Wielokąty z papieru i ciągi

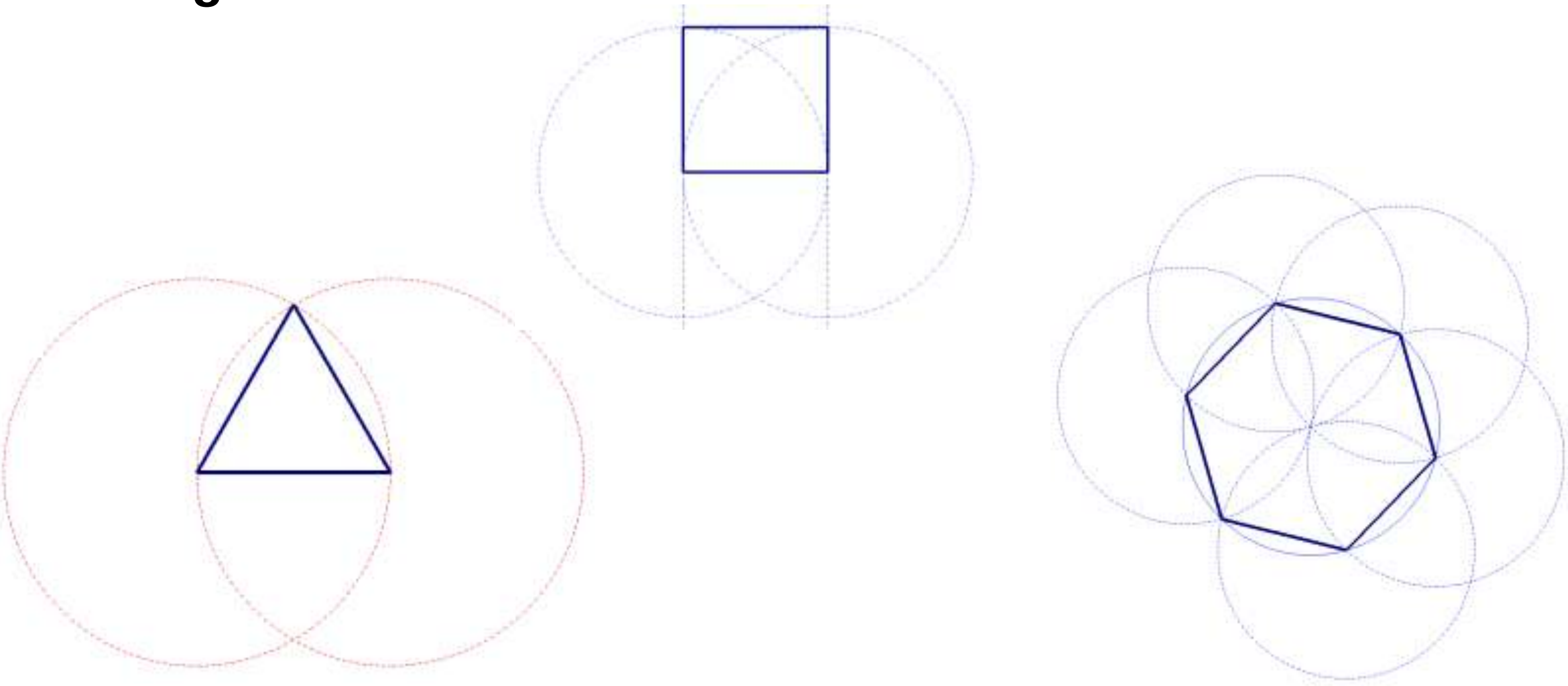
Aneta Wyrębkowska kl. II B
Paulina Wyrębkowska kl. II B
Gimnazjum 37 w Krakowie

Pod opieką mgr Teresy Sklepek

Okazuje się, że można ułożyć wielokąty foremne zaginając odpowiednio paski papieru. Jakie wielokąty i co mają z tym wspólnego ciągi postaramy się zaprezentować w naszej pracy.

WSTĘP

Wielokąty foremne to bardzo piękne figury. Ich konstrukcje są skomplikowane. Może z wyjątkiem trójkąta równobocznego, kwadratu czy sześciokąta foremnego.



Ciekawostka

Oto monety czeskie:

20 koron

2 korony

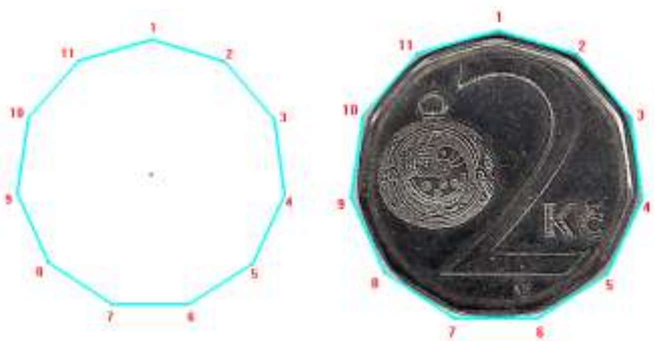
i angielska pięćdziesięciopensówka.

Co mają wspólnego z matematyką, oprócz wartości wyrażonej liczbą?

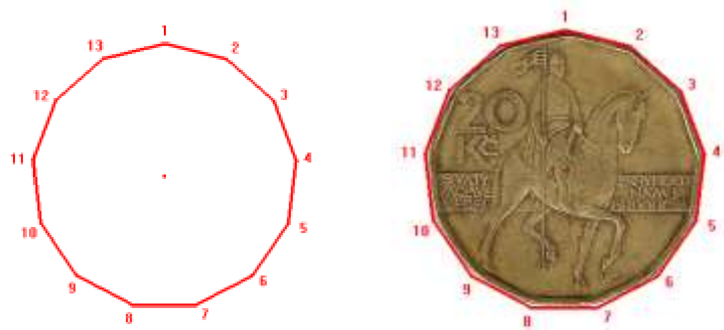
Mają kształt wielokątów foremnych.

