MUZYCZNA MATEMATYKA

$\log_A(X*Y) = \log_A X + \log_A Y$

$w = -(\log_2 s + 2)$

KLARA MARIA ZGLIŃSKI

Muzyczna Matematyka

Klara Maria Zgliński

Ogólnokształcąca Szkoła Muzyczna I stopnia
im. Ignacego J. Paderewskiego w Krakowie
31-134 Kraków, ul. Basztowa 8

Klasa VIb

Nauczyciel:	mgr Joanna Zagórska
Korekta muzyczna:	mgr Teresa Arend
Okładka:	Fryderyk Zgliński

Dla kochanego Taty,
za to, że pokazał mi matematykę
i ma do mnie cierpliwość

Spis Treści

Bibliografia

[1] http://www.matematyka.wroc.pl/matematyka-wokol-nas/w-muzyce
[2] Fizykon, http://www.daktik.rubikon.net.pl/akustyka/spis_akustyka.htm
[3] Wikipedia, http://pl.wikipedia.org/wiki/Szereg_harmoniczny_(muzyka)
[4] Wikipedia, http://pl.wikipedia.org/wiki/...
[5] http://www.eetimes.com/design/audio-design/4015870/Acoustics-and-Psychoacoustics-Introduction-to-sound--Part-7
[6] http://niewiadomy.pl.tl/Rozwoj-Nauki-a-Filozofia-Nowej-Muzyki.htm
[7] Sz. Jeleński, Śladami Pitagorasa, WSiP Warszawa 1988

Wstęp

Dużo mówi się o tym, że muzyka jest pełna matematyki.

To szczera prawda – choć nie zastanawiałam się nad tym, aż do momentu kiedy zostałam o to wprost zapytana na zakończenie prezentacji w zeszłorocznej Sesji Matematycznej.

Chodząc do szkoły muzycznej, nie zauważałam tego, że muzyka jest pełna matematyki - no może z wyjątkiem ułamków przy wartościach rytmicznych. Szukając informacji o matematyce w muzyce, znalazłam wiele ciekawych właściwości.

Można je podzielić na trzy tematy:

1. Dźwięk
2. Rytm
3. Kompozycję utworu

W tej pracy postaram się pokazać gdzie tkwi matematyka w każdym z tych tematów.

O dźwięku postaram się opisać jego powstawanie, właściwości oraz podział na tony muzyczne. Pokażę też jak określić muzyczne interwały i ich współbrzmienie.

Rytm określa rozłożenie dźwięków w czasie. Opiszę notację opartą na ułamkach oraz ogólnie używane grupowanie taktów, czyli metrum.

Natomiast kompozycja jest tematem tak szerokim, że jej analiza wymaga dużo większej wiedzy matematycznej. Dlatego ograniczę się do wskazania kilku prostych przykładów.

Dźwięk

Instrumenty można podzielić na: - strunowe, klawiszowe, dęte i perkusyjne.

W uproszczeniu mamy strunę, membranę lub słup powietrza, które drgając powodują powstanie dźwięku. We wszystkich przypadkach dźwięk jest zdefiniowany przez kształt i właściwości drgającego materiału.

W pracy „Muzyczna Matematyka" ograniczę się do struny, ponieważ jest najłatwiejsza do zrozumienia i zawiera wszystkie elementy potrzebne w tej pracy.

