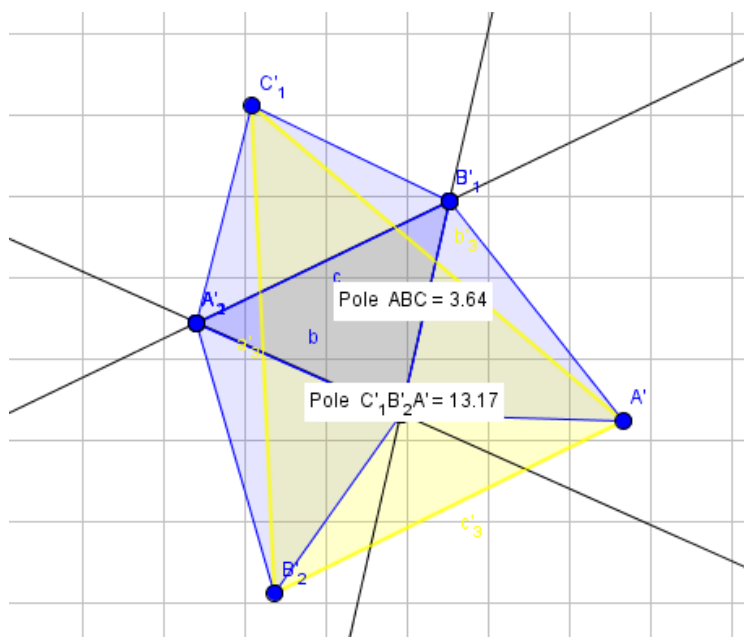
Dowolny trójkąt
różnoboczny
ostrokątny.

Gdy odbijemy trójkąt względem 3 boków, powstanie pięciokąt tylko wtedy, gdy jeden kąt trójkąta ma 60 stopni i jest to trójkąt różnoboczny. Trzy kąty o mierze 60° utworzą kąt półpełny, tak, jak na rysunku niżej.

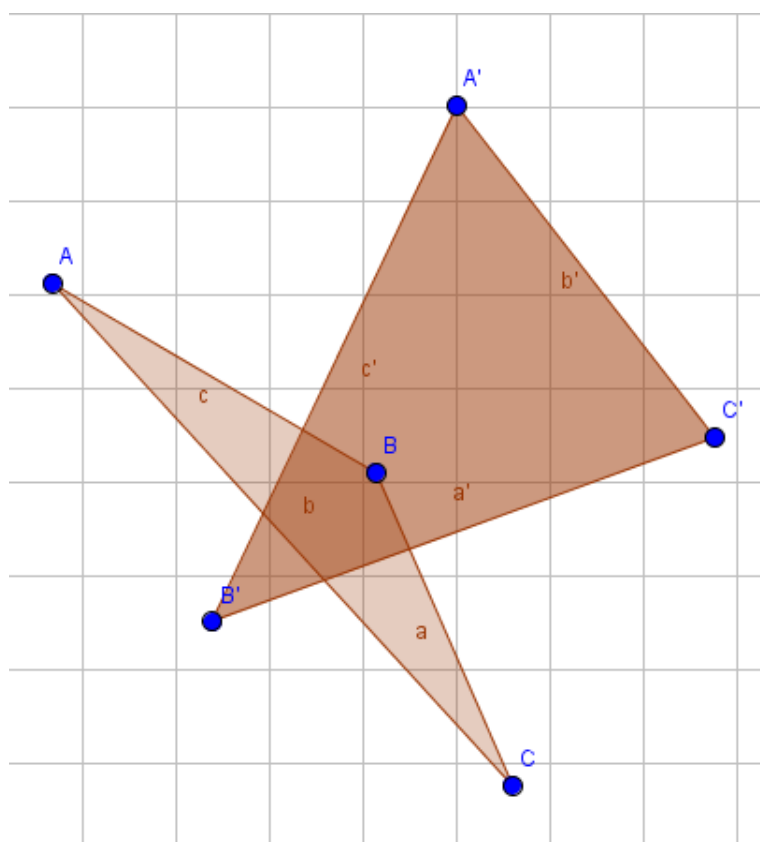


1.2 Ciekawe figury.

- 1) Jeśli połączymy otrzymane wierzchołki trójkątów odbitych na bokach (położone najdalej), otrzymamy trójkąt. Jeżeli trójkąt pierwotny był równoramienny, to ten też będzie równoramienny - posiada cechy trójkąta pierwotnego. Jego pole zmienia się zależnie od rozmiarów trójkąta i jego własności.

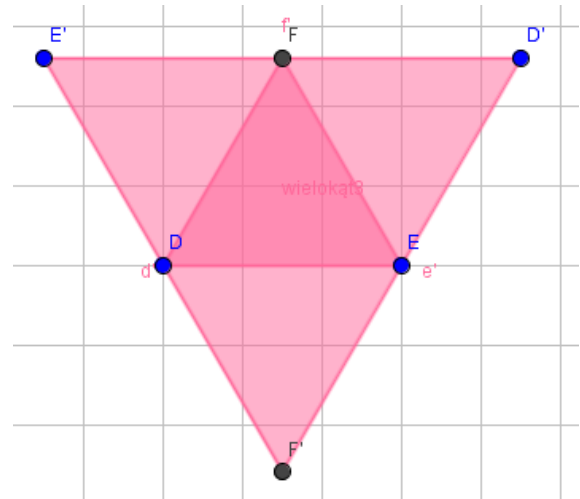


- 2) Narysowałem trójkąt i odbiłem każdy z jego wierzchołków względem boku leżącego naprzeciwko. Jeżeli trójkąt ABC jest rozwartokątny, otrzymamy Trójkąt ostrokątny $A'B'C'$. Boki trójkątów przetną się 4 razy. Jeżeli jeden z kątów ma 60° , to były 3 punkty wspólne. Można było znaleźć taki trójkąt ABC, że tych punktów wspólnych było dwa.

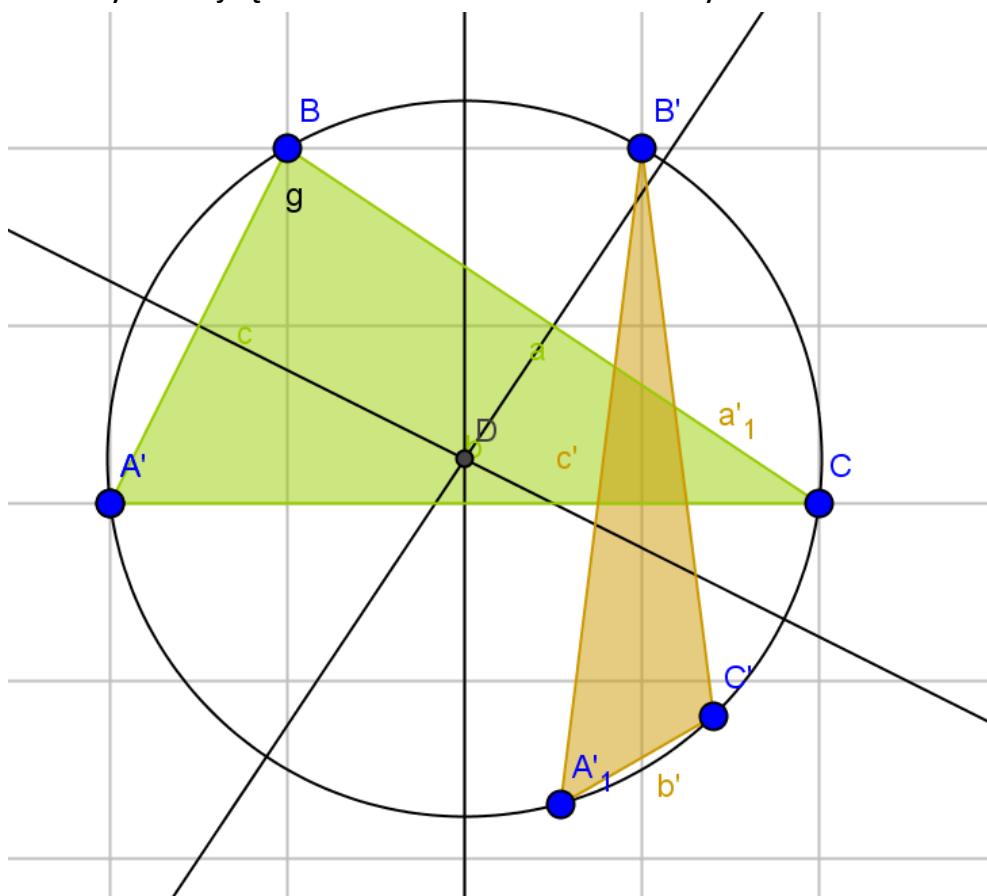


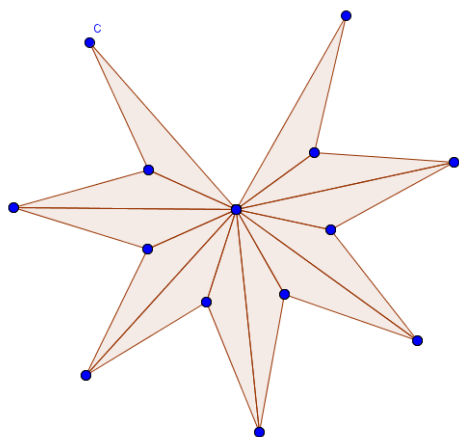
Trójkąt $A'B'C'$ był zawsze ostrokątny. Jeżeli kąt rozwarty miał 120° , to powstał odcinek, nie trójkąt.

- 3) Gdy odbijemy w taki sposób wierzchołki trójkąta równobocznego, powstanie także trójkąt równoboczny o 4 razy większym polu i 2 razy większym obwodzie.