Siedmiokąta foremnego:

Jedenastokąta foremnego

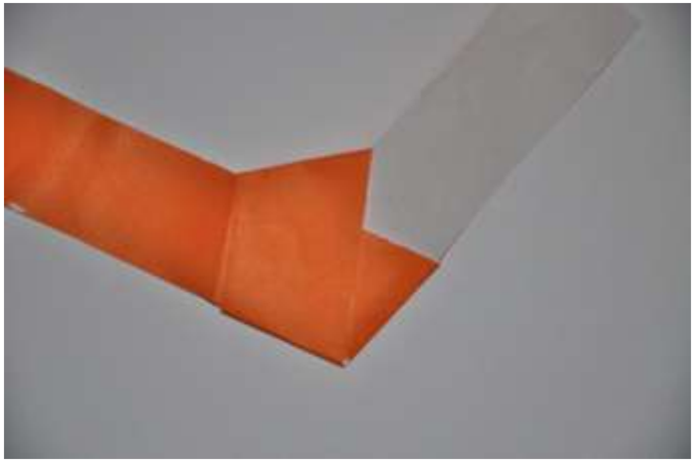


Trzynastokąta foremnego:



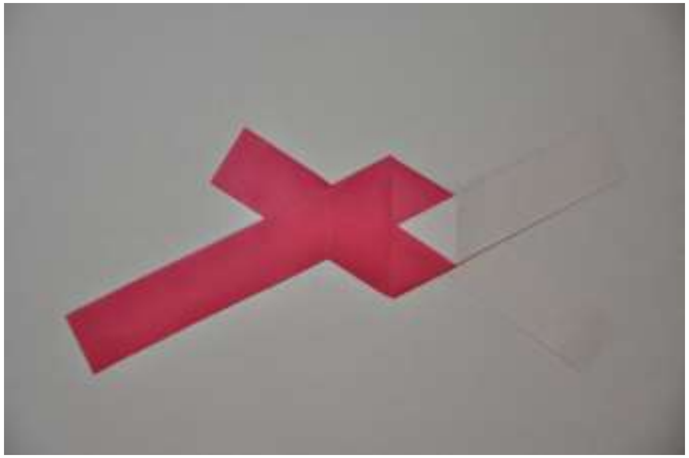
Pięciokąt foremny

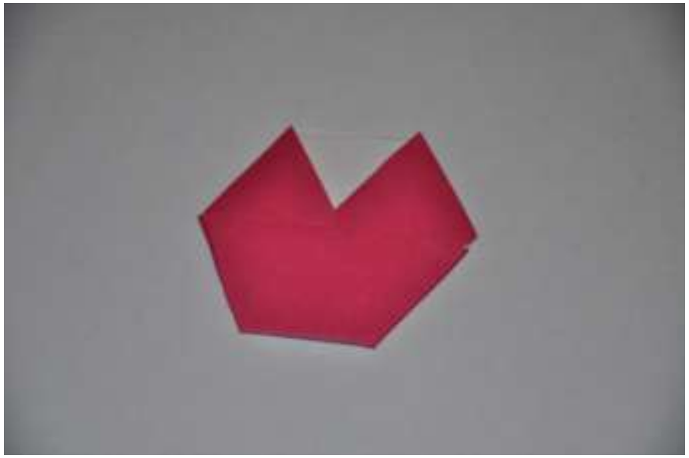
- W książce Szczepana Jeleńskiego „Śladami Pitagorasa” znalazłyśmy opis, jak z paska papieru otrzymać wielokąty foremne. Konstrukcje powstały w XVII wieku, a ich autorem jest włoski matematyk Urbano d’Aviso.
- Aby powstał pięciokąt foremny - zawiązujemy supełek i starannie modelujemy, tak jak na rysunku.



Sześciokąt foremny

- Sześciokąt foremny otrzymujemy z dwóch pasków papieru.



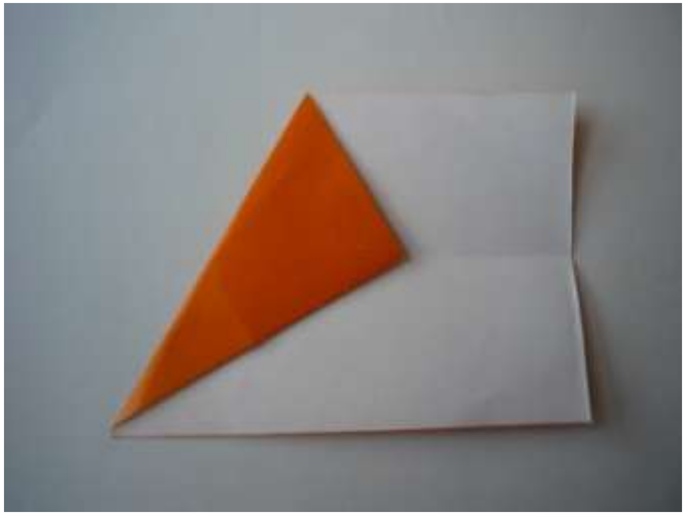


Trójkąt równoboczny

- Trójkąt równoboczny ułożymy z prostokątnej kartki papieru. Najpierw składamy kartkę na pół.

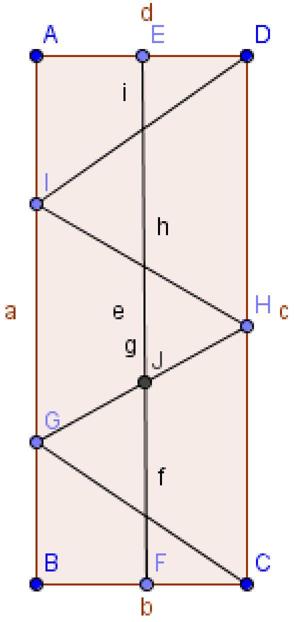
Trójkąt równoboczny

- Potem zaginamy kartkę tak, aby wierzchołek kąta prostego dotknął środkowej linii zagięcia.
- Składamy papier wzdłuż krótszej przyprostokątnej i na koniec chowamy mały trójkąt prostokątny.



Trójkąty równoboczne – I sposób składania papieru

Z prostokątnego paska papieru możemy otrzymać taśmę w trójkąty równoboczne korzystając z konstrukcji trójkąta równobocznego.



Ćwiczenie

Składanie pasków papieru.