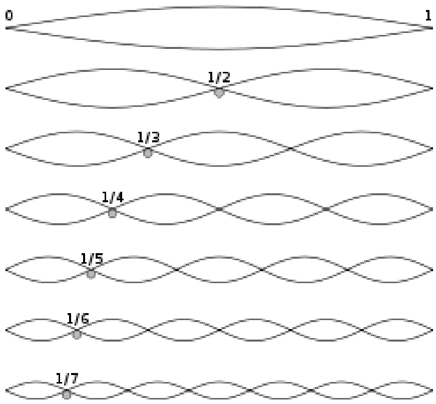
Zobaczmy więc najpierw

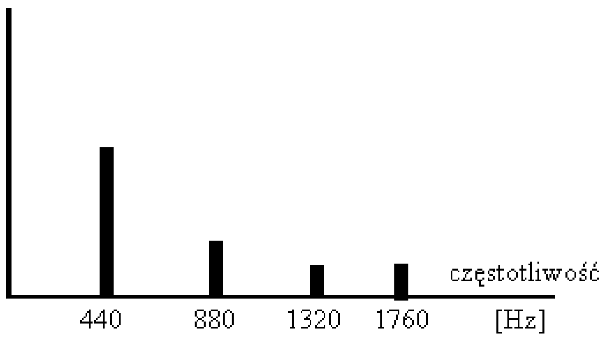
Jak powstaje dźwięk

Dla naszych celów wystarczy przedstawić strunę jako naciągnięty kawałek drutu. Gdy go uderzymy, biegną po nim w obie strony ze stałą prędkością fale, odbijają się od końców i biegną dalej w odwrotnych kierunkach trochę osłabione, i tak dalej aż do „wygaśnięcia".

Nie wchodząc w szczegóły rozchodzenia się fal i pomijając właściwości materiału i jego napięcia (strojenie), otrzymujemy drganie, którego właściwości są zdefiniowane w efekcie końcowym tylko przez długość struny. Właśnie dlatego grając na gitarze, skrzypcach i wielu innych instrumentach strunowych muzyk dociska struny palcami do szyjki instrumentu, skracając jej efektywną długość.

Przy uderzeniu lub pociągnięciu powstają drgania o częstotliwości charakterystycznej dla tej struny, oraz jej wielokrotności – czyli drgania harmoniczne.





Obrazki przedstawiają drgania struny [3] oraz tak zwane widmo struny fortepianowej [2][5]. Widać na nim, jak mocne są drgania poszczególnych częstotliwości, które zawsze są wielokrotnością częstotliwości podstawowej.

Wysokość dźwięku zależy właśnie od częstotliwości podstawowej struny. Podajemy ją w Hercach (Hz) wyrażając ilość drgań na sekundę.

Dalsze harmoniczne nadają natomiast dźwiękowi barwę.

Każdy dźwięk ma określoną częstotliwość podstawową. Przedstawiam tu jako przykład częstotliwości w zakresie dwóch oktaw [2]:

Ton	f	oktawa	2^n
a^1	**440,0**	**razkreślna**	0
b^1	466,2	razkreślna	1/12
h^1	493,9	razkreślna	2/12
c^2	523,3	dwukreślna	3/12
cis^2	554,4	dwukreślna	4/12
d^2	587,3	dwukreślna	5/12
dis^2	622,3	dwukreślna	6/12
e^2	659,3	dwukreślna	7/12
f^2	698,5	dwukreślna	8/12
fis^2	740,0	dwukreślna	9/12
g^2	784,0	dwukreślna	10/12
gis^2	830,6	dwukreślna	11/12
a^2	880,0	dwukreślna	1
b^2	932,3	dwukreślna	1 1/12
h^2	987,8	dwukreślna	1 2/12
c^3	1046,5	trzykreślna	1 3/12
cis^3	1108,7	trzykreślna	1 4/12
d^3	1174,7	trzykreślna	1 5/12
dis^3	1244,5	trzykreślna	1 6/12
e^3	1318,5	trzykreślna	1 7/12
f^3	1396,9	trzykreślna	1 8/12
fis^3	1480,0	trzykreślna	1 9/12
g^3	1568,0	trzykreślna	1 10/12
gis^3	1661,2	trzykreślna	1 11/12
a^3	1760,0	trzykreślna	2
b^3	1864,7	trzykreślna	2 1/12

Zanim jednak opiszę zależności powyższych wartości, trzeba przyjrzeć się dokładniej układowi tonów muzycznych.

Co to jest oktawa

Muzycznie, oktawa zawiera 2 półtony i 5 całych tonów. Licząc oba skrajne tony o tej samej nazwie, otrzymujemy osiem tonów, które nadały oktawie jej nazwę (łac. octo = osiem).