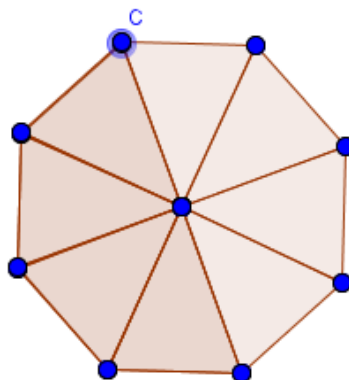
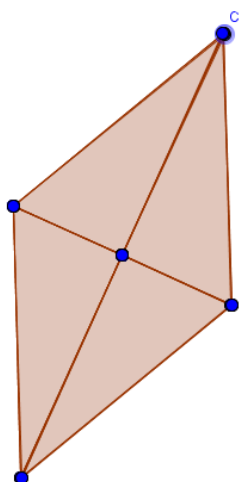
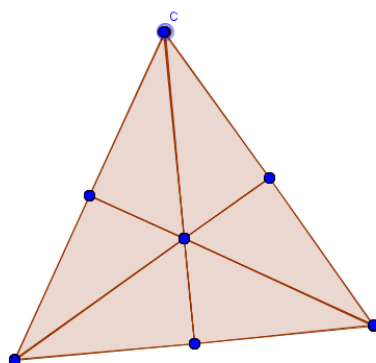
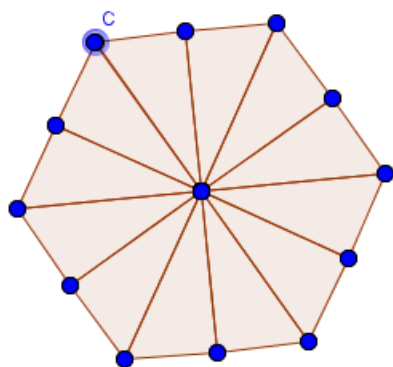
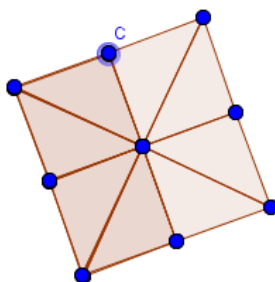


- 4) Narysowałem trójkąt ABC i symetralne każdego z jego boków. Znalazłem punkty symetryczne do wierzchołków A , B i C względem symetralnych trójkąta ABC . Odbiłem względem każdej symetralnej wierzchołki, trójkąta. Połączyłem nowe punkty i powstał drugi trójkąt. Co ciekawe, oba trójkąty są wpisane w ten sam okrąg o środku w punkcie przecięcia symetralnych. Nie są jednakowymi trójkątami. Bardzo mnie to zaskoczyło.

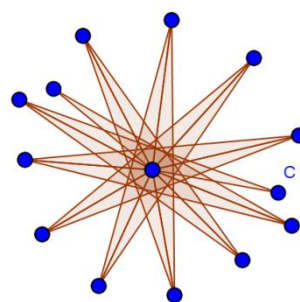
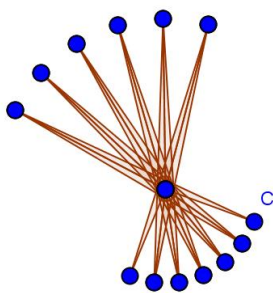
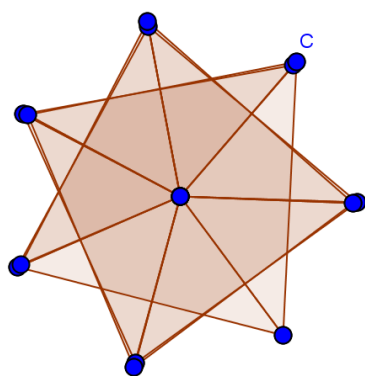
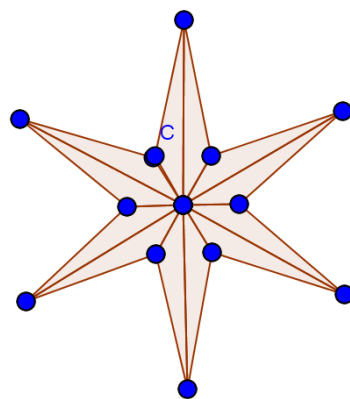
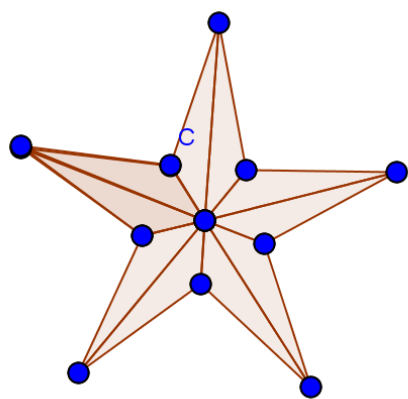
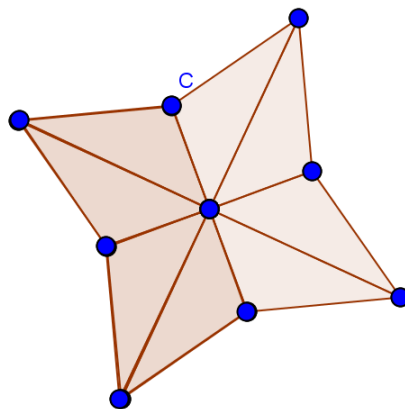
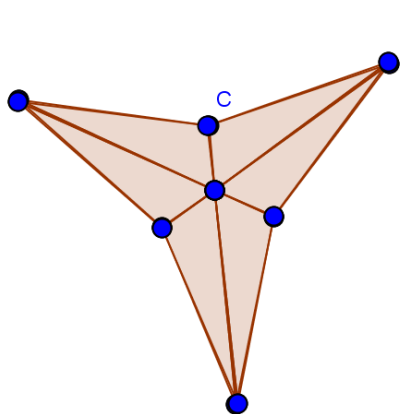




5) Wykonałem rysunek „gwiazdy”. Trójkąt „odbiłem” względem najkrótszego boku, potem otrzymany trójkąt względem najdłuższego boku itd. Aż powstało 12 trójkątów. Chwytając za punkt C otrzymałem sześciokąt foremny, kwadrat, trójkąt równoboczny, romb, ośmiokąt foremny.

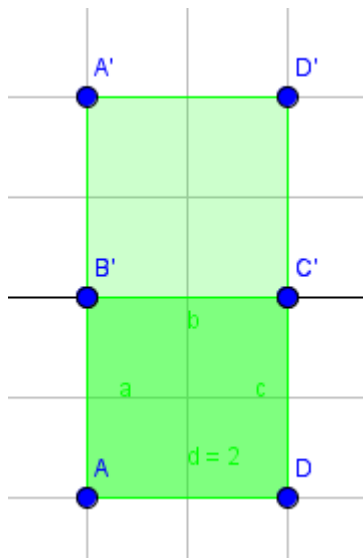


Powstały różne wielokąty gwiaździste.



1.3. Czworokąty.

Figury jakie powstają, gdy narysujemy czworokąt symetryczny do danego względem jednego z boków czworokąta.



Kwadrat odbity względem jednego boku.

Powstaje prostokąt o dwa razy dłuższym jednym boku, dwa razy większym polu i obwodzie większym o jedną trzecią.

Obwód kwadratu o boku a : $8a$

Obwód prostokąta o bokach a i $2a$: $12a$

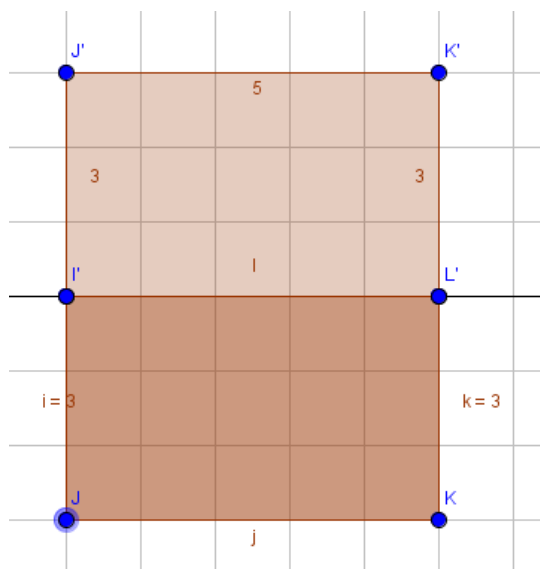
Prostokąt odbity

względem dłuższego boku daje figurę o 2 razy większym polu, a zmiana obwodu zależy od długości krótszego boku.

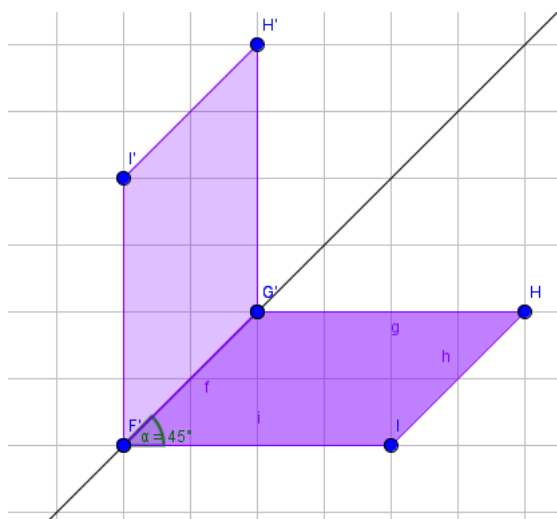
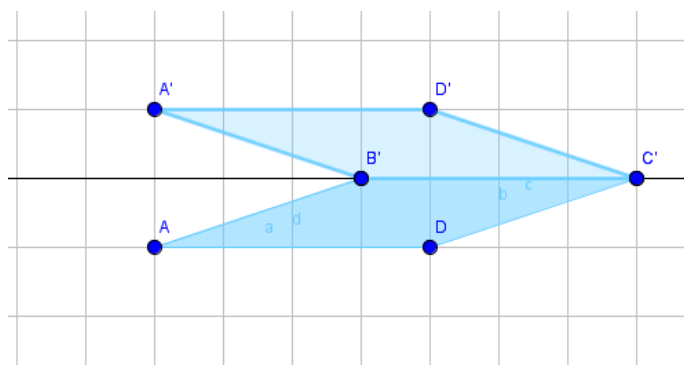
Odbity względem krótszego daje takie same rezultaty.