Dlaczego otrzymaliśmy pasek podzielony na trójkąty równoboczne?

- Gdy składamy pasek pod dowolnym kątem, otrzymujemy dwa kąty: α i $180^0 - \alpha$

- Przyjmijmy $\alpha = 60^0 + R$ i $\beta = 180^0 - (60^0 + R) = 120^0 - R$
- Ponieważ brzegi paska są równoległe, więc rozwarty kąt u dołu ma miarę $\beta = 180^0 - (60^0 + R) = 120^0 - R$.

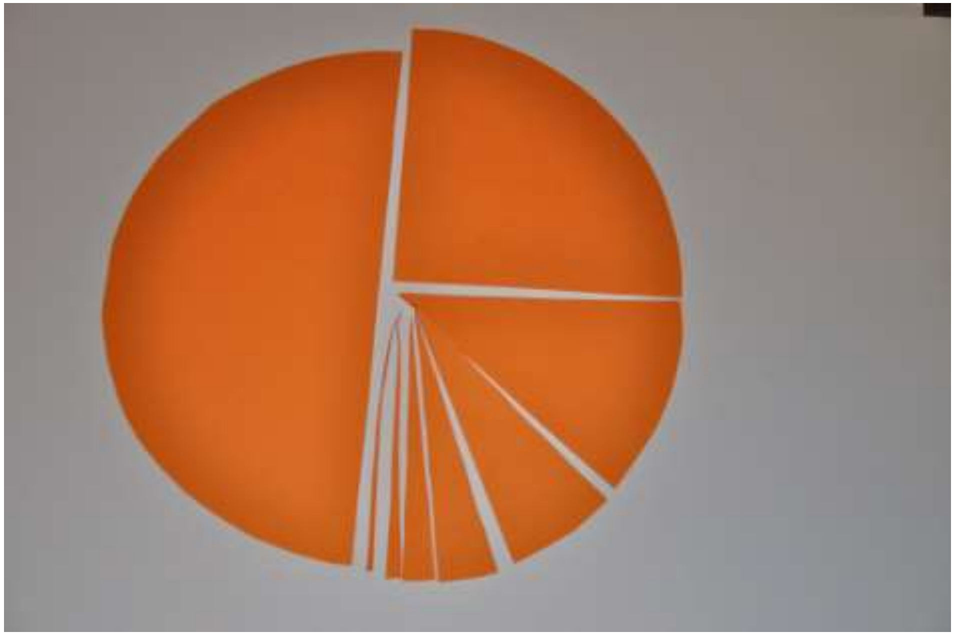
- Dzieląc go na połowę otrzymujemy kąt $(120^0 – R):2 = 60^0 – R/2$

- Potem górny kąt rozwarty dzielimy na pół $180^0 – (60^0 – R/2) = 120^0 + R/2$

- Ponownie dolny na pół $(120^0 + R/2):2 = 60^0 + R/4$ i tak dalej

Dlaczego te liczby są coraz mniejsze?

Ciąg ten możemy zilustrować takim przykładem:



$\frac{1}{2} * 360^o = 180^o$

$\frac{1}{4} * 360^o = 90^o$

$1/8 * 360^o = 45^o$

$1/16 * 360^o = 22{,}5^o$

$1/32 * 360^o = 11{,}25^o$

$1/64 * 360^o = 5{,}625^o$

...

Kąty są coraz mniejsze

Podobnie, gdy weźmiemy liczby

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2^2} \quad \frac{1}{2^3} \quad \frac{1}{2^4} \quad \frac{1}{2^5} \quad \frac{1}{2^6}$$ czyli

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32} \quad \frac{1}{64}$$ bardzo szybko maleją

Jak powstają trójkąty równoboczne ?

Otrzymujemy ciąg kątów

$60^0 + R$

$60^0 – R/2 = 60^0 - R/2$

$60^0 + R/4 = 60^0 + R/2^2$

$60^0 – R/8 = 60^0 – R/2^3$

$60^0 + R/16 = 60^0 + R/2^4$

$60^0 – R/32 = 60^0 – R/2^5$

$60^0 + R/64 = 60^0 + R/2^6$

$60^0 – R/128 = 60^0 – R/2^7$

itd

Na przemian dodajemy lub odejmujemy coraz mniejsze liczby, tak, że jesteśmy coraz bliżej kąta o mierze 60^0.

Gdyby miara początkowego kąta α wynosiła $80^{0,}$ to różnica R wynosiłaby 20.Zobaczmy jaki ciąg kątów otrzymamy:

1. $60^0 + 20^0 = 80^0$
2. $60^0 – 20^0 : 2 = 50^0$
3. $60^0 + 20^0 : 4 = 65^0$
4. $60^0 – 20^0 : 8 = 57{,}5^0$
5. $60^0 + 20^0 : 16 = 61{,}25^0$
6. $60^0 – 20^0 : 32 = 59{,}375^0$
7. $60^0 + 20^0 : 64 = 60{,} 3125^0$ ta liczba różni się od 60 tak mało, że można przyjąć w przybliżeniu 60^0.

Trójkąt równoboczny – składanie papieru

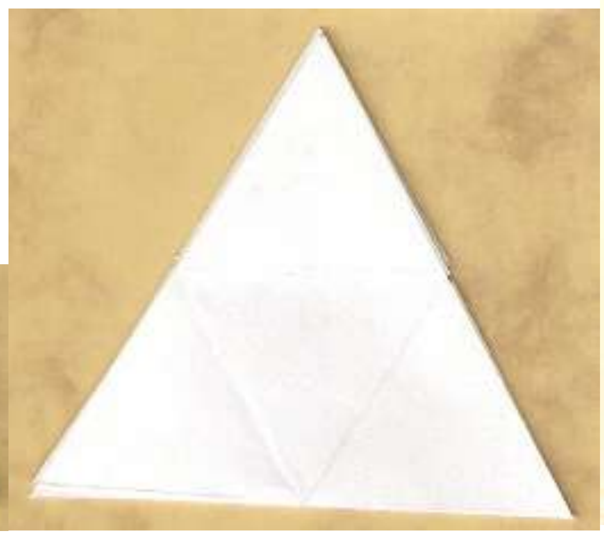
Podobnie byłoby, gdyby miara początkowego kąta była równa 71^0, 55^0.