Dla celów matematycznych, całe tony dzielimy na półtony. W ten sposób oktawa zostaje podzielona na 12 równo rozłożonych półtonów, jak podałam w tabelce poprzedniego rozdziału.

Dobrze widać, że odstęp jednej oktawy podwaja częstotliwość:

Ton	Częstotliwość	Iloczyn	
$\underline{A}$	55Hz	0.13	2^{-3}
A	110Hz	0.25	2^{-2}
a	220Hz	0.5	2^{-1}
a^1	440Hz	1	2^0
a^2	880Hz	2	2^1
a^3	1760Hz	4	2^2

Wybrałam ton A, ponieważ wartość dla a^1 = 440Hz, tak zwany „Kammerton" jest podstawą strojenia wszystkich instrumentów. Jak widać, kolejne wartości otrzymujemy przez mnożenie (lub dzielenie) częstotliwości przez 2.

Na szczęście możemy mnożniki zapisać również jako potęgi liczby 2. Jak widać, kolejne potęgi są kolejnymi liczbami całkowitymi. Jeżeli więc można by liczyć bezpośrednio potęgami liczby 2 zamiast iloczynami, to każda oktawa była by tej samej wielkości. Takie przedstawienie odpowiadało by więc ułożeniu klawiszów na fortepianie.

W tej sytuacji potrzebna jest więc metoda, która pozwala nam przedstawić dowolny iloczyn jako potęgę liczby 2.

Trochę o logarytmie

Mając potęgę jako podstawę do obliczania oktawy muszę znaleźć funkcję do niej odwrotną. W tym przypadku mamy nie jedną, ale aż dwie takie funkcje:

Dla wyrażenia $a(b,c) = b^c$ potęga

są funkcje odwrotne dla b: $b(a,c) = \sqrt[c]{a}$ pierwiastek

oraz dla c: $c(a,b) = \log_b a$ logarytm

Znamy już ze szkoły pierwiastki kwadratowy i sześcienny (c = 2 i 3), jednakże w tym przypadku potrzebne są bardziej uniwersalne reguły.

Podam tu zestaw regułek wyjętych z Wikipedii [4/Logarytm], które są potrzebne w dalszej części
tej pracy:

(1)	$a^0 = 1$	więc	$\log_a 1 = 0$	
(2)	$a^b * a^c = a^{b+c}$	więc	$\log_a (X * Y) = \log_a X + \log_a Y$	
(3)	$a^b / a^c = a^{b-c}$	więc	$\log_a (X / Y) = \log_a X - \log_a Y$	
(4)	$1 / a^c = a^{-c}$	więc	$\log_a (1 / a^c) = -c$	wynika z (3) i (1)
(5)	$(a^b)^c = a^{b*c}$	więc	$\log_a ((a^b)^c) = b * c$	
(6)	$a^{1/c} = \sqrt[c]{a}$	więc	$\log_a (\sqrt[c]{a}) = 1/c$	
(7)	$a^{b/c} = (\sqrt[c]{a})^b$	więc	$\log_a ((\sqrt[c]{a})^b) = b/c$	wynika z (5) i (6)

Logarytm pozwala więc na liczenie wszystkich iloczynów przy pomocy dodawania (2) oraz proste podzielenie oktawy na części odbierane przez ludzi jako równe (6). Ze względu na właściwości dźwięków, w tej pracy zawsze używam logarytm do podstawy 2.

Liczymy interwały

Jeżeli więc jedna cała oktawa odpowiada zwiększeniu wykładnika o jeden, można podzielić ją na 12 półtonów dzieląc ten wykładnik na 12 części.

