Niezmienniki

Tomasz Jakubek
V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

opiekun pracy: dr Jacek Dymel

Podczas różnych konkursów matematycznych często mamy do czynienia z pewnego rodzaju procesem do przeanalizowania. W takich zadaniach bardzo przydatnym narzędziem okazują się *niezmienniki* - własności obiektów (lub zależności między nimi), które podczas ciągu przekształceń nie ulegają zmienie. Niezmienniki występują w różnych formach. W pracy zaprezentuję niektóre z nich.

Wśród przedstawionych problemów znajdują się zadania charakterystyczne, tj. takie, w których dany jest obiekt, przekształcenie i mamy rozstrzygnąć czy uda się osiągnąć pewien stan. Pokażę również zadania inne, mniej typowe, w których dopatrzenie się niezmiennika znacznie ułatwia rozwiązanie zadania.

Redakcja zadań jest mojego autorstwa, podobnie jak część rozwiązań (1.2, 2.1, 2.3, 2.5, 2.6, 4.1, 5.1). Problemy 3.3, 4.3 są zaczerpnięte z oficjalnych materiałów Olimpiad.

1. Rozpatrywanie obiektów modulo pewna liczba.

Jeżeli w zadaniu mamy do czynienia z liczbami całkowitymi i pada pytanie, czy grupa obiektów może znaleźć się w pewnym układzie, to często dobrym pomysłem jest spojrzenie na liczby (ich sumę itp.) pod kątem podzielności. Warto zbadać je modulo mała liczba pierwsza.

1.1 Każda z liczb $a_1, a_2, ..., a_n$ jest równa 1 lub -1 oraz

$$S = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + ... + a_na_1a_2a_3 = 0.$$

Udowodnić, że $4|n$.

Na pierwszy rzut oka zadanie w ogóle nie kojarzy się z tematem. Prędzej przychodzi na myśl zastosowanie metody indukcji matematycznej, ale patrząc na postać S, byłoby to dość uciążliwe.

Rozwiązanie: Zauważmy, że gdy zastąpimy a_i przez $-a_i$, to S nie zmieni się $\pmod 4$, ponieważ cztery kolejne składniki tej sumy zmieniają znak. Istotnie, jeżeli dwa z tych wyrażeń są dodatnie, a dwa ujemne, to wartość S się nie zmienia. Jeżeli trzy wyrażenia są tego samego znaku, to suma zmienia się o ± 4, a jeśli wszystkie cztery są tego samego znaku, to S zmienia się o ± 8. Na początku mamy $S = 0$, czyli $S \equiv 0 \pmod 4$. Po kolei zmieniamy każde a_i na dodatnie, co nie zmienia $S \pmod 4$. Na końcu otrzymujemy $S = n$, co oznacza, że $4|n$.

1.2 Mamy 17 skarpetek żółtych, 15 skarpetek czerwonych i 13 niebieskich. Ruch polega na zamianie dwóch skarpetek różnych kolorów na parę skarpetek w trzecim kolorze. Czy można otrzymać:
(a) wszystkie skarpetki w jednym kolorze,
(b) po 15 skarpetek w każdym z trzech kolorów?

Zadanie nie należy do najtrudniejszych, jednak dobrze pokazuje czym kierować się w podobnych problemach. Mamy 3 kolory skarpetek i właśnie spojrzenie na operację z zadania mod 3 okazuje się kluczem.

Rozwiązanie: W obu przypadkach odpowiedź brzmi: *nie*. Niech ilość skarpetek żółtych, czerwonych i niebieskich wynosi odpowiednio a, b i c. Zauważmy, że na początku a, b, c przystają odpowiednio do $2, 0$ i $1 \pmod 3$. Niezależnie od tego, które kolory skarpetek wybierzemy, po zamianie otrzymamy $a \equiv 1, b \equiv 2, c \equiv 0 \pmod 3$. Zatem reszty z dzielenia liczb a, b, c przez 3 zawsze tworzą trzyelementowy zbiór $\{0, 1, 2\}$, więc otrzymanie takich ilości skarpetek jest niemożliwe.

