Własności punktów w czworokątach

Autor: Michał Woźny
Gimnazjum nr 2 im. A. Mickiewicza w Krakowie

Opiekun pracy: dr Jacek Dymel

Spis treści

1. Wstęp

Niniejsza praca jest zbiorem moich badań nad własnościami punktów w czworokątach o prostopadłych przekątnych w oparciu o artykuł z pewnego angielskiego portalu geometrycznego. Przedstawione poniżej przykłady są tylko kilkoma najciekawszymi obserwacjami jakich dokonałem. Każda zaprezentowana własność jest poparty dowodem. Poza przedstawionymi w tej pracy własnościami badałem również zależności pomiędzy symetralnymi pewnych odcinków w czworokącie, okręgami opisanymi oraz dwusiecznymi.

2. Badanie własności punktów będących środkami boków w czworokącie o prostopadłych przekątnych

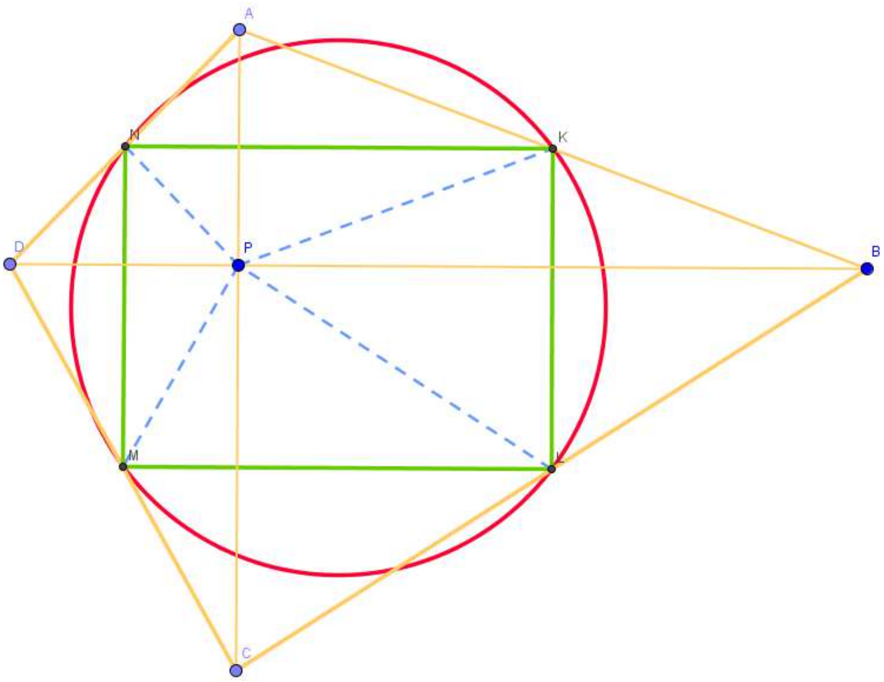
Założenia:

Przekątne czworokąta *ABCD* są prostopadłe.

Punkty *K*, *L*, *M* i *N* leżą odpowiednio na środkach boków *AB*, *BC*, *CD* i *DA*.

Twierdzenie:

Punkty *KLMN* leżą na jednym okręgu.



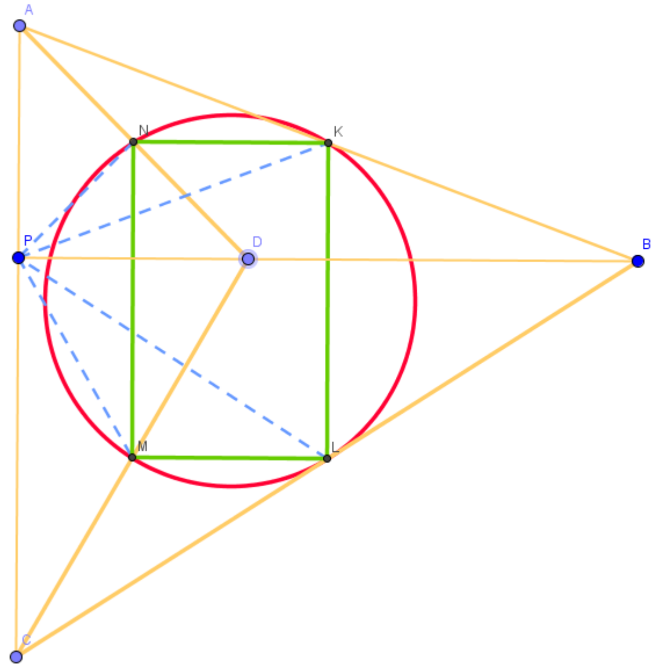
Dowód:

Na początek weźmy pod uwagę trójkąt *ABC* i punkty *K* oraz *L* leżące odpowiednio na boku *AB* i *BC*. Poprowadźmy prostą równoległą do odcinka *AC* przechodzącą przez punkt *K* i przecinającą odcinek *BP* w punkcie *X*. Wtedy korzystając z twierdzenia Talesa otrzymujemy, że stosunek długości odcinków *PX* do *XB* wynosi 1 do 1, ponieważ stosunek odcinków *AK* do *KB* wynosi 1 do 1. Teraz analogiczne postępowanie stosujemy co do punktu *L* i odcinka *BP* na którym zaznaczamy punkt *Y*. Jak wcześniej z twierdzenia Talesa otrzymujemy, że *PY* do *YB* wynosi 1 do 1. Zatem punkty *X* i *Y* pokrywają się. Z tego wynika, że odcinek *KL* jest równoległy do odcinka *AC*. Analogiczne rozumowanie przeprowadzamy dla trójkątów *CDA*, *BCD* i *DAB*. Stąd i z faktu, że przekątne przecinają się pod kątem prostym otrzymujemy, że czworokąt *KLMN* jest prostokątem. Zatem na czworokącie *KLMN* można opisać okrąg, ponieważ suma kątów przy przeciwległych wierzchołkach wynosi 180°. Ponadto należy zauważyć, że w tym dowodzie wykazaliśmy również, że czworokąt *ABCD* jest prostokątem.

■

Zauważmy, że dla czworokąta wklęsłego *ABCD* również da się opisać okrąg na punktach *K*, *L*, *M*, *N*, będących środkami boków czworokąta o prostopadłych przekątnych.

Dowód tej własności jest analogiczny do tego przedstawionego powyżej. Poniżej przedstawiam taką sytuację na rysunku.



3. Badanie własności punktów będących rzutami prostokątnymi punktu przecięcia się przekątnych na boki w czworokącie o prostopadłych przekątnych

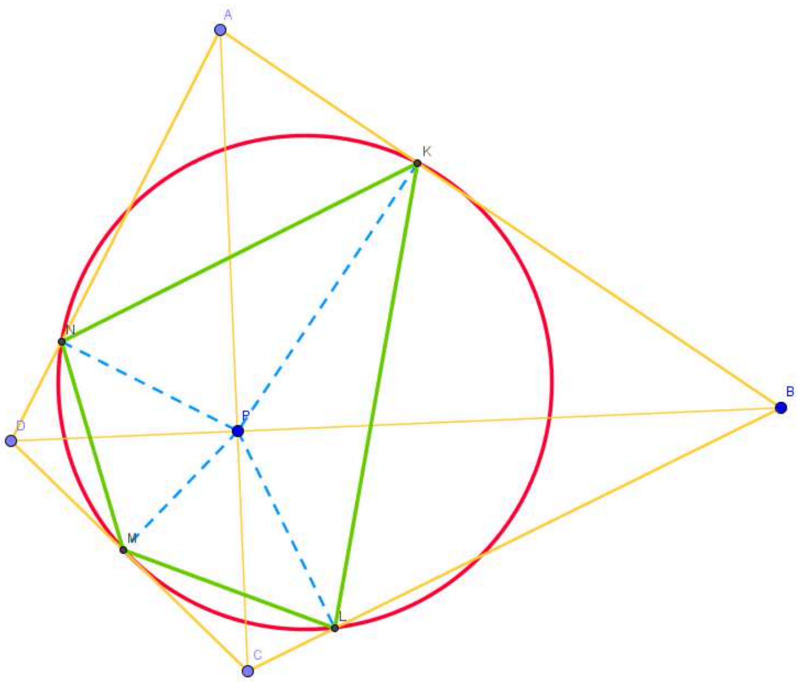
Założenia:

Czworokąt *ABCD* jest wypukły, a jego przekątne są prostopadłe.