Obwód prostokąta KLIJ: 16

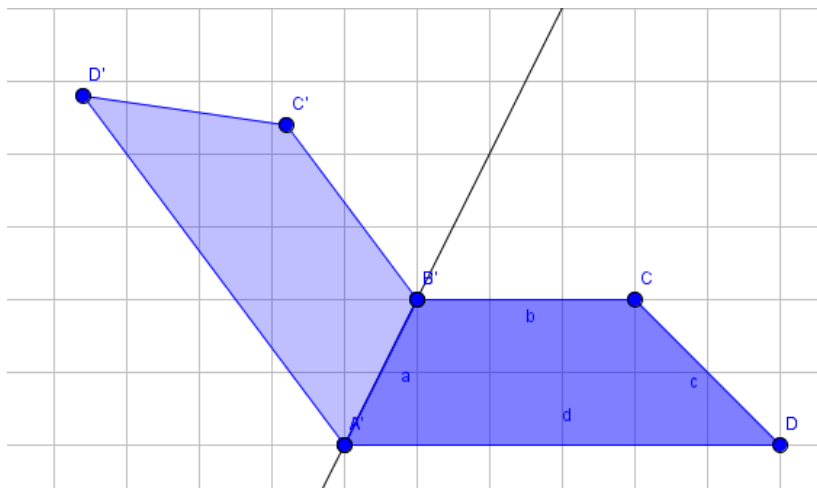
Obwód prostokąta JKK'J' : 22



Odbicie równoległoboku nie będącego prostokątem ani rombem daje sześciokąt, niezależnie od boku, względem którego odbijamy. Jednak jeśli mniejszy kąt będzie miał 45 stopni, powstanie sześciokąt z kątem prostym.

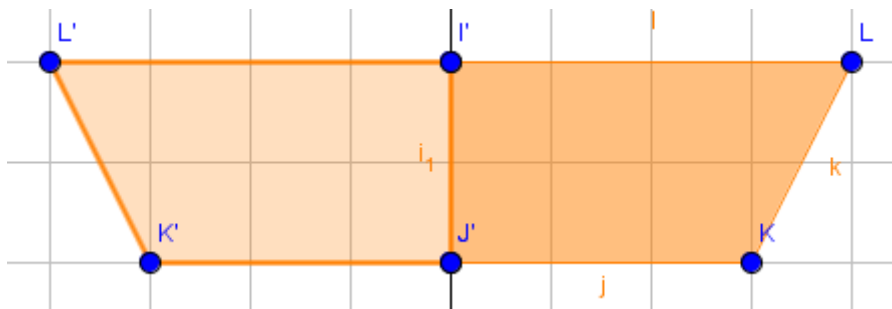


Trapez (niebędący inną figurą) odbity względem któregoś z boków prawie



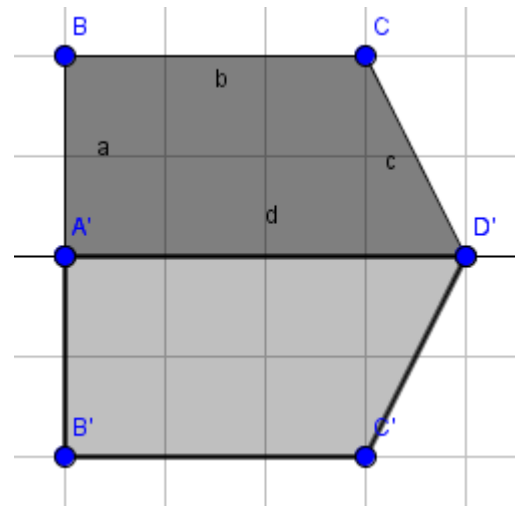
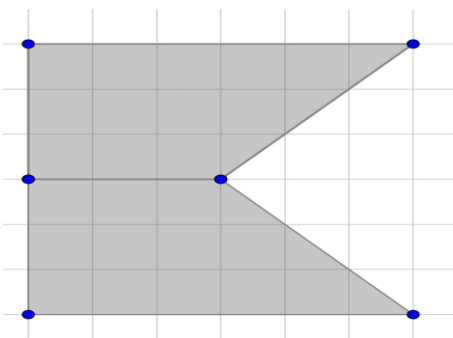
zawsze daje
sześciokąt,

Wyjątkiem jest trapez prostokątny odbity względem boku przy kątach prostych
- powstaje duży trapez równoramienny o wysokości równej długości boku
leżącego na osi symetrii.

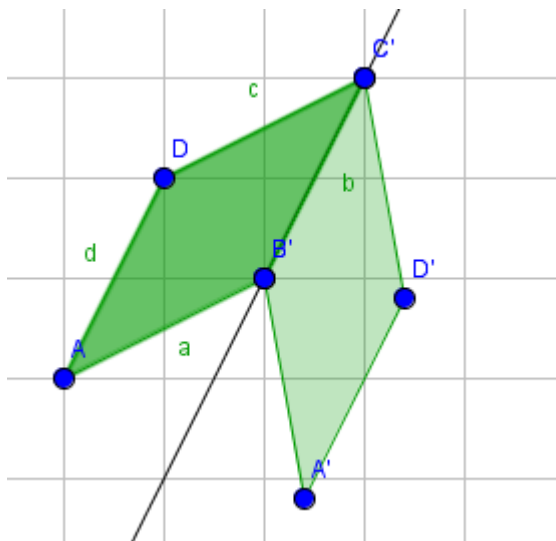


Odbity względem jednej z „podstaw” daje pięciokąt. Wpukły lub wklęsły.

Figura ma jedną oś symetrii. Pola figur podwajają się, a obwody zmieniają się zależnie od długości boku, który należy do osi symetrii.

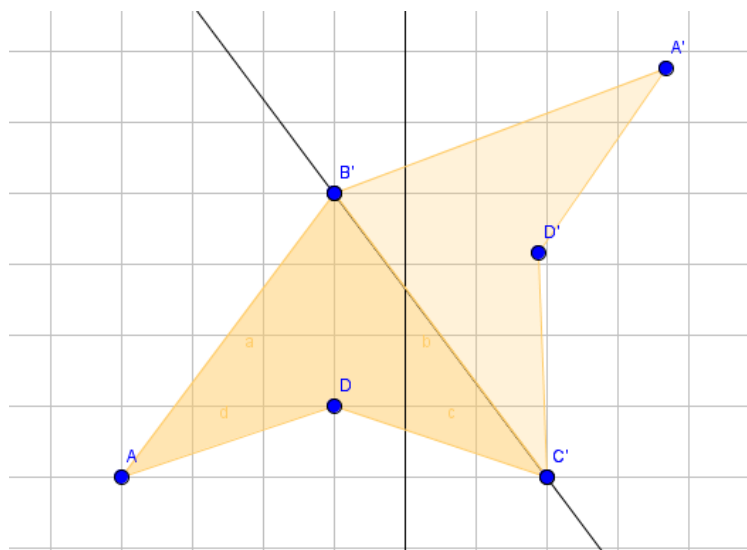
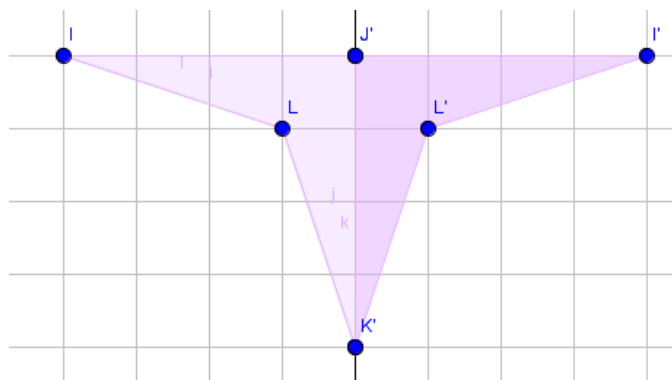


Romby to najprostrza sprawa - zawsze ukaże się pięciokąt z jednym kątem wklęsłym o obwodzie większym o $\frac{3}{4}$. Figura ma jedną oś symetrii.

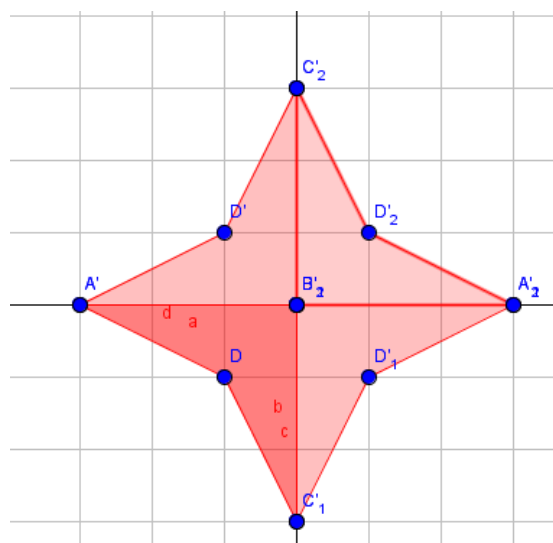


Deltoidy dają bardzo ciekawe efekty. „Strzałka” czyli deltoid wklęsły. Na rysunku jest sześciokąt.

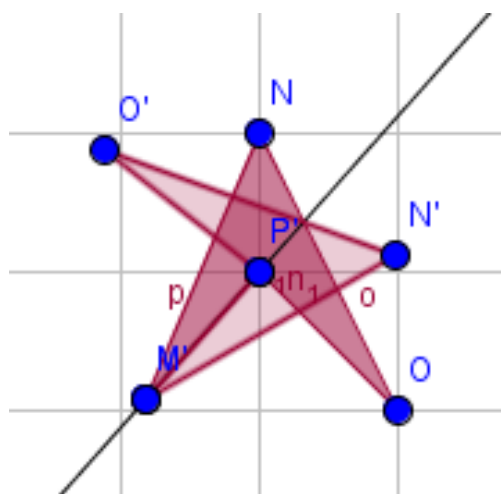
Dla deltoidu prostokątnego otrzymujemy pięciokąt.