1.3 (BAMO 2009) Sześć żab siedzi w wierzchołkach sześciokąta foremnego, jedna żaba w każdym wierzchołku. Żaby mogą przeskakiwać nad innymi. Jeżeli żaba przeskakuje z punktu F nad żabą znajdującą się w punkcie P, to ląduje w punkcie F' takim, że punkty F, P i F' leżą na prostej w takiej właśnie kolejności, a ponadto $F'P = 2FP$. Czy możliwe jest, aby pewna żaba znalazła się w środku sześciokąta?

Ciężko sklasyfikować powyższy problem i wpaść na pomysł jak się do niego zabrać, dopóki nie spróbuje się zastosować pewnych uproszczeń. Akurat w tym zadaniu pomocne okazało się wprowadzenie układu współrzędnych i operowanie na liczbach całkowitych.

Rozwiązanie: Bez straty ogólności załóżmy, że żaby siedzą w wierzchołkach sześciokąta o współrzędnych $(2, 0), (1, \sqrt{3}), (-1, \sqrt{3}), (-2, 0), (-1, -\sqrt{3}),\ (1, -\sqrt{3})$. Powiedzmy, że żaba siedzi w punkcie (a, b) i chce przeskoczyć nad punktem (x, y). Współrzędne punktu, w którym wyląduje wynoszą $(3x - 2a, 3y - 2b)$. Zauważmy, że $3x - 2a \equiv a \pmod 3$. Niezmiennikiem jest wartość współrzędnej $x \pmod 3$. Na początku współrzędne x były równe: $-2, -1, 1, 2$. Przystają one do 1 lub $2 \pmod 3$, więc nie możliwe jest osiągnięcie punktu $(0, 0)$.

2. Stała suma, iloczyn liczb.

W zadaniach dotyczących niezmienników niezwykle często spotyka się takie, w których pewne przekształcenie zachowuje stałą sumę, kombinację liniową, iloczyn bądź sumę kwadratów liczb. Zwykle wystarczy tylko zauważyć tę własność i zadanie jest już w dużej części rozwiązane, jednakże czasem zdarzają się inne, mniej oczywiste, takie jak **2.5**.

2.1 (a) W wierzchołku A_1 dwunastokąta foremnego $A_1 A_2 \ldots A_{12}$ postawiono znak $(+)$, w pozostałych zaś wierzchołkach znak $(-)$. Możemy zmieniać znaki na przeciwne jednocześnie w dowolnych sześciu kolejnych wierzchołkach dwunastokąta. Pokazać, że za pomocą wielokrotnego stosowania tej operacji nie można doprowadzić do tego, by przywierzchołku A_2 był znak $(+)$, a przy pozostałych wierzchołkach znak $(-)$.
(b) Udowodnić to samo twierdzenie dla operacji polegającej na jednoczesnej zmianie znaków na przeciwne w dowolnych czterech kolejnych wierzchołkach dwunastokąta.

(c) Udowodnić to samo twierdzenie dla sytuacji, gdy znaki zmieniamy w trzech kolejnych wierzchołkach.

W problemach podobnego typu, np. znaki "+" i "-" w tabelkach, zwykle dobrym pomysłem jest zastąpienie ich przez liczby 1 oraz -1 i wymnażanie ich. Oczywiście, równie dobrze można wtedy zbadać parzystość wystąpień takich znaków, ale wprowadzenie iloczynu może okazać się sporym ułatwieniem, zwłaszcza gdy nie są one wybierane w oczywisty sposób.