Punkty *K*, *L*, *M* i *N* są rzutami punktu *P*, będącego punktem przecięcia się przekątnych, odpowiednio na boki *AB*, *BC*, *CD* i *DA*.

Twierdzenie:

Punkty *KLMN* leżą na jednym okręgu.



Dowód:

Na początku zauważmy, że na każdym z czterech czworokątów *AKPN*, *BLPK*, *CMPL* i *DNPM* możemy opisać okrąg, ponieważ suma kątów w przeciwległych wierzchołkach wynosi 180°. Teraz korzystając z twierdzenia o kącie wpisanym opartym na tym samym łuku otrzymujemy, że $\measuredangle NAP = \measuredangle NKP$, $\measuredangle LBP = \measuredangle LKP$, $\measuredangle LCP = \measuredangle LMP$, $\measuredangle NDP = \measuredangle NMP$. Teraz zauważmy, że $180° = 360° - \measuredangle APD - \measuredangle BPC = \measuredangle NAP + \measuredangle LBP + \measuredangle LCP + \measuredangle NDP = \measuredangle NKP + \measuredangle LKP + \measuredangle LMP + \measuredangle NMP = \measuredangle LKN + \measuredangle LMN$. Kąty *LKN* i *LMN* są przeciwległymi kątami czworokąta *KLMN* i jak wykazaliśmy, sumują się do 180°. Zatem na czworokącie *KLMN* można opisać okrąg.

■

Ponownie zauważmy, że dla czworokąta wklęsłego *ABCD* również da się opisać okrąg na punktach *K*, *L*, *M*, *N*, będących rzutami prostokątnymi punktu *P* na boki czworokąta. Aby to pokazać przeprowadźmy dowód.

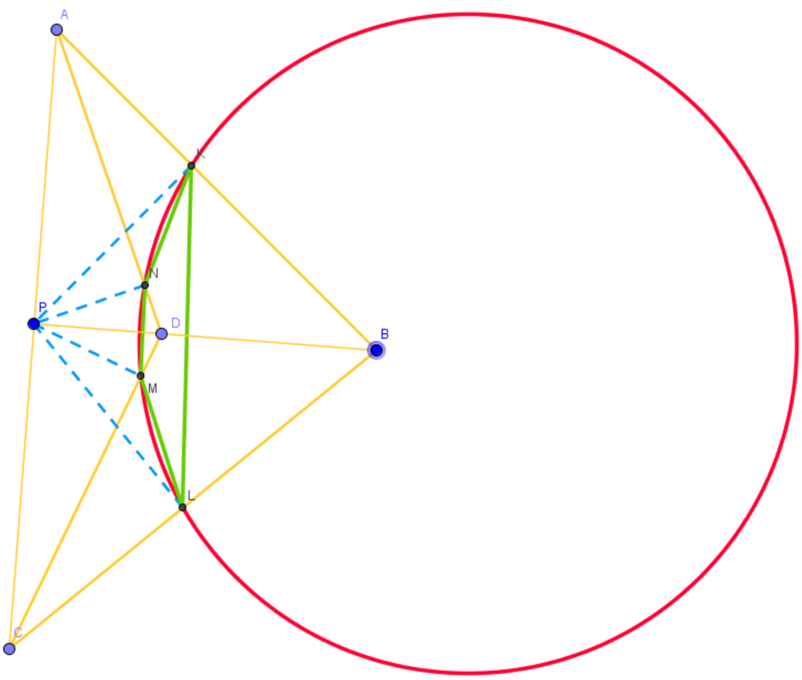
Założenia:

Czworokąt $ABCD$ jest wklęsły, a jego przekątne są prostopadłe.

Punkty K, L, M i N są rzutami punktu P, będącego punktem przecięcia się przekątnych, odpowiednio na boki AB, BC, CD i DA.

Twierdzenie:

Punkty $KLMN$ leżą na jednym okręgu.