W ten sposób, jeden półton odpowiada zwiększeniu częstotliwości razy:

(8) $2^{1/12} = \sqrt[12]{2}$ używając (6)

Tłumaczy to formułkę z Fizykonu [2]. Tak samo podane tam liczenie iloczynu dla wielu półtonów wynika bezpośrednio z naszych formułek:

(9) $2^{n/12} = (\sqrt[12]{2})^n$ używając (7)

W muzyce takie odstępy dźwięków liczone w półtonach nazywamy interwałami. Stanowią one podstawę dobierania dźwięków, by współbrzmiały melodycznie. Strojenie odpowiadające powyższym formułkom nazywamy strojeniem temperowanym.

Pitagorejczycy już 5 wieków p.n.e. odkryli, że skracanie struny w proporcjach 1:2, 2:3 i 3:4 daje ładne współbrzmienie powstających dźwięków. Odpowiadające tym proporcjom interwały nazwali oktawą, kwintą i kwartą. Ten podział obowiązuje do dnia dzisiejszego.

W poniższej tabelce przedstawiam wszystkie czyste interwały jednej oktawy oraz ich iloczyny podane w Wikipedii. Niestety temperowane interwały obliczone regułką (9) są odrobinę inne, choć bardzo zbliżone.

Żeby opisać takie drobne niedokładności, potrzeba jednak dokładniejszej skali. W tym celu dzielimy każdy półton dodatkowo na 100 części – oczywiście logarytmicznie. Tym samym oktawa zostanie podzielona na 12 * 100 = 1200 części. Najmniejszy interwał, który można tak przedstawić ma więc iloczyn :

$$2^{1/1200} = \sqrt[1200]{2} \tag{10}$$

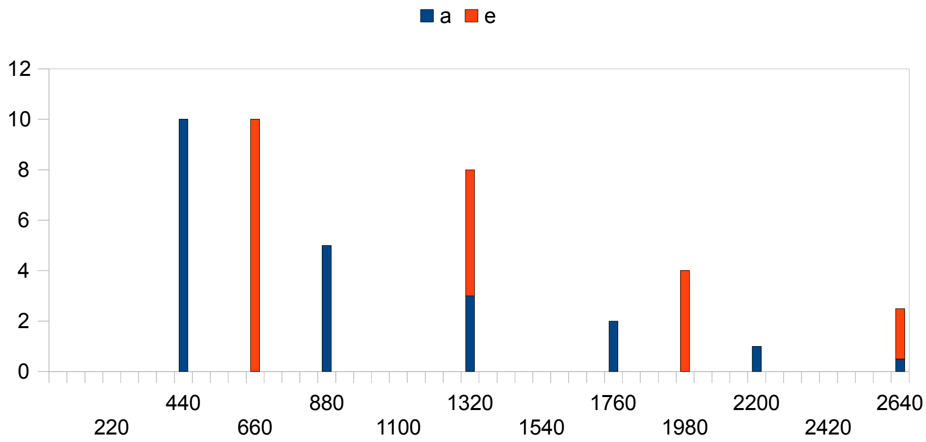
Taki interwał nazywamy centem muzycznym. Możemy więc teraz określić różnice interwałów czystych i temperowanych w centach. Ucho człowieka może rozróżnić różnice od około 8 centów.

Interwał	Półtony	Czysty	Współbrzmienie	Temperowany	∂ cent
Pryma	0	1/1	doskonałe	1.000	0
Sekunda mała	1	16/15	dysonansowe	1.059	12
sekunda wielka	2	9/8	dysonansowe	1.122	4
tercja mała	3	6/5	zgodnie	1.189	16
tercja wielka	4	5/4	zgodnie	1.260	-14
kwarta	5	4/3	zgodne doskonałe	1.335	-2
tryton	6	45/32	bardzo dysonansowe	1.414	-10
kwinta	7	3/2	zgodne doskonałe	1.498	2
seksta mała	8	8/5	zgodnie	1.587	14
seksta wielka	9	5/3	zgodnie	1.682	-16
septyma mała	10	9/5	dysonansowe	1.782	18
septyma wielka	11	15/8	dysonansowe	1.888	-12
oktawa	12	2/1	bardzo ładnie	2.000	0

Porównując to ze znanymi regułami współbrzmienia można stwierdzić, że dźwięk jest tym ładniejszy, im mniejsze liczby występują w proporcjach (patrz tabelka).