Figury, które możemy uzyskać z taśmy w trójkąty:

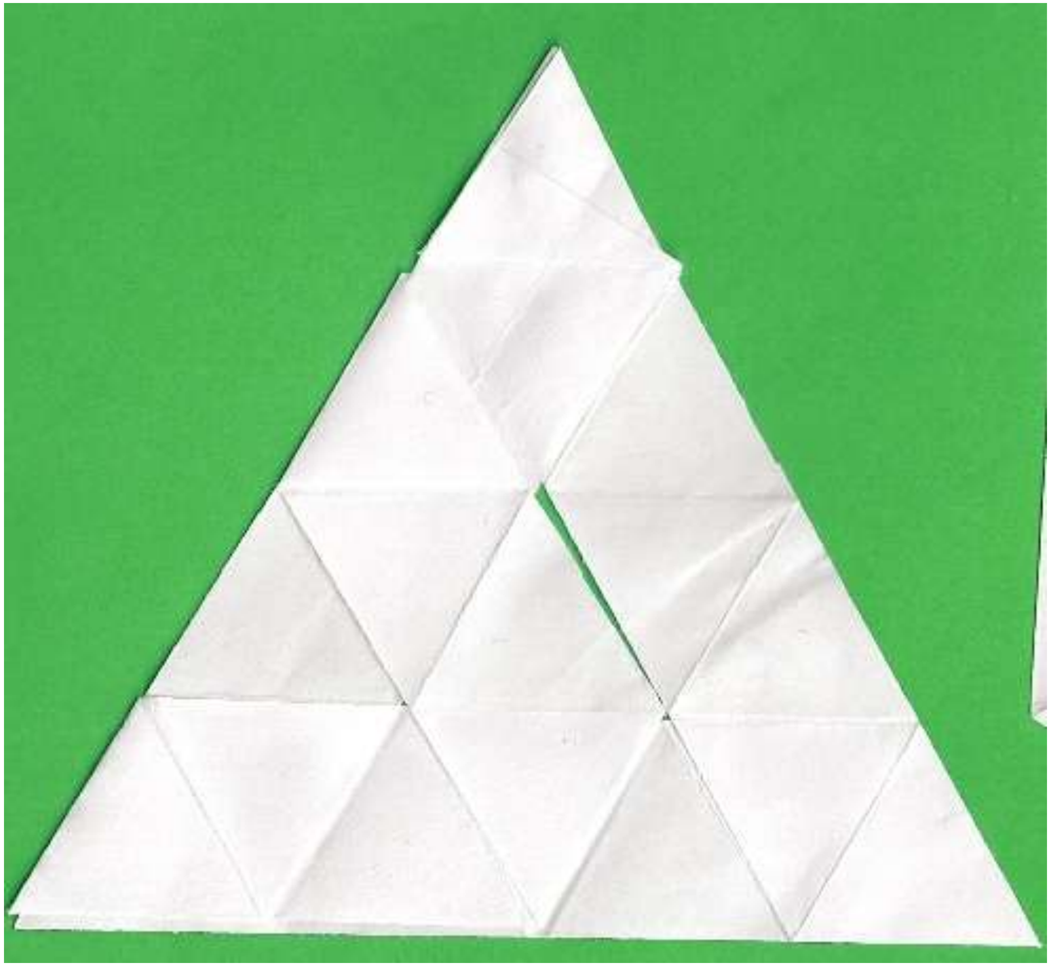
Trójkąty równoboczne

Bok 3 razy większy

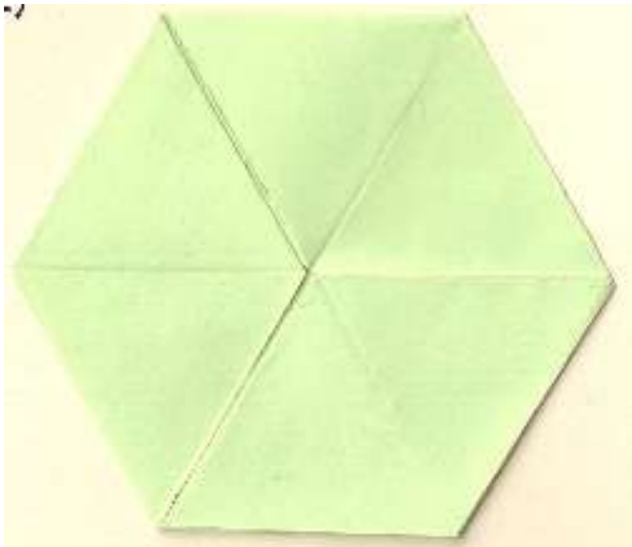
Bok 2 razy większy

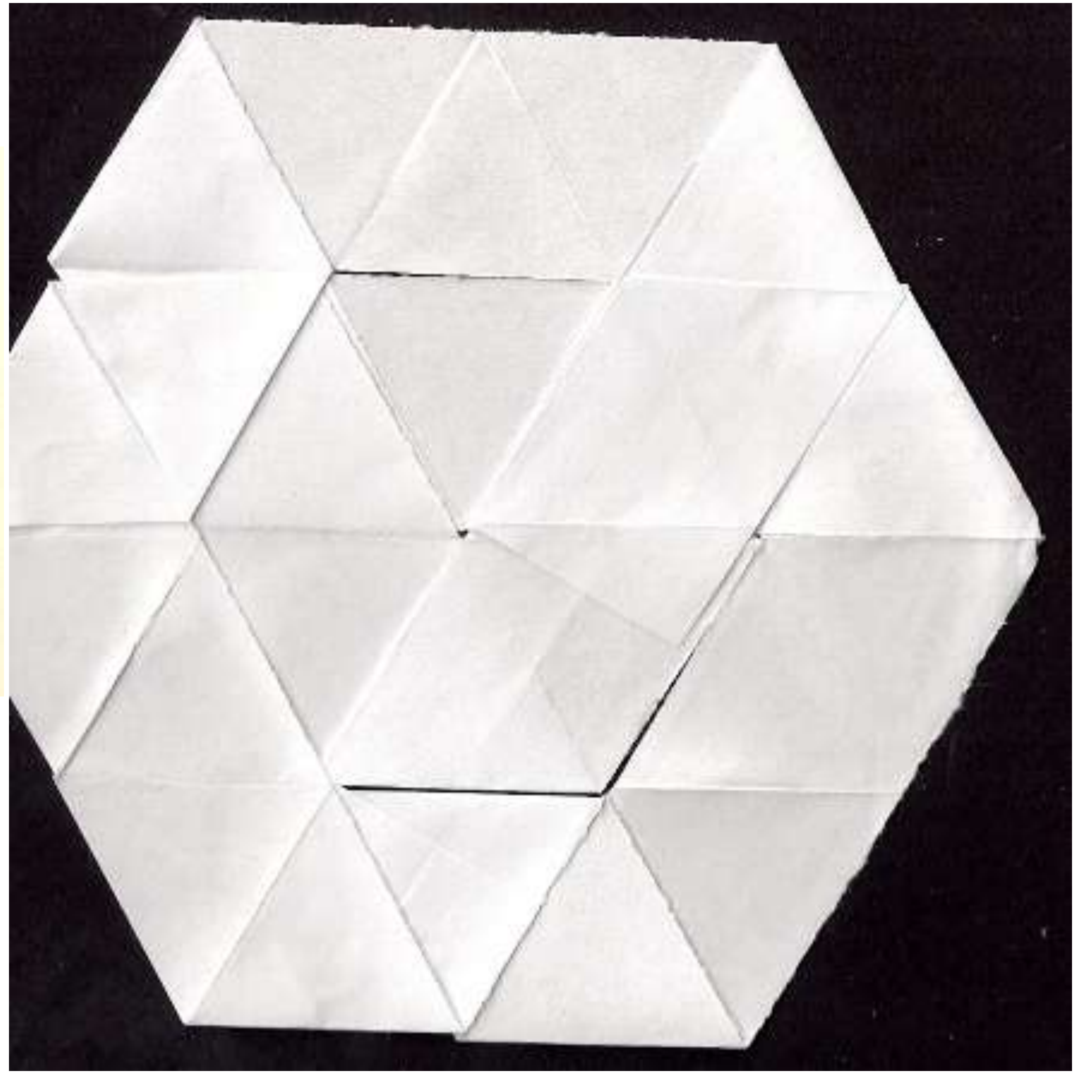


O boku 4 razy większym



szcześciokąty



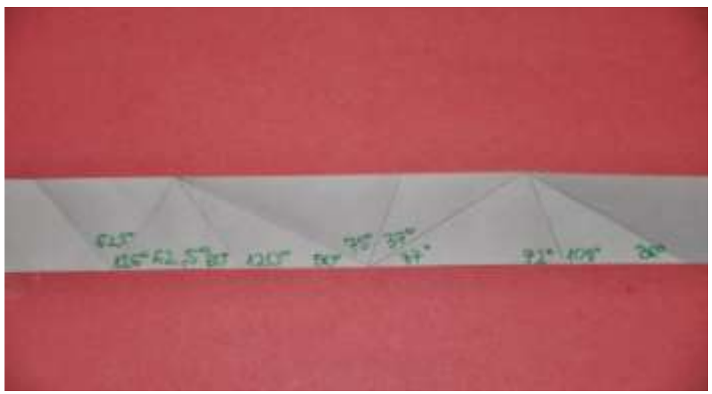


Co się stanie jeśli papierowy pasek będziemy zaginać dwa razy z jednej, a potem dwa razy z drugiej strony?