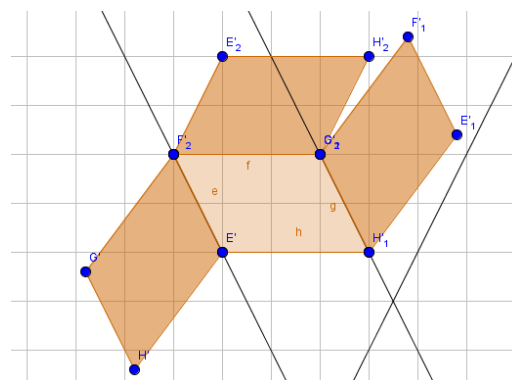
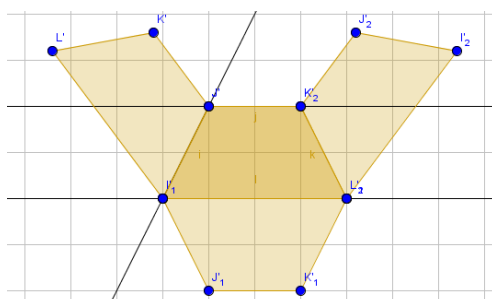
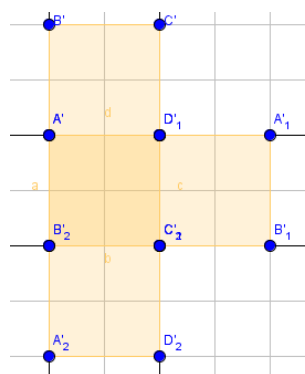
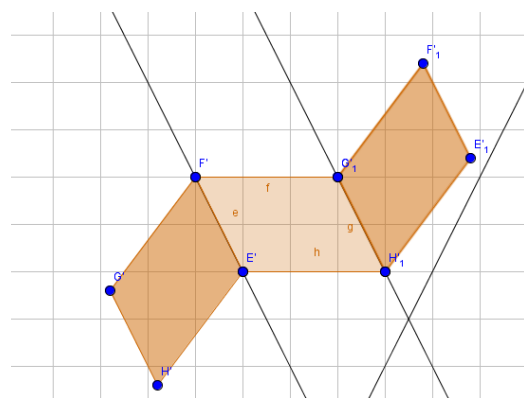
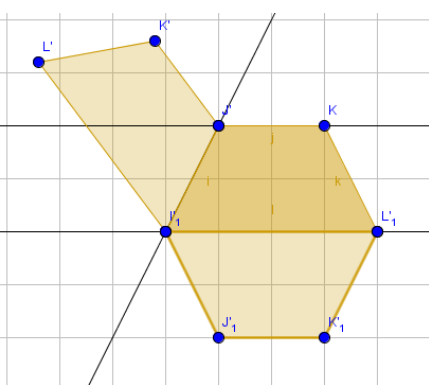
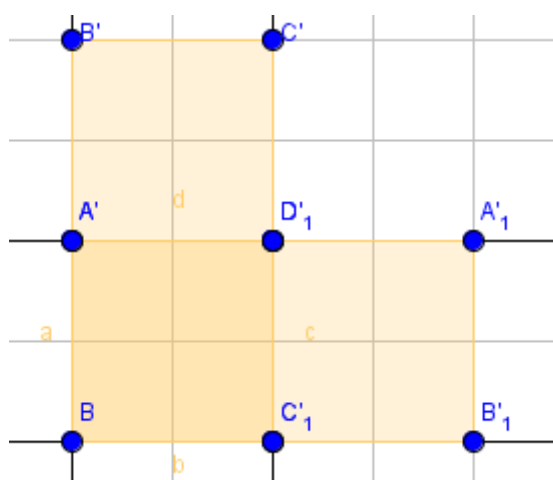
Zauważyłem, że gdy odbijemy go dwa razy osiowo i raz środkowo powstanie piękna gwiazdka.

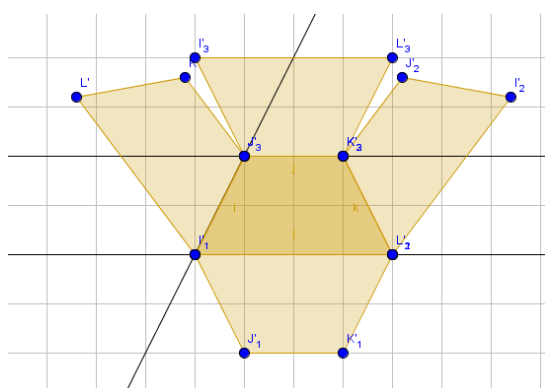
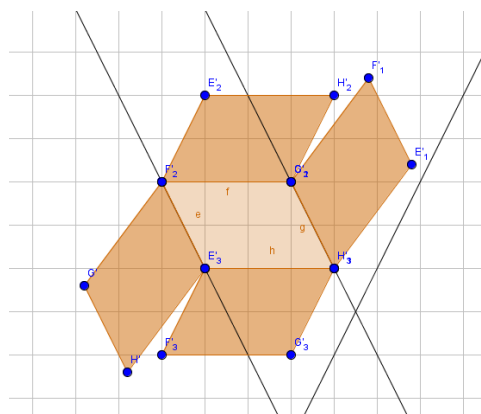
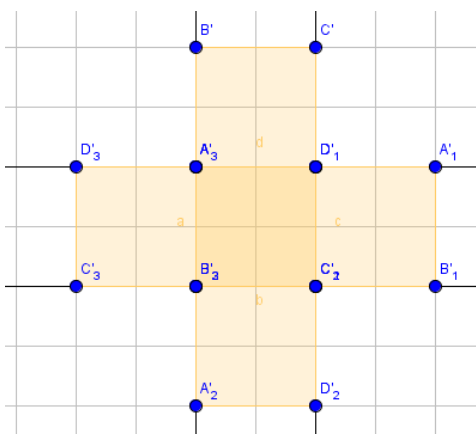


Odbity względem boku przy kącie wklęsłym „najdzie na siebie”. Otrzymamy dziesięciokąt. Figura ma oś symetrii.



Figury jakie powstają, gdy narysujemy czworokąt symetryczny do danego względem dwóch, trzech lub czterech boków czworokąta.



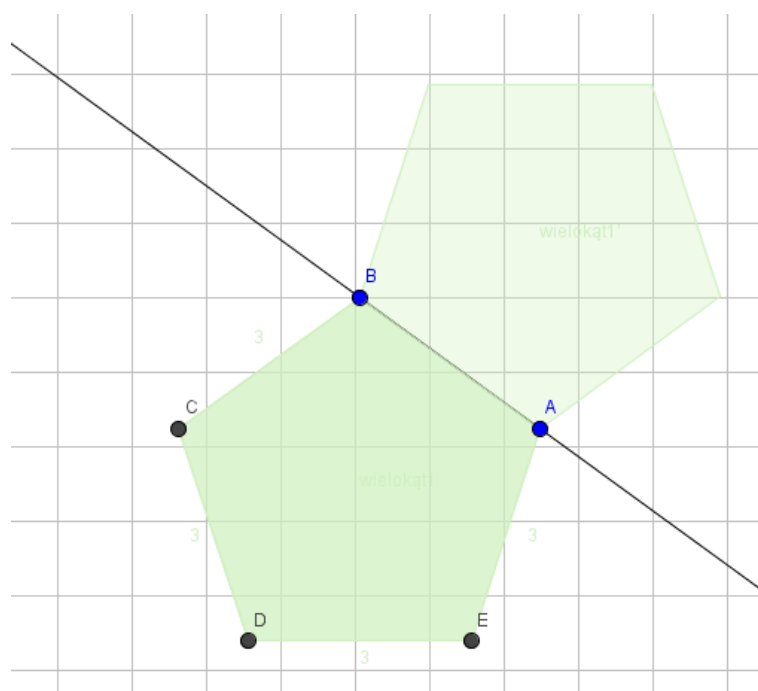


Niektóre figury mają oś symetrii, niektóre środek symetrii, a czasem otrzymana figura nie ma ani środka, ani osi symetrii.

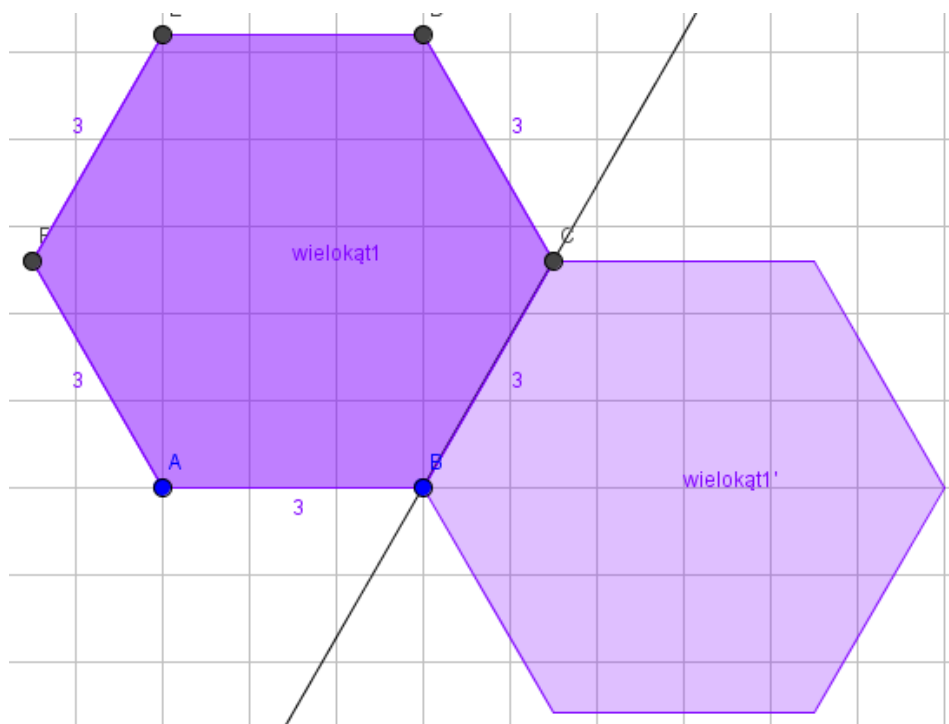
1.4. Wielokąty foremne

Wielokąty foremne

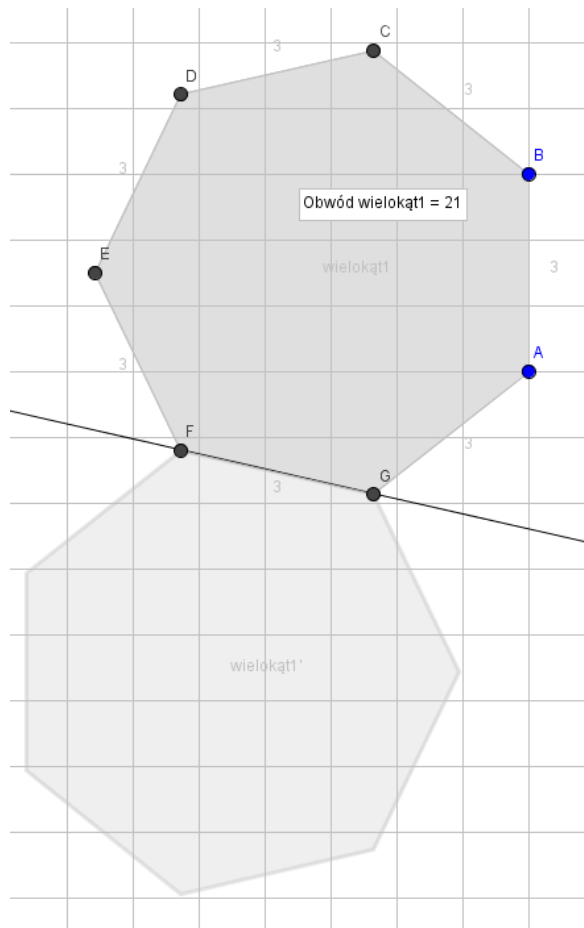
Pięciokąt: powstaje ośmiokąt o obwodzie większym o $\frac{3}{5}$. Ma 2 osie symetrii. Jego pole jest dwa razy większe niż pole pięciokąta.