Rozwiązanie: Zamiast znaków $(+)$ napiszmy 1, natomiast zamiast $(-)$ napiszmy -1. Operacja niech polega na zamianie liczby w wierzchołku na przeciwną.
(a) Niezmiennikiem jest iloczyn liczb w wierzchołkach A_1, A_4, A_7, A_{10}. Zauważmy, że po operacji zawsze zostaną zmienione dokładnie dwie spośród liczb w tych wierzchołkach, więc całkowity iloczyn się nie zmieni. Na początku wynosił -1, zatem po dowolnej liczbie takich zamian wśród tych liczb znajdzie się 1.
(b) Niezmiennikiem jest iloczyn liczb znajdujących się w wierzchołkach o nieparzystym indeksie.
(c) Niezmiennikiem jest iloczyn liczb w wierzchołkach $A_2, A_3, A_5, A_6, A_8, A_9, A_{11}, A_{12}$.

2.2 Niech $a_1, a_2, ..., a_n$ będzie permutacją liczb $1, 2, ..., n$. Wykazać, że jeśli n jest nieparzyste, to $P = (a_1 - 1)(a_2 - 2)...(a_n - n)$ jest parzyste.

Rozwiązanie: Zauważmy, że suma S czynników P jest stała:

$$S = (a_1 - 1) + (a_2 - 2) + ... + (a_n - n) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} i = 0.$$

Załóżmy nie wprost, że P jest nieparzyste. Wtedy każdy z czynników P musiałby być nieparzysty, a ponieważ n jest nieparzyste, to i S musi być nieparzyste. Sprzeczność. Zatem P jest parzyste.

Najczęstszym rodzajem zadań, w których w oczywisty sposób mamy do czynienia z niezmiennikiem, są zadania z liczbami na tablicy i procesem ich zamiany czy usuwania. To zwłaszcza w takich zadaniach powinno się szukać niezmienniczej sumy bądź iloczynu.

2.3 Na tablicy napisano liczby $1, 2, ..., n$. Możemy wymazać dwie dowolne liczby a i b, a następnie dopisać liczbę $ab + a + b$. Znaleźć liczbę, która zostanie na tablicy po $n - 1$ takich operacjach.

Rozwiązanie: Zauważmy, że jeśli na tablicy znajdują się liczby $a_1, a_2, ..., a_k$, dla $k = 1, 2, ..., n$, to iloczyn $P = \prod_{i=1}^{k}(a_i + 1)$ jest stały dla każdego k. Istotnie, jeżeli wymażemy dwie liczby x i y, to iloczyn $(x + 1)(y + 1)$ zostanie zastąpiony przez $((xy + x + y) + 1) = (x + 1)(y + 1)$. Zatem po $n - 1$ operacjach na tablicy zostanie $(1 + 1)(2 + 1) \cdot \dots \cdot (n + 1) - 1 = (n + 1)! - 1$.

2.4 Na tablicy znajduje się n liczb. W jednym kroku można usunąć dowolne dwie liczby, a i b, a następnie zamiast nich napisać liczbę $\frac{a+b}{4}$. Udowodnić, że jeśli na początku na tablicy znajdowały się same jedynki, to po $n-1$ operacjach została liczba nie mniejsza niż $\frac{1}{n}$.

Rozwiązanie tego zadania zawiera pewien trik, którego jednak można się domyślić, analizując postać liczby po wykonaniu operacji (połowa średniej arytmetycznej) i dzięki tezie zadania (nierówność).

Rozwiązanie: Niech S_i będzie sumą odwrotności wszystkich liczb na tablicy po $i-1$ operacjach. Przekształcając równoważnie nierówność między średnią arytmetyczną i harmoniczną $\frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, otrzymujemy $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$. Oznacza to, że $S_i \geq S_{i+1}$, dla $i = 1, 2, ..., n-1$. Zauważmy, że $S_1 = n$, a liczbą, która została na tablicy po $n-1$ operacjach jest $\frac{1}{S_n}$. Zatem $S_1 \geq S_n \Leftrightarrow \frac{1}{S_n} \geq \frac{1}{S_1} = \frac{1}{n}$.