Na początku kąt zagięcia paska jest dowolny np. jeden z kątów ma 55^0, a drugi 125^0.

Kąt rozwarty o mierze 125^0 dzielimy na połowę itd

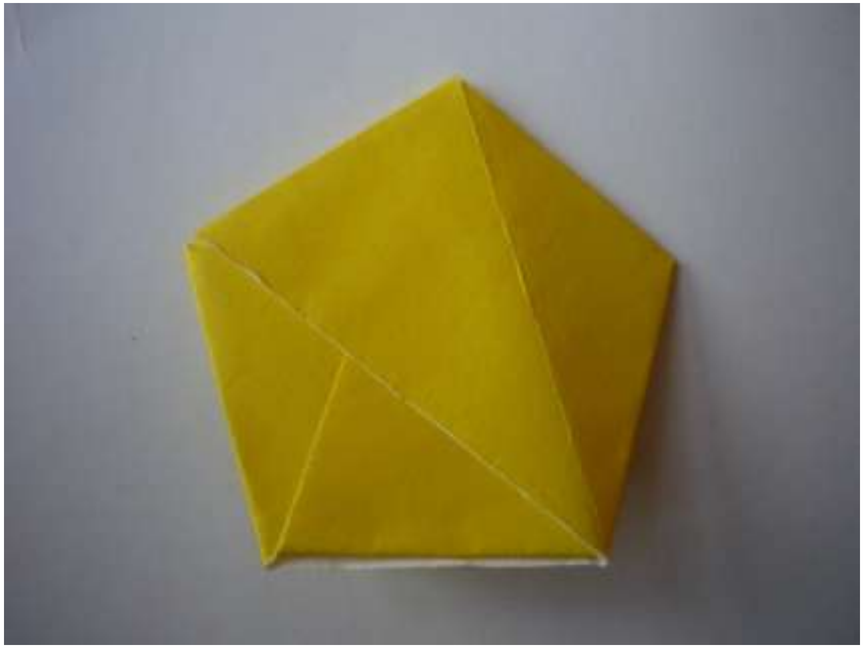
Zaginając w ten sposób otrzymujemy kąty 72^0, 36^0 i 108^0. Kąt o mierze 108^0 - to miara kąta wewnętrznego pięciokąta foremnego.



Z pozaginanego paska ułożymy pięciokąt foremny.

Odcinamy sześć pierwszych zagięć.