Wracając do naszej wcześniej opisanej struny i jej widma, łatwo zauważyć, że wtedy harmoniczne pokrywają się w miejscach, gdzie występuje wspólna wielokrotność częstotliwości podstawowej. Dla dużych liczb w proporcjach, takie wspólne harmoniczne praktycznie nie występują.

Ładnie widać to na przykładzie kwinty – na widmie tonów a i e :



Na rysunku naniosłam widma dźwięków a (niebieski) i e (czerwony) na wspólny wykres. Jak widzimy, widma tych dwóch dźwięków uzupełniają się wzmacniając wspólne drgania harmoniczne.

Rytm

Dzielimy takty

Wartości nut opierają się na nucie, czyli określonej długości jednego dźwięku.

W rzeczywistości długość nuty jest umowna, jako że tą samą melodię można grać powoli lub szybko. Dlatego długość nuty często podawana jest na początku utworu. W przeciwieństwie do samego dźwięku, podajemy ją jednak nie jako ilość drgań na sekundę, lecz jako ilość nut (częściej ćwierćnut lub ósemek) na minutę.

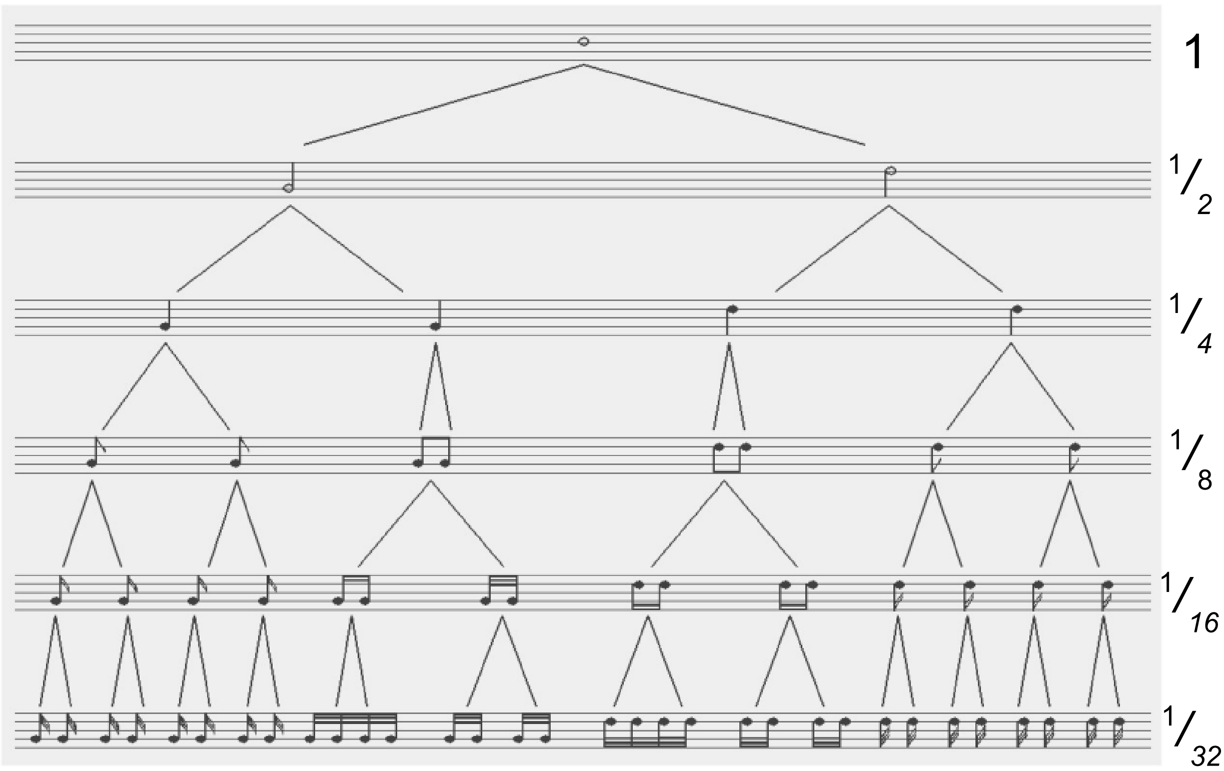
Dalsze wartości są podawane jako ułamek całej nuty:

Całą nutę (1) dzielimy na dwie półnuty (1/2)

półnutę (1/2) na dwie ćwierćnuty (1/4),

ćwierćnutę (1/4) na dwie ósemki (1/8), itd.