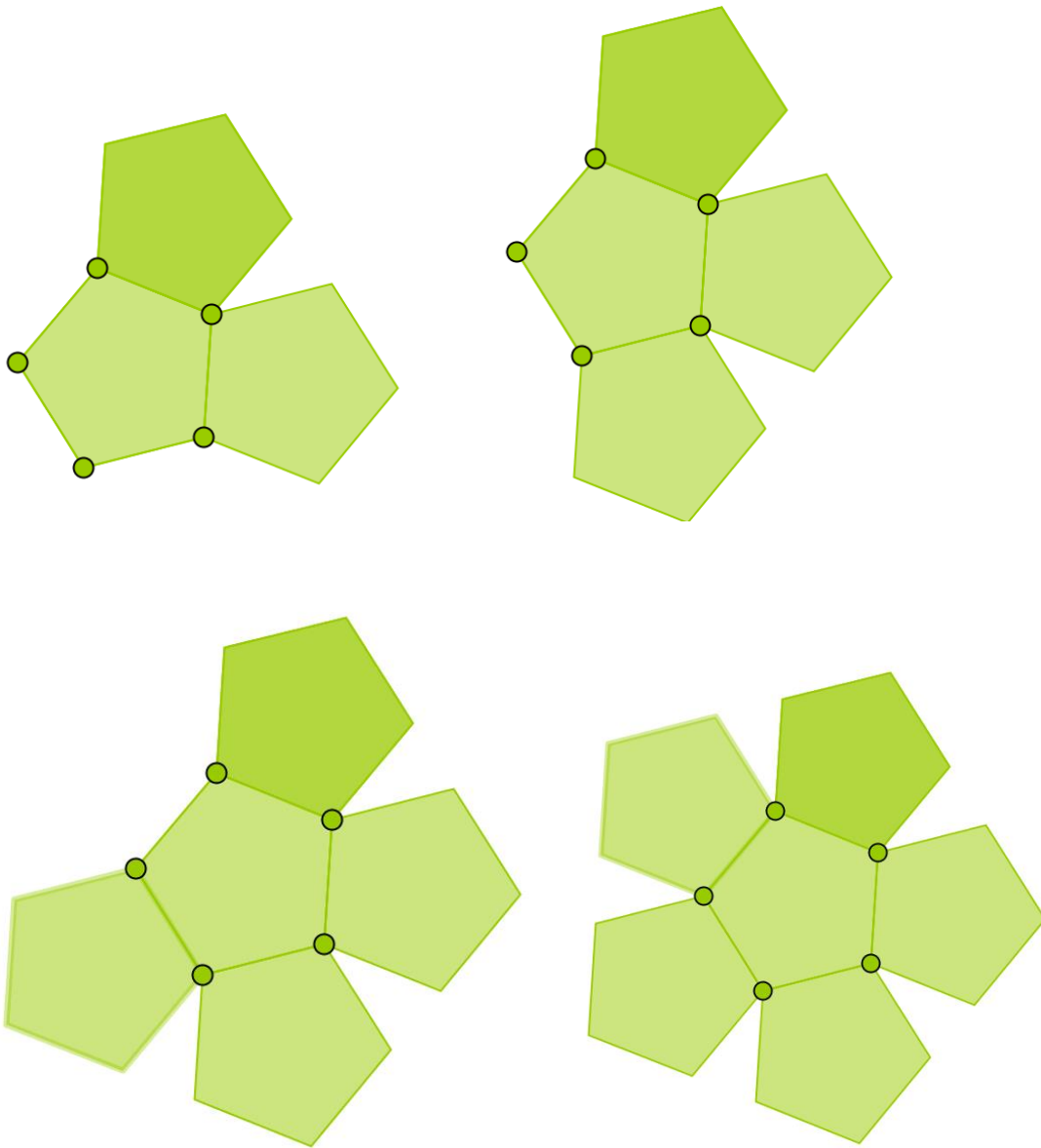
Sześciokąt: powstaje dziesięciokąt o obwodzie większym o $\frac{2}{3}$. Ma 2 osie symetrii.



Siedmiokąt: powstaje dwunastokąt o obwodzie większym o dokładnie $0,(714285)$ starego.



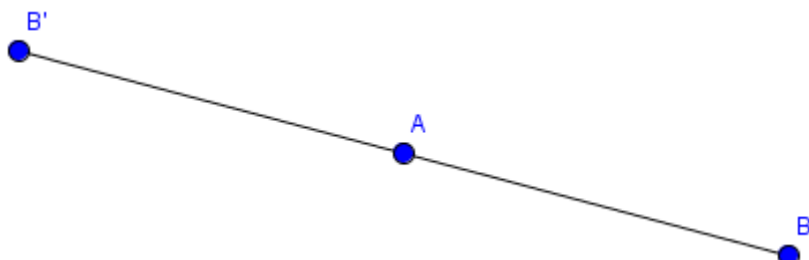
Wniosek: Każdy wielokąt foremny po odbiciu względem jednego boku ma 2 osie symetrii, a liczba wierzchołków nowopowstałego wielokąta wynosi $x \cdot 2 - 2$, gdzie x to liczba wierzchołków pierwotnego wielokąta foremnego (oprócz kwadratu) (np. $6 \cdot 2 - 2 = 12 - 2 = 10$ ✓).



Dla pięciokąta otrzymujemy kolejno ośmiokąt (wcześniej), jedenastokąt, czternastokąt, siedemnastokąt i dwudziestokąt. Liczbę wierzchołków można obliczyć $5 + 3k$ k - liczba boków względem, których rysujemy pięciokąt symetryczny. Dwie osie symetrii miał tylko pierwszy przypadek, pięć ostatni, a pozostałe po jednej osi.

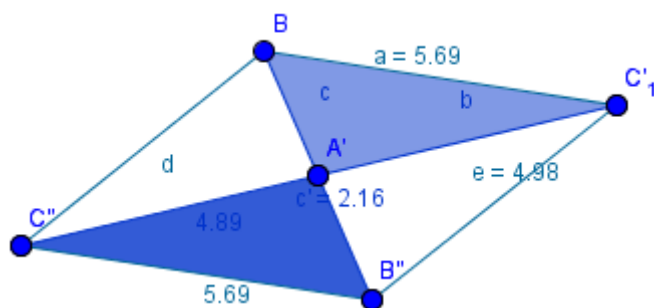
2. Symetria środkowa

Symetria środkowa – odwzorowanie geometryczne płaszczyzny lub przestrzeni takie, że punktowi B odpowiada B' wtedy i tylko wtedy, gdy punkt A, zwany środkiem symetrii środkowej, jest środkiem odcinka BB'.

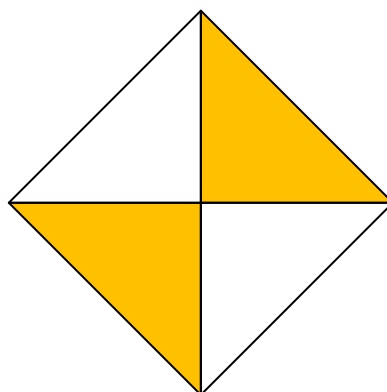


2.1 Trójkąty

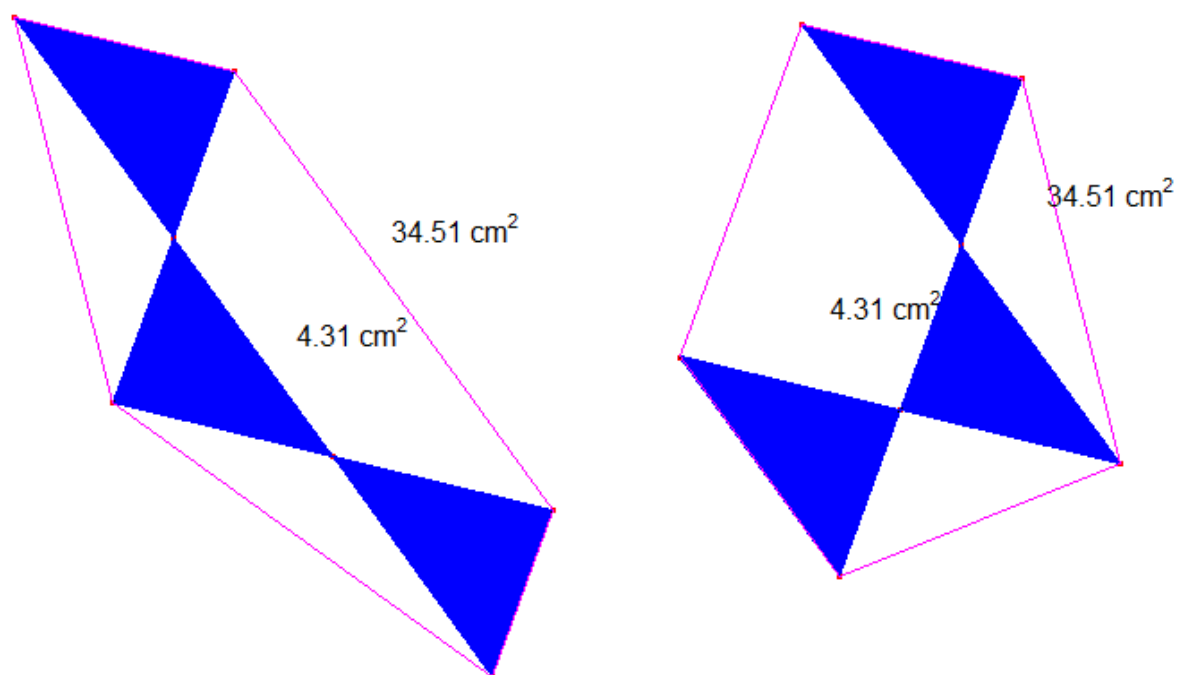
2.1.1. Symetria względem jednego z wierzchołków.