Oto efekt:



Składanie taśmy na różne sposoby

- Gdy zaginamy taśmę raz od góry i raz od dołu
  otrzymujemy trójkąty równoboczne
- Gdy zaginamy taśmę dwa razy od góry i dwa razy od dołu otrzymujemy pięciokąty foremne
- Gdy zaginamy taśmę trzy razy od góry i trzy razy od dołu otrzymujemy...

- ... nie siedmiokąty! Dziewięciokąty foremne! Dlaczego?

Z jednego punktu leżącego na brzegu paska wychodzą 4 odcinki.

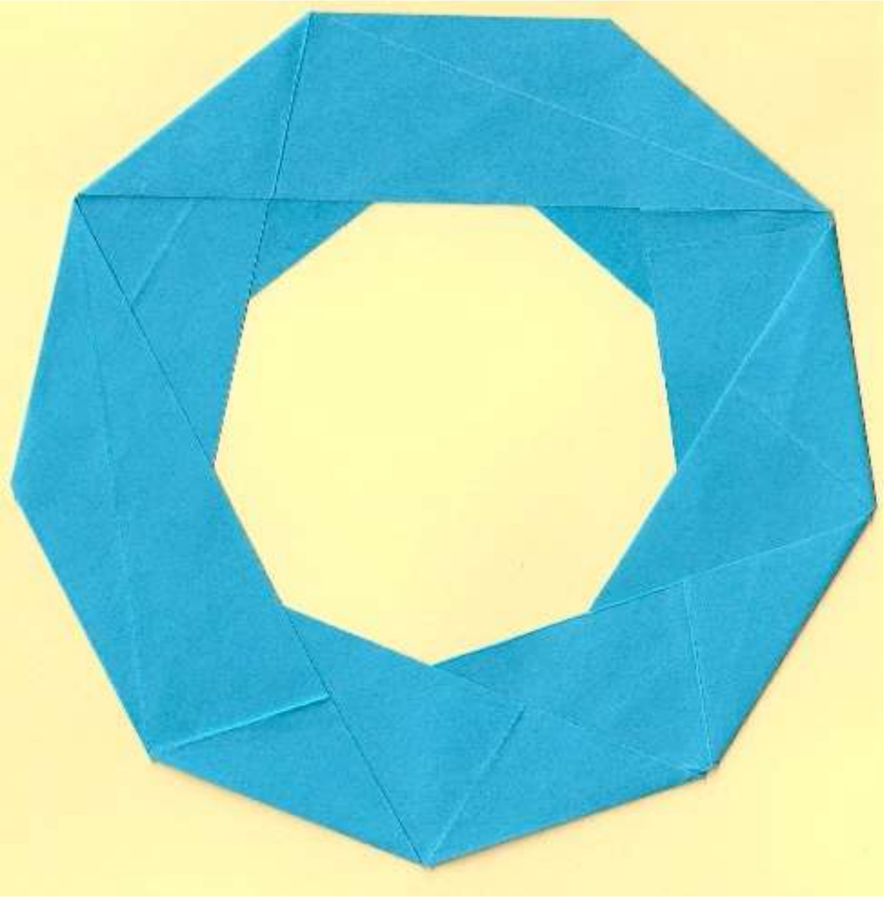
Po kilku zagięciach kąt o mierze 180^0 podzielony na kąty: a

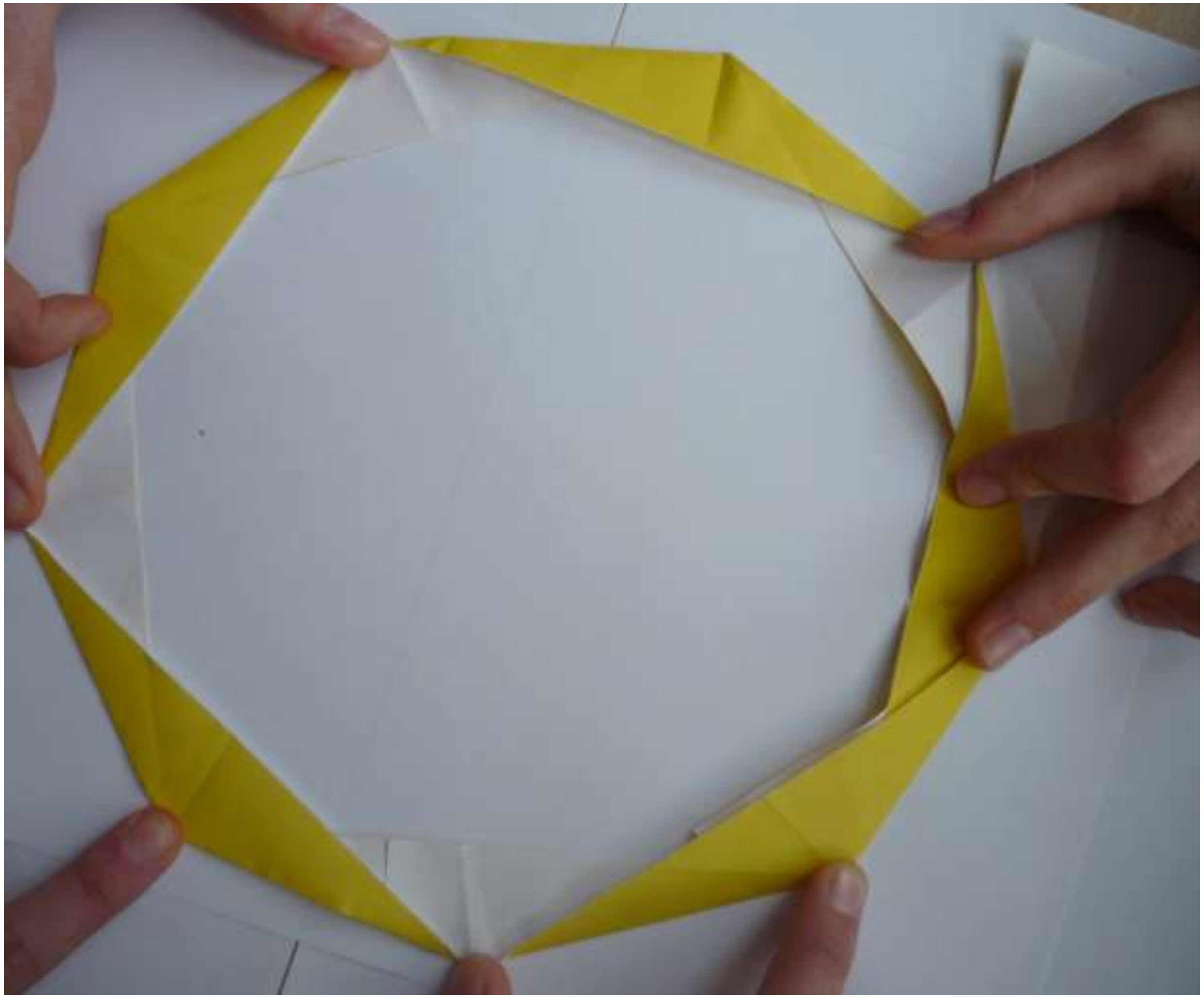
α 4α 2α α α $\alpha + 4\alpha + 2\alpha + \alpha + \alpha = 9\alpha = 180^0$