Jak widać, każdą następną wartość otrzymujemy przez dzielenie długości poprzedniej wartości na 2. Taki regularny podział wartości rytmicznych nazywamy podziałem dwudzielnym. Dobrze widać hierarchię na poniższym obrazku [4/Nuta]:



Jak widzimy, zaczynając od ósemki, przedstawienie nuty ma „chorągiewkę”. Każda następna drobniejsza wartość posiada jedną „chorągiewkę” więcej niż poprzednia.

Ilość „chorągiewek” **w** można obliczyć również za pomocą logarytmu:

$$w = -(\log_2 s + 2) \tag{11}$$

Przy czym **s** jest wartością nuty jako ułamek. Na przykład dla 1/32 otrzymujemy:

$$w = -(\log_2 1/32 + 2) = -(-5 + 2) = 3$$

Otrzymujemy więc, że trzydziestkodwójka ma trzy „chorągiewki”.

Trzeba jeszcze wspomnieć kropkę, która może pojawić się przy nucie. Oznacza ona wydłużenie wartości o jej połowę. Matematycznie oznacza to mnożenie wartości razy 3/2.

Taki zapis obowiązuje od VII wieku, choć na początku znaki dodatkowe miały często trochę inne znaczenie. Utrudnia to odtwarzanie starych utworów.

Metrum

W dzisiejszej muzyce, wartości rytmiczne są ułożone w grupy o jednakowej długości – tak zwane metrum. Dzieli ono melodię na takty o podanej wartości.

Najprostsze metrum 4/4 oznacza, że w jednym takcie mieści się cała nuta, podzielona podstawowo na cztery ćwierćnuty. Wszystkie wartości układane są w taki sposób, aby wypełnić każdy takt, nie przekraczając jego granic.

Z reguły początek każdego taktu jest akcentowany.

Występują też i inne metrum, jak na przykład 3/4 lub 6/8. Zawierają one obydwa taką samą część całej nuty jako długość, różnią się jednak układem wypełniających je wartości metrycznych:

W taktach ćwierćnutowych, ósemki łączymy po 2, a szesnastki po 4.

Za to w taktach ósemkowych, ósemki łączymy po 3, a szesnastki po 6.

Czasami zdarzają się metrum większe od całej nuty, takie jak 6/4. Wtedy w jednym takcie może zmieścić się 6 ćwierćnut.

Kompozycja

Zaczynając tą pracę głównie myślałam o utworach Bacha, które są znane z ukrytych w nich matematycznych reguł. Szybko jednak okazało się, że temat jest za trudny przy mojej znajomości matematyki. Dlatego skupiłam się na bardziej podstawowych zagadnieniach. Może uda mi się opracować ten temat w przyszłości...

Od czasów Pitagorasa, aż do XVII wieku, muzyka była zaliczana do nauk ścisłych. Dopiero potem została uznana za sztukę na równi z malarstwem i rzeźbą. Stała się wyrazem „twórczości ducha, nie mającym uzasadnienia w świecie fizycznym”. [6] Dopiero postępy w fizyce i opracowanie podstaw powstawania dźwięku, połączyły znowu muzykę i matematykę.

W tej pracy ograniczę się do kilku prostych przykładów, jak matematyka została wykorzystana w kompozycjach.