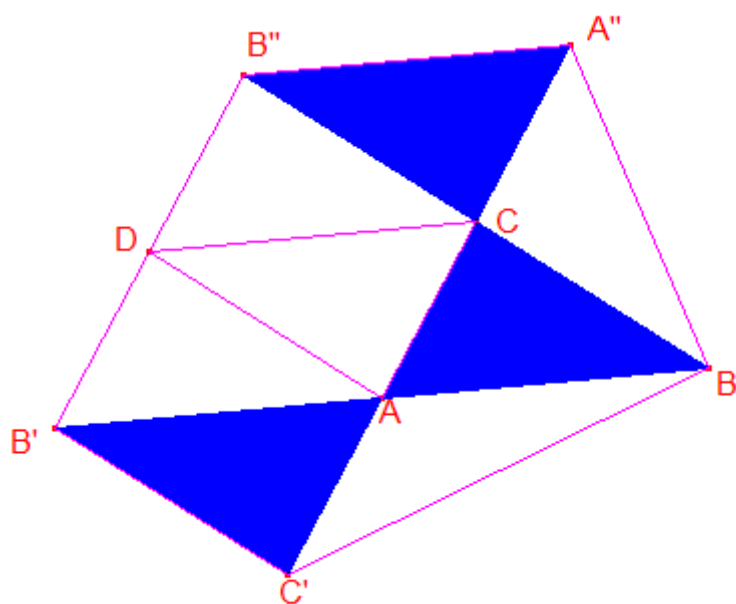
Na rysunku Trójkąt $C''B''A'$ jest symetryczny do trójkąta $A'BC'_1$. Jeśli połączę wierzchołki $C''B''C'_1B$, otrzymam równoległobok. Figura ma środek symetrii. Pole równoległoboku jest 4 razy większe od pola trójkąta. Obwód jest cztery razy większy od długości boku, który leżał naprzeciwko środka symetrii. Dla trójkąta prostokątnego równoramiennego otrzymałem kwadrat.



2.1.2. Symetria względem dwóch wierzchołków.

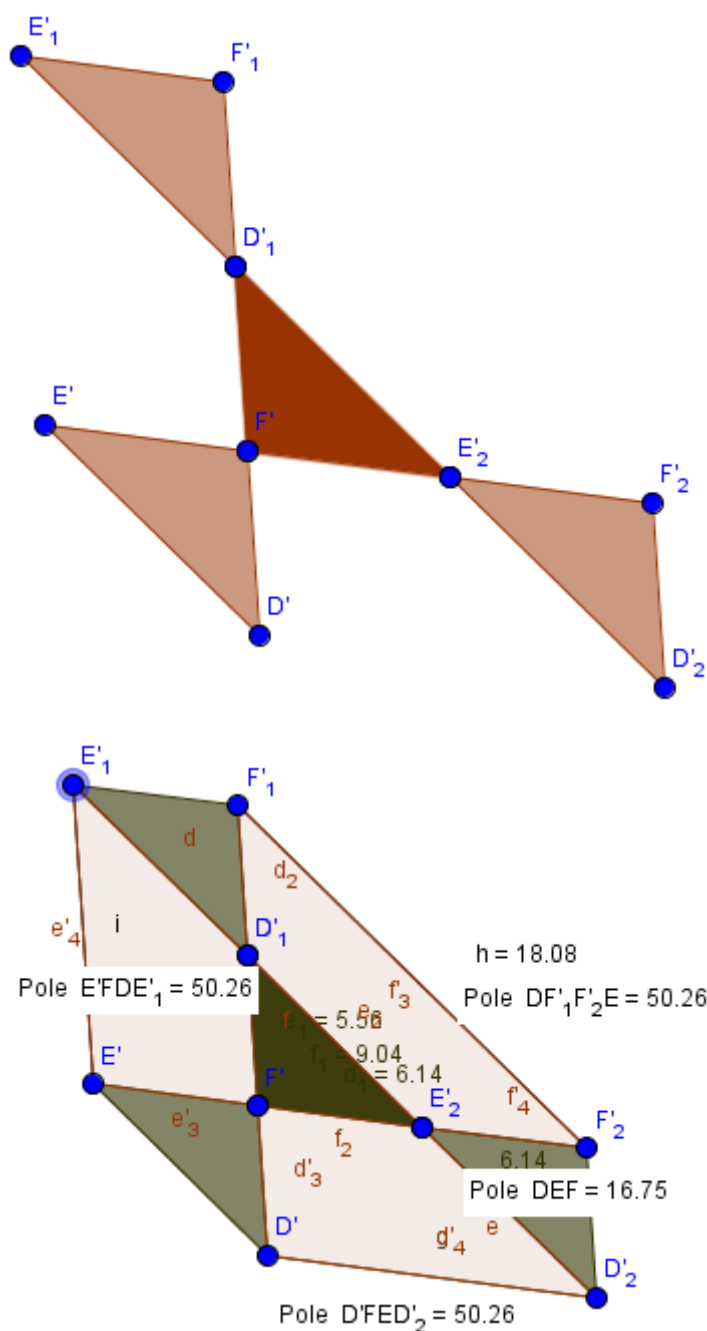


Zauważyłem, że pola narysowanych pięciokątów są osiem razy większe od pola jednego trójkąta.

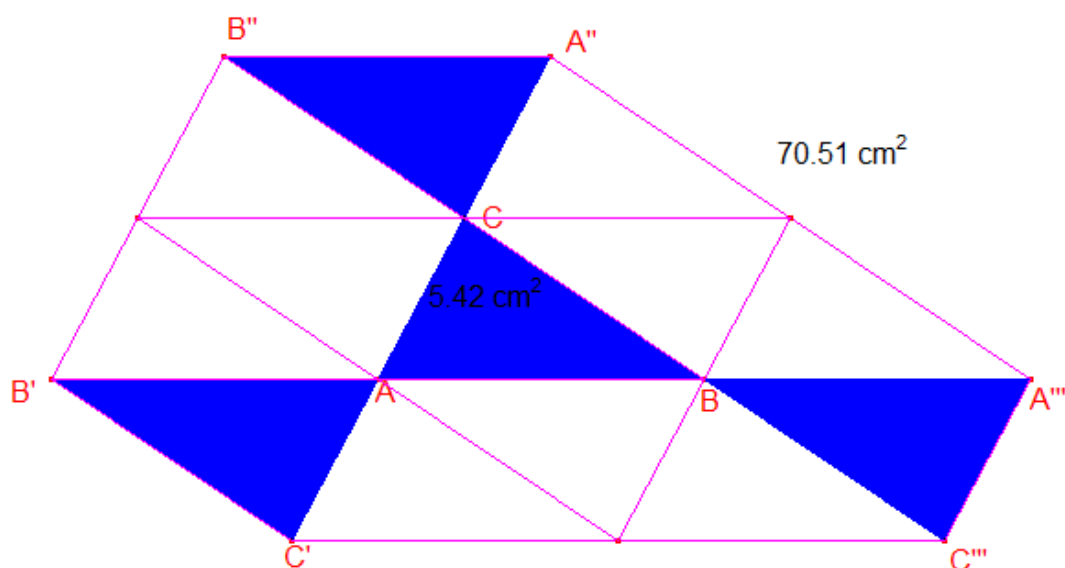


Podzieliłem pięciokąt na trójkąty. Punkt D jest środkiem boku $B'B''$. Wszystkie trójkąty mają jednakowe pola. Jest ich osiem.

2.1.3. Symetria względem trzech wierzchołków.



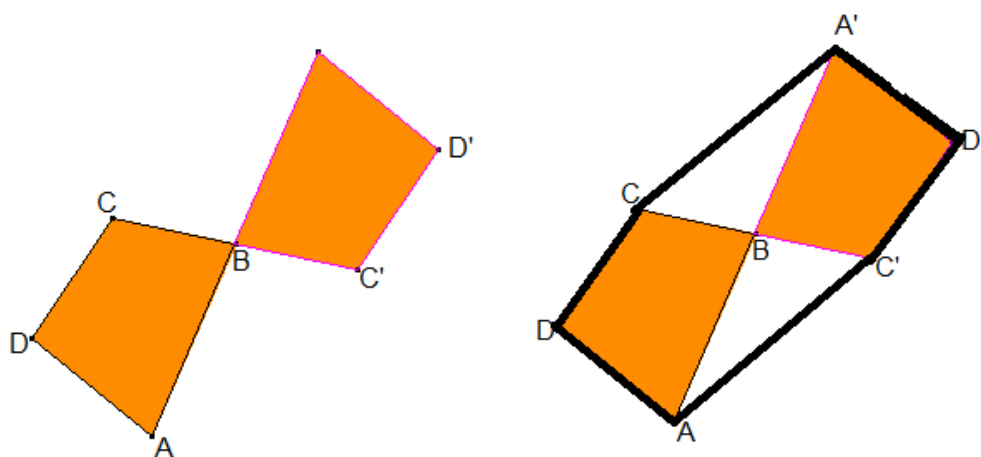
Po połączeniu wierzchołków trójkątów „odbitych” od każdego z wierzchołków najciemniejszego trójkąta powstał sześciokąt złożony z trójkąta i odbitych od niego trzech trójkątów oraz trzech czworokątów. Czworokąty są trapezami. Pole sześciokąta jest 13 razy większe niż pole pierwszego ciemnego trójkąta. Można podzielić każdy z trapezów na trzy trójkąty, podobnie jak wcześniej.



2.2. Czworokąty

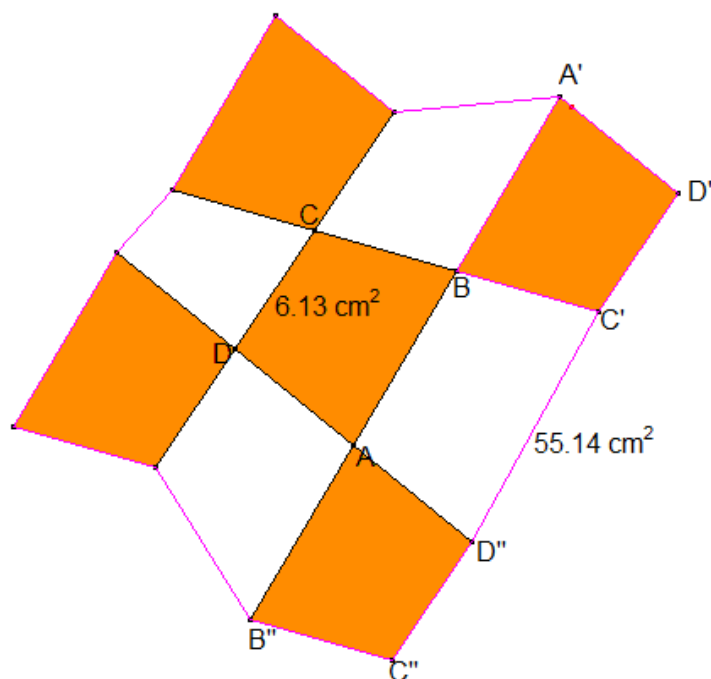
Zastanawiałem się jakie figury otrzymam, jeśli narysuję czworokąt.