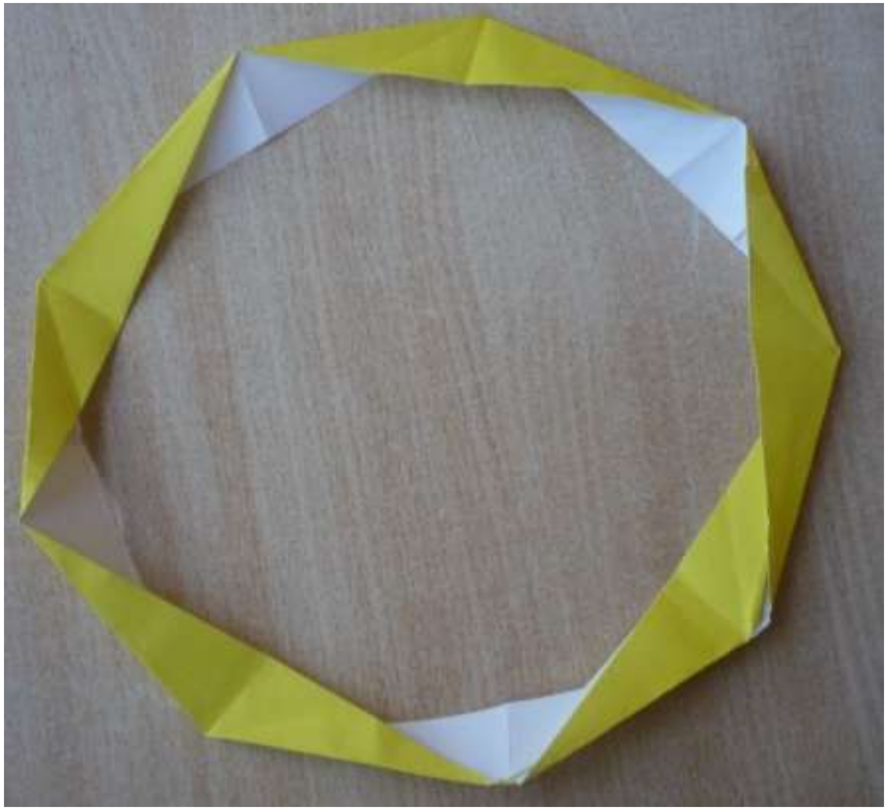
Zatem $\alpha=20^0$ $4\alpha=80^0$ $2\alpha=40^0$ $7\alpha=140^0$

Miara kata wewnętrznego dziewięciokąta foremnego - 140^0

Dziewięciokąt







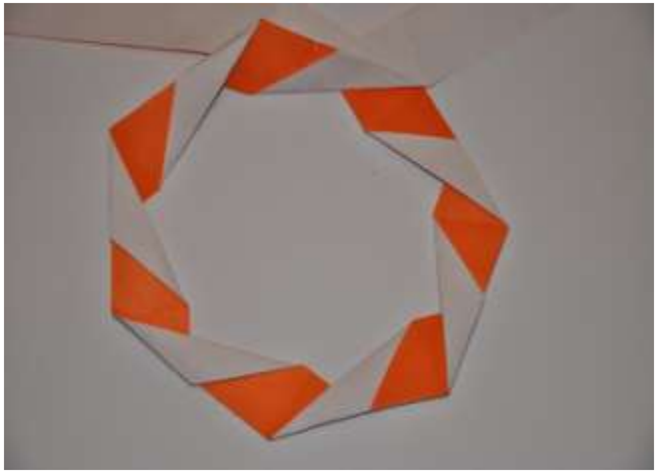
WNIOSEK

- Jeżeli liczba ilość zagięć od góry i od dołu jest taka sama $G^n D^n$, z paska papieru możemy ułożyć wielokąty foremne:

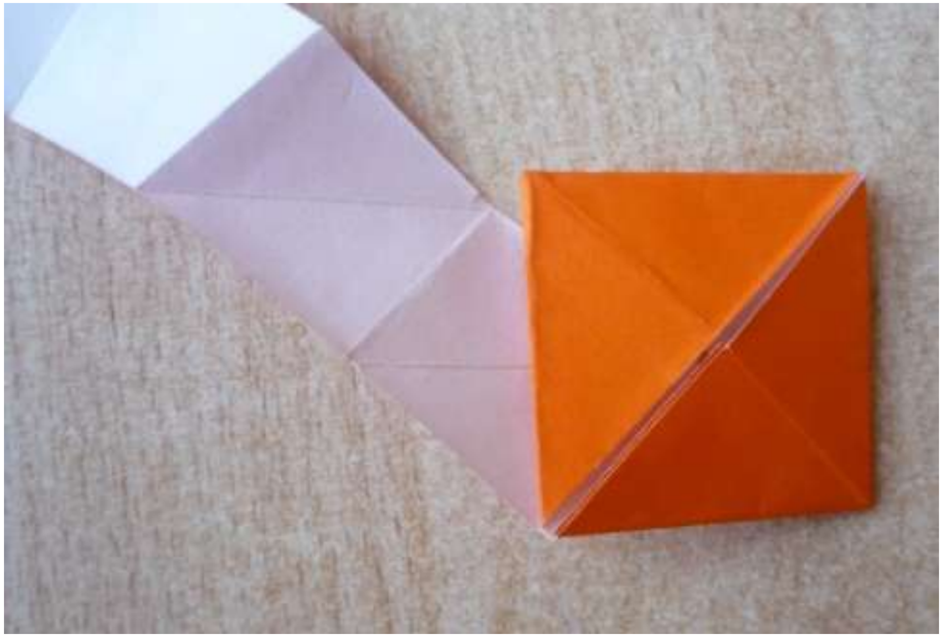
Sposób składania	ilość zagięć z jednej strony u góry lub u dołu	ilość odcinków z jednego punktu	Jaką częścią większego kąta jest pierwszy kąt ostry	Liczba kątów w wielokącie foremnym
G^1D^1	1	2	½	**3**
G^2D^2	2	3	¼	**5**
G^3D^3	3	4	$^1/_8$	**9**
G^4D^4	4	5	$^1/_{16}$	**17**
G^5D^5	5	6	$^1/_{32}$	**33**
G	**6**	7	$\mathbf{^1/_{64}}$	**65**