2.5 Na tablicy napisano liczby od 1 do 2008. Co sekundę możemy wymazać 4 liczby postaci $a, b, c, a+b+c$ i zastąpić je liczbami $a+b, b+c, c+a$. Udowodnić, że operację możemy powtarzać nie dłużej niż 10 minut.

Warto zauważyć, że najprawdopodobniej 10 min wcale nie jest najlepszym ograniczeniem. Na rozwiązanie tego zadania można wpaść dzięki przeanalizowaniu dość podobnego poprzedniego zadania.

Rozwiązanie: Zauważmy, że

$$a+b+c+(a+b+c) = (a+b)+(b+c)+(c+a),$$

$$a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2 = (a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2,$$

a więc suma wszystkich liczb na tablicy jest stała, podobnie jak suma ich kwadratów.

$$\sum_{k=1}^{2008} k = 1004 \cdot 2009$$

$$\sum_{k=1}^{2008} k^2 = \frac{2008(2008+1)(2 \cdot 2008+1)}{6} = 1004 \cdot 2009 \cdot 1339 = 1339 \sum_{k=1}^{2008} k$$

Niech n oznacza aktualną ilość liczb na tablicy, a tymi liczbami będą $a_1, a_2, ..., a_n$. Korzystając z nierówności Cauchy'ego–Schwarza otrzymujemy:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} 1 \cdot a_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} 1^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

$$n \geq \frac{1004 \cdot 2009}{1339} \geq 1506$$

Zatem operację możemy powtarzać nie dłużej niż $2008 - 1506 = 502$ sekundy, czyli mniej niż 10 minut.

2.6 (CzPolSł Z.M. 2011) Na tablicy napisano n nieujemnych liczb całkowitych, których największy wspólny dzielnik wynosi 1. W jednym kroku można zmazać dwie liczby x, y takie,że $x - y \geq 0$ oraz zastąpić je liczbami $x - y, 2y$. Rozstrzygnąć, dla jakich początkowych ciągów liczb całkowitych można doprowadzić do sytuacji, w której $n - 1$ liczb na tablicy jest zerami.

Rozwiązanie: Wykażę, że do takiej sytuacji można doprowadzić wtedy i tylko wtedy, gdy suma liczb na tablicy jest potęgą dwójki o wykładniku całkowitym nieujemnym. Zauważmy, że suma liczb na tablicy jest stała. Ponadto, zastąpienie x, y przez $x - y, 2y$ albo nie zmienia, albo zwiększa dwukrotnie ich NWD, podobnie jak NWD wszystkich liczb. Ponieważ na początku NWD liczb wynosiło 1, to wynika z tego, że po dowolnej ilości wykonanych operacji NWD liczb jest potęgą dwójki, w szczególności gdy na tablicy mamy $n - 1$ zer. Z drugiej strony $NWD(\alpha, 0, 0, \ldots, 0) = \alpha$, a skoro suma liczb na tablicy jest stała, to sumowanie się liczb do potęgi dwójki jest warunkiem koniecznym. Pokażę teraz, że jest to warunek wystarczający. W tym celu zastosuję indukcję. Załóżmy, że w danym momencie NWD liczb na tablicy wynosi $2^k, k \in \mathbb{N}$ i dokładnie m liczb na tablicy jest podzielnych przez 2^{k+1}. Ponieważ suma wszystkich liczb wynosi $2^N, N > k$, to ta suma jest też podzielna przez 2^{k+1}. Wynika z tego, że suma $n - m$ pozostałych liczb również jest podzielna przez 2^{k+1} i co za tym idzie $2|n - m$, bo $2^k x_1 + 2^k x_2 + \ldots + 2^k x_{n-m} \equiv_{2^{k+1}} (n - m)2^k \equiv_{2^{k+1}} 0$, gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}$ to liczby nieparzyste. Możemy więc $n - m$ liczb połączyć w pary tak, by po zastosowaniu operacji na każdej z nich otrzymać $n - m$ liczb podzielnych przez 2^{k+1}. Wykładnik się będzie zwiększał dopóki $k < N$, a wtedy otrzymamy $n - 1$ zer.