Fibonacci i Złote Cięcie

Bardzo popularną funkcją używaną w kompozycjach jest „ciąg Fibonacciego”. Powstaje on, kiedy zaczynając od 1 i 1 obliczamy każdy następny element jako sumę dwóch poprzednich:

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 …

Jedną z właściwości tego ciągu jest to, że jego kolejne elementy podzielone przez siebie oddają coraz dokładniej proporcje „złotego cięcia”. W książce „Śladami Pitagorasa” jest opisane, kilka przykładów występowania tej proporcji zarówno w przyrodzie, jak i architekturze i sztuce greckiej. [7]

W muzyce złote cięcie było bardzo popularne w okresie renesansu (XV-XVI wiek) i baroku (XVI-XVIII wiek). Również Bach (1685-1750) często używał go w swoich utworach, np. w Passacaglia. Występuje ono między innymi w podziale utworu na części.

Rudresh Mahanthappy posunął się wręcz do tego, by użyć elementów ciągu Fibonacciego bezpośrednio do ustalania dźwięków. Również Vijay Iyer użył ich jako klucz do bazy rytmicznej i harmonicznej utworu „Stars Over Mars”. [1]

O Matematyce i Matematykach

Innym rodzajem łączenia matematyki i muzyki są utwory o szeroko pojętej tematyce matematycznej.

W utworze „Play it again Sam” zadedykowanym Samuelowi Morse'owi, wynalazcy telegrafu, perkusista na początku utworu wystukuje swoje imię alfabetem Morse'a, kropki zastępując krótkimi, a kreski długimi dźwiękami. To samo w zakończeniu czynią pozostali członkowie kwartetu.

W 2006 roku powstał pierwszy w historii utwór operowy o tematyce matematycznej. Niemiecki kompozytor Ingomar Grünauer napisał operę „Cantor - mierzenie nieskończoności”, poświęconą życiu i twórczości Georga Cantora, wybitnego matematyka, twórcy teorii mnogości, który przez 30 lat wykładał na Uniwersytecie w Halle. [1]

Podsumowanie

W tej pracy pokazałam, jak muzyka jest zbudowana na matematyce.

Zaczęłam od powstawania dźwięku na strunie. Dalej podzieliłam dźwięki na elementy muzyczne pokazując zależności między tonami obliczając interwały.

Przy tej okazji miałam możliwość poznać bardzo ciekawą funkcję – logarytm.

W dalszej części pokazałam podział rytmiczny muzyki i określanie znaków do jego zapisu.

Na koniec krótko zaprezentowałam złote cięcie oraz bardzo popularny ciąg Fibonacciego, używane w muzyce oraz wielu dziedzinach sztuki.

Mam nadzieję, że pokazałam, że matematyka naprawdę może być muzyczna.

Opinia Nauczyciela

Klara jest uczennicą wykazującą duże zdolności i zainteresowania matematyczne. Bierze udział w konkursach matematycznych na terenie Krakowa, takich jak Małopolski Konkurs Matematyczny, Mistrzostwa Sudoku. Została zakwalifikowana do udziału w projekcie DiAMEnT (pod patronatem MCDN i w partnerstwie z Wyższą Szkołą Biznesu - National-Louis University w Nowym Sączu oraz National-Louis University w Chicago). Chętnie rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności. Jest bardzo aktywna na lekcjach matematyki.

Faktycznie pomysł napisania pracy o takim temacie narodził się po ubiegłorocznej Sesji Matematycznej. Kiedy to jeden z Jurorów zapytał Klarę o związek matematyki z muzyką i potem zażartował, że jak się ma dość matematyki, to zawsze można posłuchać muzyki. Tymczasem ten związek istnieje i jest tak duży, że mało kto zdaje sobie z tego sprawę.

Pomysł, temat, tytuł tej pracy, to wszystko inicjatywa Klary. Niektóre elementy „muzyczne" zostały skonsultowane z nauczycielem teorii muzyki w naszej szkole. Ja rzuciłam okiem od strony matematycznej.

Nawet jakbym chciała coś zmienić, czy poprawić, to niestety nie mogę.

Ale czytając tę pracę dowiedziałam się wielu ciekawych rzeczy.

Joanna Zagórska