2.2.1. Symetria względem jednego z wierzchołków.

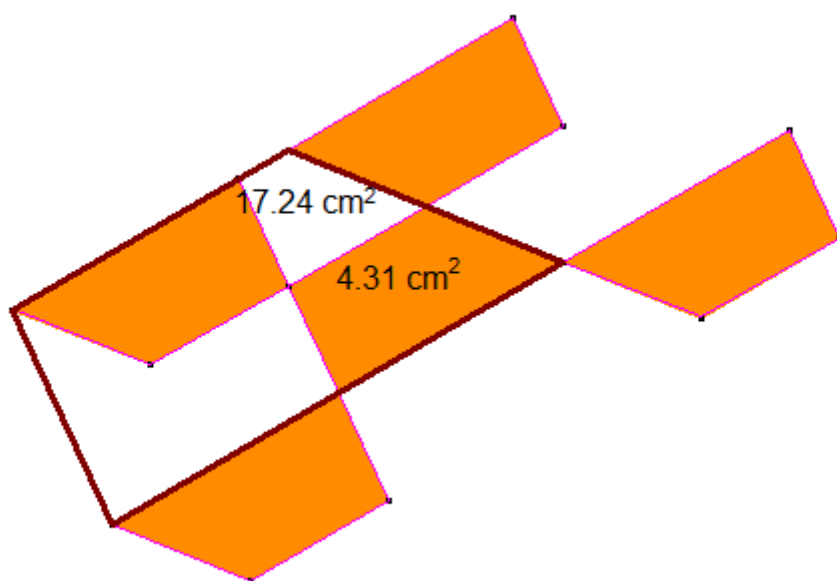


Po połączeniu wierzchołków trójkątów odbitych środkowosymetrycznie powstał sześciokąt. Pola i obwody różnią się. Nie zauważyłem podobnej własności jak dla trójkątów dla dwóch i dla trzech wierzchołków.

Natomiast dla czterech wierzchołków okazało się, że otrzymany wielokąt (najczęściej był to dwunastokąt) ma pole 9 razy większe. Dla kwadratu otrzymalibyśmy kwadrat 9 razy większy.

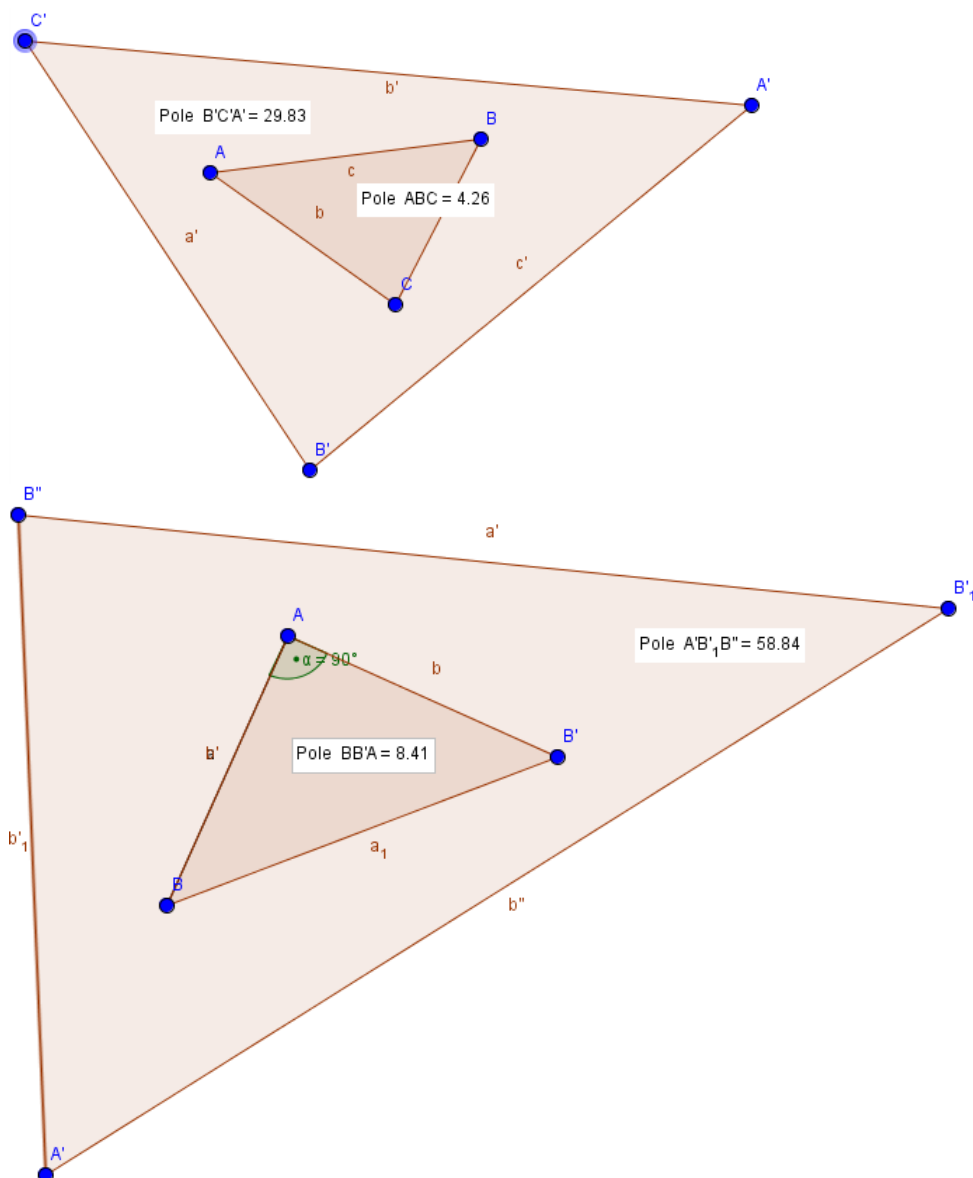


Zauważyłem jeszcze, że gdy połączę odpowiednie punkty $B'(B'=B)$, B'' , B''' i B'''' , to otrzymany czworokąt ma pole 4 razy większe niż czworokąt $ABCD$, który narysowałem jako pierwszy.

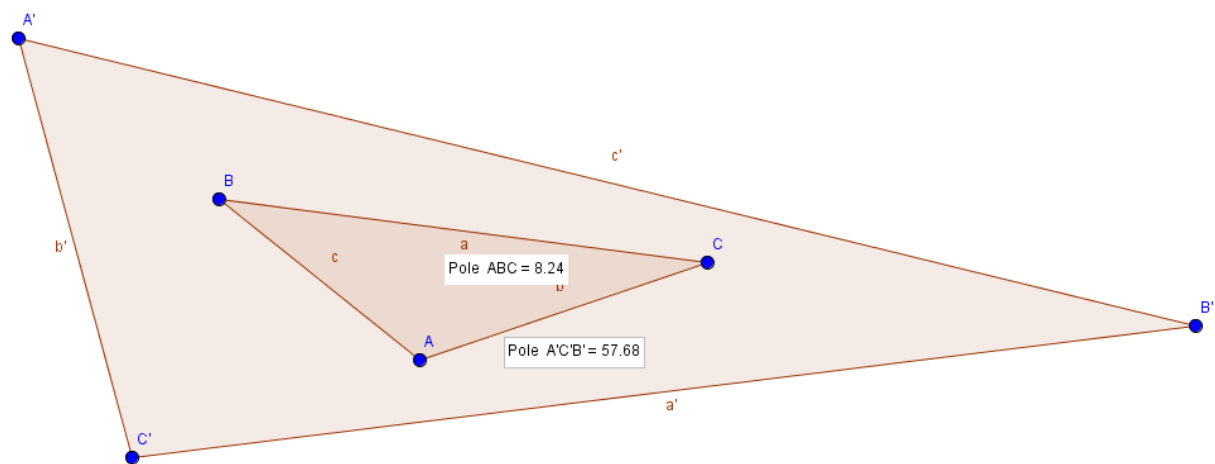
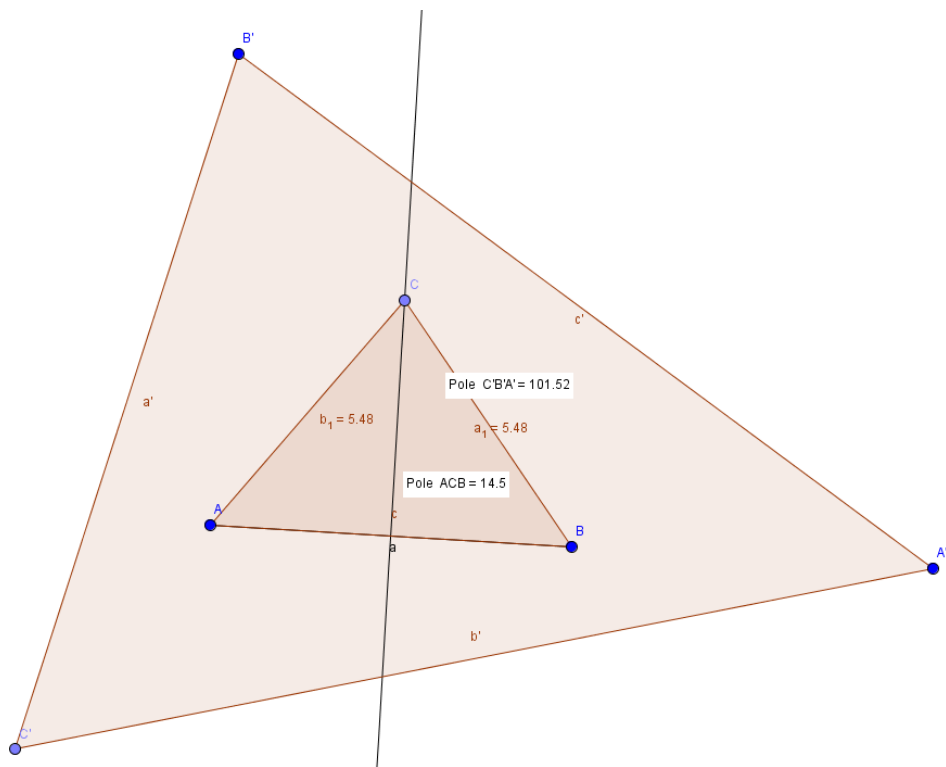


2.3. Ciekawe figury

Narysowałem trójkąt i znalazłem punkt symetryczny dla każdego z wierzchołków względem innego z wierzchołków. A' jest symetryczny do A względem B , B' do B względem C , a punkt C' jest symetryczny do C względem punktu A .