3. Uzyskanie malejącego ciągu liczb naturalnych.

Rozwiązania problemów z tej części opierają się na oczywistym fakcie:

Nie istnieje nieskończony, malejący ciąg liczb naturalnych.

Wyciągnąć z tego można wniosek - jeżeli po dowolnej operacji z zadania pewna zmienna maleje i jednocześnie jest liczbą naturalną, to procedury nie można wykonywać w nieskończoność.

3.1 (USAMO 1997) Niech p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą i niech $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$. Zdefiniujmy ciąg (x_n) następująco: $x_0 = a$ oraz dla $n \geq 1$

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x_{n-1} = 0, \\ \left\{ \frac{p_n}{x_{n-1}} \right\} & \text{gdy } x_{n-1} \neq 0, \end{cases}$$

gdzie $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Znaleźć wszystkie wartości a, dla których wyrazy ciągu (x_n) są od pewnego miejsca równe 0.

Rozwiązanie: Zauważmy, że $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Leftrightarrow \{x\} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ponadto, jeżeli dla pewnego naturalnego k, x_k jest niewymierne, to $\frac{p_{k+1}}{x_k}$ również jest niewymierne, jak i $\left\{\frac{p_{k+1}}{x_k}\right\} = x_{k+1}$. Zatem jeśli a jest niewymierne, to wszystkie wyrazy ciągu (x_n) są niewymierne, czyli w szczególności różne od 0. Niech teraz a będzie liczbą wymierną, $a = x_0 = \frac{m_1}{m_0}$ dla pewnych całkowitych m_1, m_0, przy czym $0 < m_1 < m_0$. Zauważmy, że $x_1 = \left\{\frac{p_1}{x_0}\right\} = \left\{\frac{p_1 m_0}{m_1}\right\} = \frac{m_2}{m_1}$, gdzie $0 \leq m_2 = p_1 m_0 \bmod m_1 < m_1$. Kontynuując ten proces otrzymujemy ciąg liczb $m_0, m_1, m_2, \ldots$, który jest ściśle malejący dopóki pewien z wyrazów nie jest równy 0. Jednakże jest on ciągiem liczb naturalnych, więc w końcu któryś z jego wyrazów wyniesie 0, a co za tym idzie, wyrazy ciągu (x_n) od pewnego miejsca są równe 0.

Warto także zwrócić uwagę na to, że ciąg (p_n) mógłby równie dobrze być dowolnym ciągiem liczb naturalnych.

3.2 (IMO 1986) Każdemu wierzchołkowi pięciokąta foremnego przyporządkowano liczbę całkowitą tak, że suma tych pięciu liczb jest dodatnia. Jeżeli trzem kolejnym wierzchołkom przyporządkowano odpowiednio liczby x, y, z, a ponadto $y < 0$, to dozwolona jest następująca operacja: x, y, z zastępujemy odpowiednio liczbami $x + y, -y, z + y$. Procedura jest powtarzana dopóki choć jedna z liczb jest ujemna. Ustal, czy ten proces skończy się on po skończonej liczbie operacji.