Jak otrzymać siedmiokąt foremny?

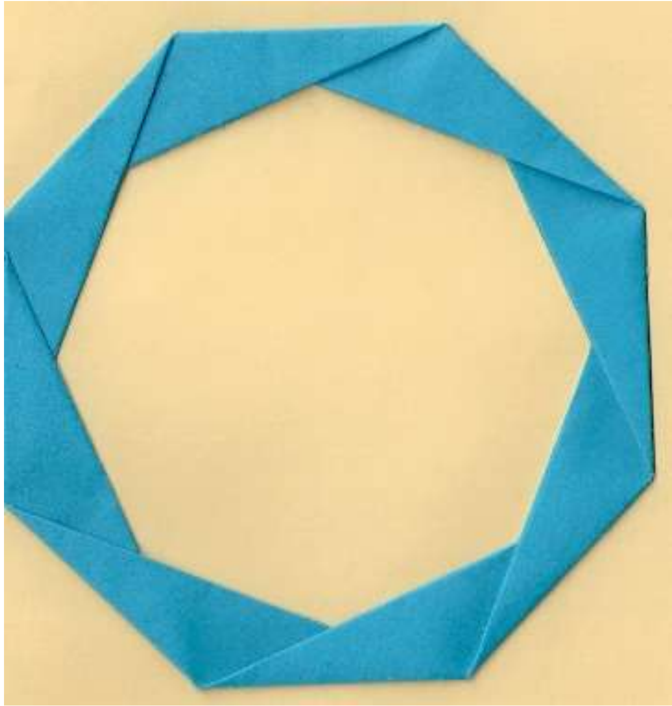
- Kąt wewnętrzny siedmiokąta foremnego ma miarę
- 128 i 4/7 stopnia. Składając taśmę $G^2 D^1$ lub $G^1 D^2$ możemy otrzymać taki kąt.

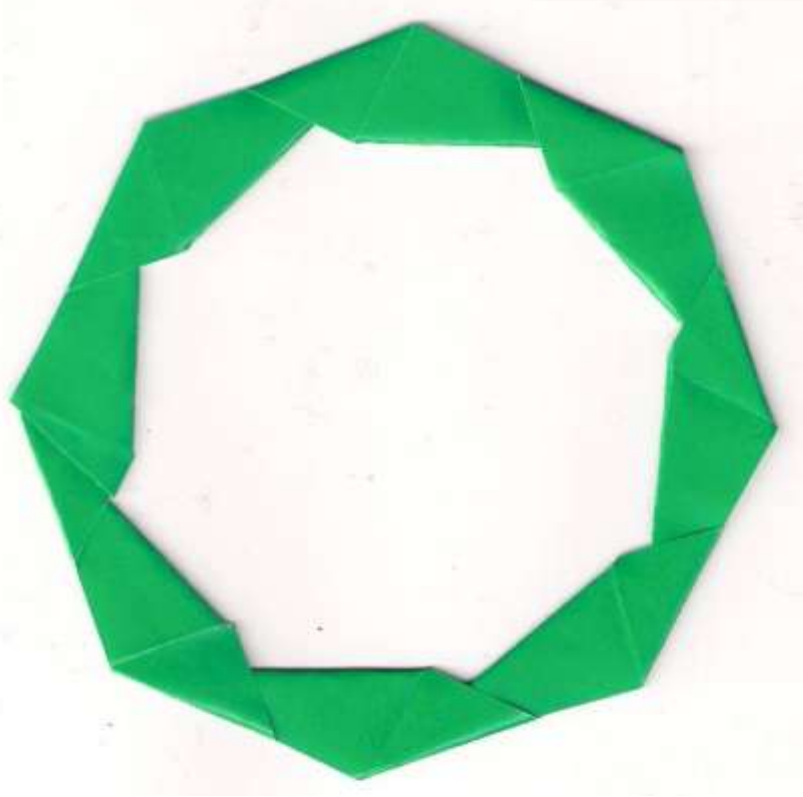


Jak otrzymać kwadrat?



Ośmiokąt foremny





- Dzieląc odpowiednio kąt 180^o można otrzymać kąt dowolnego z wielokątów foremnych.

NAZWA	ILOŚĆ BOKÓW	MIARA KĄTA WEWNĘTRZNEGO
Trójkąt równoboczny	3	60 ^{o}
Kwadrat	4	90 ^{o}
Pięciokąt foremny	5	108 ^{o}
Sześciokąt foremny	6	120 ^{o}
Siedmiokąt foremny	7	128,(571428)^o = 128 ^{o}
Ośmiokąt foremny	8	135 ^{o}
Dziewięciokąt foremny	9	140 ^{o}
Dziesięciokąt foremny	10	144 ^{o}
Jedenastokąt foremny	11	147,(27)^o czyli 147 ^{o}
Dwunastokąt foremny	**12**	150 ^{o}

Bibliografia

- 1. Szczepan Jeleński *Śladami Pitagorasa*
- 2. Peter Hilton, Jean Pedersen *Build Your Own Polyhedra*

KONIEC

Dziękujemy za uwagę