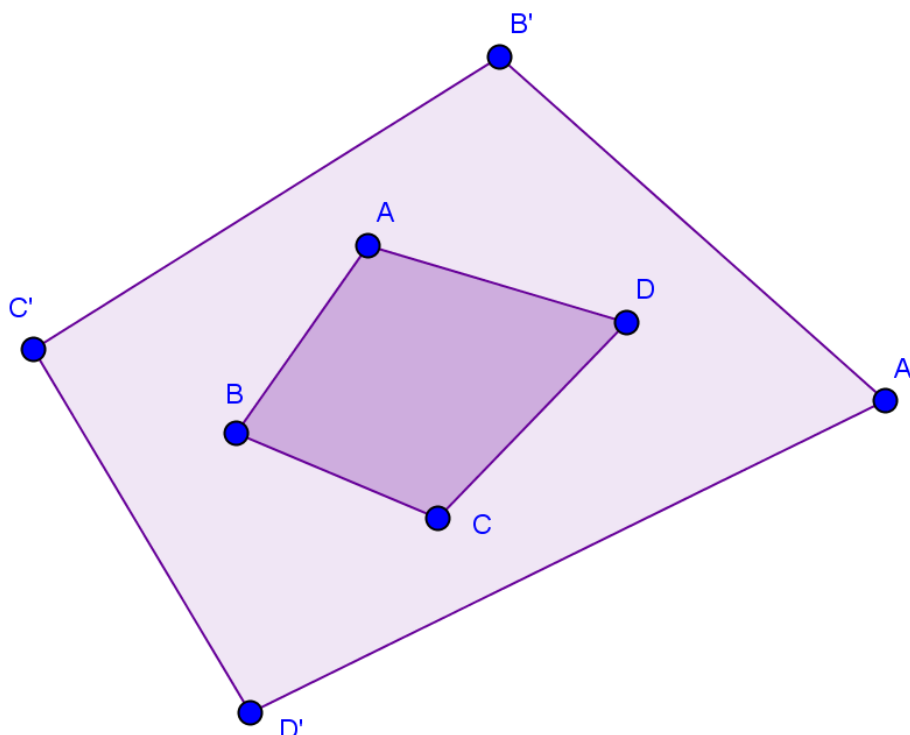


Trójkąt większy od trójkąta mniejszego prostokątnego nie jest prostokątny.



Pole trójkąta ABC w każdym przypadku jest 7 razy większe od pola trójkąta $A'B'C'$.

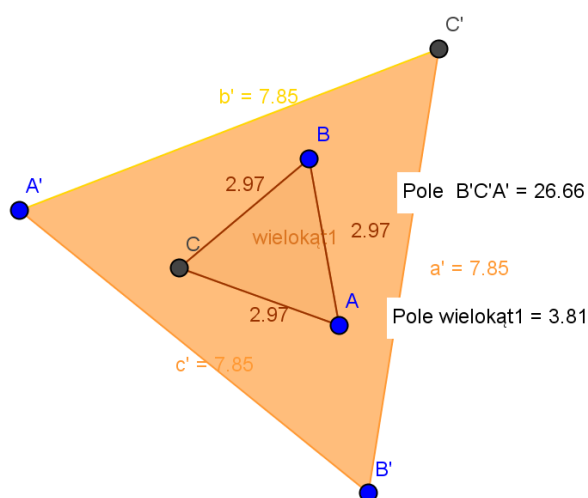
Zastanawiałem się, czy dla czworokątów jest podobna własność?



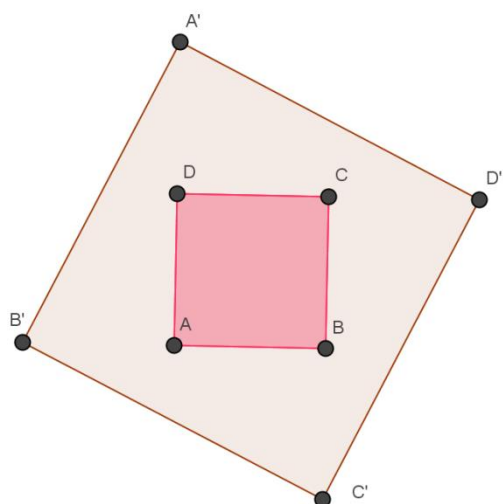
Dla czworokąta wypukłego ABCD, otrzymałem czworokąt $A'B'C'D'$. Pole tego drugiego jest 5 razy większe od pola ABCD.

2.4. Wielokąty foremne

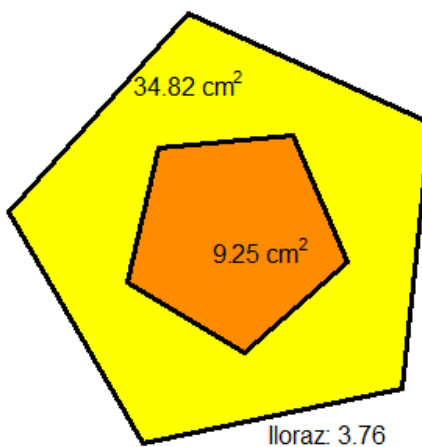
Sprawdziłem dla wielokątów foremnych. Zacząłem od **trójkąta równobocznego**.



Pole trójkąta $A'B'C'$ jest 7 razy większe od pola trójkąta ABC. Podobnie, jak to zauważyłem dla dowolnego trójkąta.



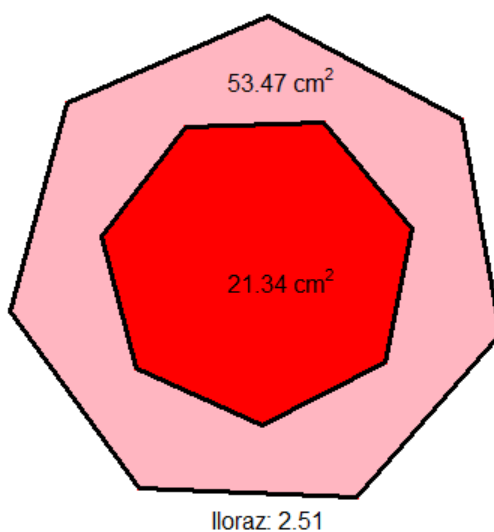
Kwadrat – pole $A'B'C'D'$ jest 5 razy większe niż pole ABCD



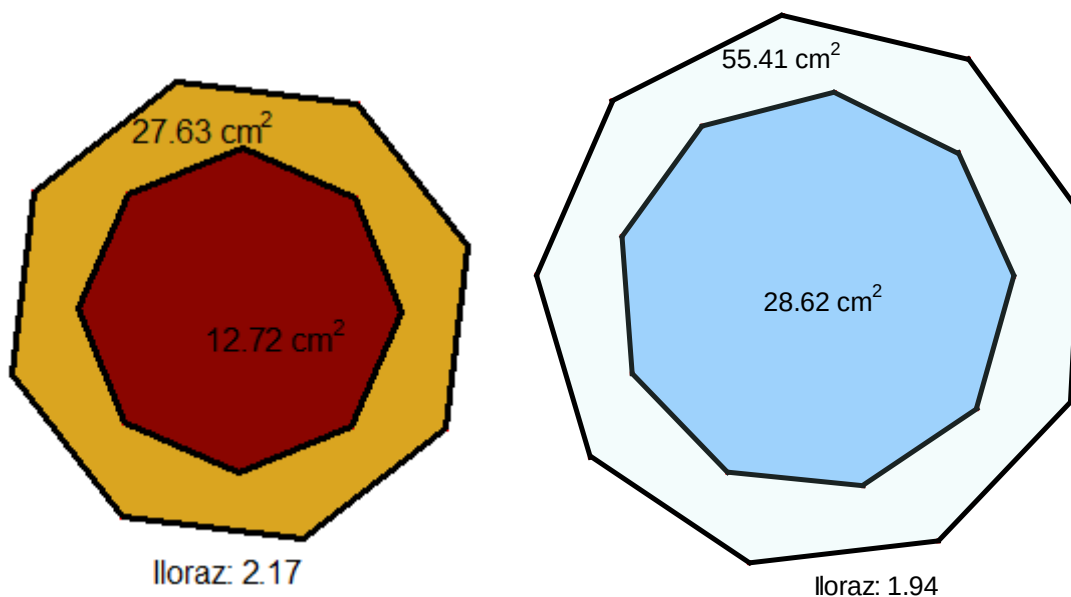
Pięciokąt foremny. Stosunek pól (większego do mniejszego) był zawsze taki sam i wynosił 3.76.



Sześciokąt foremny –Stosunek pól (większego do mniejszego) był zawsze taki sam wynosił 3.



Siedmiokąt foremny –Stosunek pól (większego do mniejszego) był zawsze taki sam wynosił 2.51.



Iloraz pól jest coraz mniejszą liczbą.

Zakończenie

Nasze odkrycia nie są wielkie. Być może w przyszłości uda się nam odkryć coś ważnego. Dopiero zaczynamy pracę badawczą. Program GeoGebra umożliwia eksperymentowanie geometryczne i odkrywanie ciekawych figur i ich własności. Symetria to bardzo ciekawy temat. To fascynujące, że spotykamy ją tak często wokół nas. Używając symetrii można utworzyć ciekawe lub czasami zaskakujące figury i wyciągnąć mądre wnioski. Według mnie, jest to ważny element matematyki oraz przyrody.

Literatura i pomoce:

Encyklopedia Szkolna Matematyka, przewodniczący - prof. dr hab. Włodzimierz Waliszewski, WSiP, Warszawa 1988 r.

Program GeoGebra

Program Cabri II Plus

Program Paint

Zdjęcia własne i z internetu