Dowód:

Na początek zauważmy, że na każdym z czterech czworokątów $AKNP$, $BLPK$, $CPML$ i $DNPM$ możemy opisać okrąg, ponieważ $\measuredangle AKP$, $\measuredangle BKP$, $\measuredangle BLP$, $\measuredangle CLP$, $\measuredangle CMP$, $\measuredangle DMP$, $\measuredangle DNP$ i $\measuredangle ANP$ mają miarę 90° i są oparte na odcinkach AP, BP, CP, DP będących średnicami. Teraz korzystając z twierdzenia o kącie wpisanym opartym na tym samym łuku otrzymujemy, że $\measuredangle MLK = \measuredangle PLK - \measuredangle PLM = \measuredangle PBA - \measuredangle PCM$. Teraz policzmy miarę $\measuredangle MNK = 360° - \measuredangle PNK - \measuredangle PNM = 360° - (180° - \measuredangle NPK - \measuredangle PKN) - \measuredangle PDM = 360° - (180° - \measuredangle PAK) - (90° - \measuredangle PCM) = 360° - (180° - (90° - \measuredangle PBA)) - (90° - \measuredangle PCM) = 360° - (90° + \measuredangle PBA) - 90° + \measuredangle PCM = 180° + \measuredangle PCM - \measuredangle PBA$. Zauważmy teraz, że $\measuredangle MLK + \measuredangle MNK = \measuredangle PBA - \measuredangle PCM + 180° + \measuredangle PCM - \measuredangle PBA = 180°$. Zatem na czworokącie $KLMN$ można opisać okrąg.

■

4. Badanie własności punktów będących przecięciami symedian z bokami czworokąta o prostopadłych przekątnych

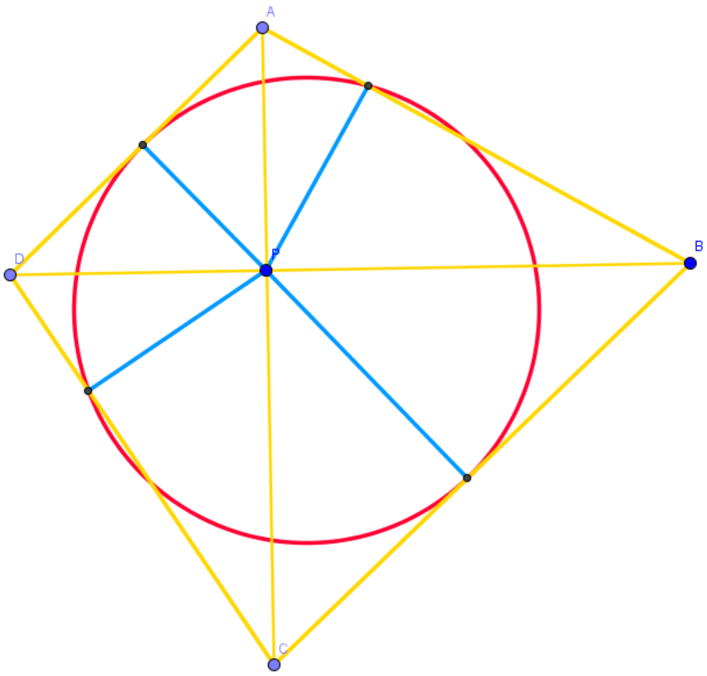
Założenia:

Przekątne czworokąta *ABCD* są prostopadłe.

Punkty *K*, *L*, *M* i *N* są odpowiednio punktami przecięć symedian z bokami *AB*, *BC*, *CD* i *DA*.

Twierdzenie:

Punkty *KLMN* leżą na jednym okręgu.



Dowód:

Dowód przeprowadzimy przy pomocy geometrii analitycznej. Wstawmy nasz czworokąt w układ współrzędnych w taki sposób, aby punkt *P* znajdował się w punkcie *(0, 0)*, zaś punkty *A*, *B*, *C* i *D* odpowiednio w *(0, a)*, *(b, o)*, *(0, c)*, *(d, o)*. Oznaczmy przez *X* i *Y* rzut prostokątny punktu *N* na odcinki *DP* i *AP*. Teraz korzystając z cechy symediany otrzymujemy, że:

$$\frac{DN}{NA} = \frac{|d|^2}{|a|^2}$$

$$\frac{DN}{DA} = \frac{DN}{AN + ND} = \frac{1}{1 + \frac{NA}{DN}} = \frac{1}{1 + \frac{|a|^2}{|d|^2}}$$

$$\frac{ND}{AD} = \frac{DX}{|d|} \Leftrightarrow DX = \frac{ND}{AD} * |d| = \frac{1}{1 + \frac{|a|^2}{|d|^2}} * |d| = \frac{|d|^3}{|a|^2 + |d|^2}$$

Teraz obliczmy współrzędną *x* punktu *X = (x, 0)*.

$$x = |d| - DX = |d| * \left(1 - \frac{|d|^2}{|a|^2 + |d|^2}\right) = |d| * \left(\frac{|a|^2 + |d|^2 - |d|^2}{|a|^2 + |d|^2}\right) = \frac{|d||a|^2}{|a|^2 + |d|^2}$$

Tutaj należy zauważyć, że odcinek nie może mieć ujemnej długości za to współrzędna punktu może być ujemna, dlatego aby punkt *X* miał właściwe współrzędne należy usunąć wartość bezwzględną przy *d*. Następnie w sposób analogiczny obliczamy współrzędną *y* punktu *Y = (0, y)* i otrzymujemy:

$$y = |a| - AY = \frac{|a||d|^2}{|a|^2 + |d|^2}$$

Tutaj tak jak poprzednio, aby otrzymać właściwą współrzędną należy usunąć wartość bezwzględną przy *a*. Wyliczyliśmy zatem współrzędne punktu *N = (x, y)*.

W sposób analogiczny wyliczamy współrzędne kolejnych punktów przecięć symedian z bokami i dostajemy:

$$N = (\frac{d|a|^2}{|a|^2 + |d|^2}; \frac{a|d|^2}{|a|^2 + |d|^2})$$

$$K = (\frac{b|a|^2}{|a|^2 + |b|^2}; \frac{a|b|^2}{|a|^2 + |b|^2})$$

$$L = (\frac{b|c|^2}{|c|^2 + |b|^2}; \frac{c|b|^2}{|c|^2 + |b|^2})$$

$$M = (\frac{d|c|^2}{|c|^2 + |d|^2}; \frac{c|d|^2}{|c|^2 + |d|^2})$$

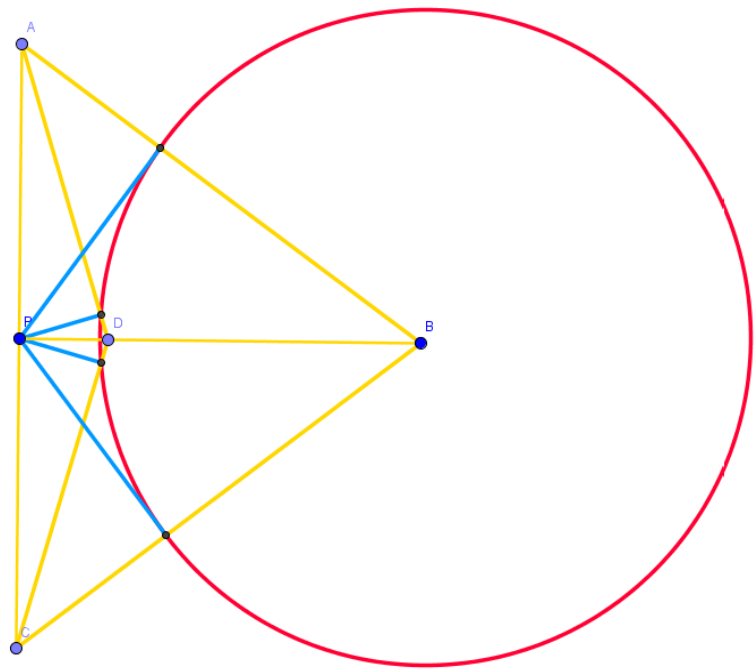
Następnie opisujemy okrąg na trzech pierwszych punktach i sprawdzamy czy czwarty punkt leży na tym okręgu. W tym celu wykorzystujemy równanie okręgu:

$$r^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2$$

Po obliczeniach ostatecznie otrzymujemy, że żądane cztery punkty *K*, *L*, *M*, *N* leżą na jednym okręgu.

■

W tym miejscu należy zauważyć, że wykorzystując do dowodu geometrię analityczną otrzymaliśmy również dowód, który jest poprawny dla czworokąta wklęsłego. Taką sytuację przedstawia poniższy rysunek.



5. Bibliografia

1. http://forumgeom.fau.edu
FORUM GEOMETRICORUM 'A Journal on Classical Euclidean Geometry and Related Areas'; Department of Mathematical Sciences; Volume 12