Rozwiązanie: Niech liczbami w kolejnych wierzchołkach będą odpowiednio: a_0, a_1, a_2, a_3, a_4. Nie trudno się przekonać, że suma T liczb w wierzchołkach nie zmienia się po zastosowaniu operacji.
Sposób 1. Wprowadźmy funkcję:

$$S(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = \sum_{i=0}^{4} \sum_{j=0}^{4} \left| \sum_{k=0}^{j} a_{k+i} \right|,$$

gdzie indeksy rozpatrujemy mod 5. Bez straty ogólności załóżmy, że $a_1 < 0$ i porównajmy $x_1 = S(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ z $x_2 = S(a_0 + a_1, -a_1, a_2 + a_1, a_3, a_4)$ - wartości funkcji S po wykonaniu operacji. Jak łatwo zauważyć (po rozpisaniu funkcji S) $x_1 - x_2 = |T - a_1| - |T + a_1| > 0$, bo $a_1 < 0$, $T > 0$. Powtarzając operację z zadania, tworzymy ściśle malejący ciąg liczb naturalnych $x_1, x_2, \ldots$, więc operacji nie możemy powtarzać w nieskończoność.
Sposób 2. Wprowadźmy funkcję:

$$f(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = \sum_{i=1}^{5} (a_i - a_{i+2})^2.$$

Indeksy rozpatrujemy mod 5. Bez straty ogólności załóżmy, że $b = a_3 < 0$. Wtedy $f(a_0, a_1, a_2 + a_3, -a_3, a_4 + a_3) - f(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = 2a_3 T < 0$. Doszliśmy do sytuacji analogicznej jak w sposobie 1, zatem operacji nie można powtarzać w nieskończoność.

3.3 (53.OM) Na tablicy są napisane trzy nieujemne liczby całkowite. Wybieramy z tej trójki dwie liczby k, m i zastępujemy je liczbami $k + m$ i $|k - m|$, a trzecia liczba pozostaje bez zmiany. Z otrzymaną trójką postępujemy tak samo. Rozstrzygnąć, czy z każdej początkowej trójki liczb całkowitych nieujemnych, kontynuując to postępowanie, można otrzymać trójkę, w której co najmniej dwie liczby są zerami.

Rozwiązanie: Każdą trójkę liczb całkowitych nieujemnych można przedstawić w postaci $(2^p a, 2^q b, 2^r c)$, gdzie p, q,r są liczbami całkowitymi nieujemnymi, zaś każda z liczb a, b, c jest nieparzysta lub równa 0. Wagą trójki $(2^p a, 2^q b, 2^r c)$ nazwiemy wielkość $a + b + c$. Wykażemy, że z każdej trójki liczb całkowitych nieujemnych o co najmniej dwóch liczbach niezerowych, wykonując operacje opisane w treści zadania, da się uzyskać trójkę o mniejszej wadze. Tym samym udowodnimy, że zawsze można otrzymać trójkę, w której co najmniej dwie liczby są zerami. Załóżmy więc, że w trójce $(2^p a, 2^q b, 2^r c)$ co najmniej dwie liczby są różne od 0. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $b, c \neq 0$ oraz $q \leq r$. Wykonując $2(r - q)$-krotnie operację $(k, l, m) \mapsto (k + l, |k - l|, m)$ przeprowadzamy trójkę $(2^p a, 2^q b, 2^r c)$ na trójkę $(2^{p+r-q} a, 2^r b, 2^r c)$, którą następnie przekształcamy na $(2^{p+r-q} a, 2^r |b - c|, 2^r (b + c))$. Liczby b i c są nieparzyste, więc waga ostatniej trójki nie przekracza

$$a + \frac{1}{2}|b - c| + \frac{1}{2}(b + c) = a + \max(b, c),$$

co jest mniejsze od $a + b + c$, czyli od wagi trójki $(2^p a, 2^q b, 2^r c)$.

4. Zdefiniowanie pomocniczej funkcji.

Metoda poniżej zaprezentowana jest szeroko stosowana nie tylko w zadaniach z niezmienników. Dla każdego układu liczb będziemy próbować znaleźć funkcję od nich zależną - odgadnąć ją po wyróżnieniu jej własności. Pomimo skomplikowanych wzorów dobrym przykładem będzie zadanie **3.2**. Jak znaleźć funkcję potrzebną do rozwiązania tego problemu? Możemy zauważyć jej kilka właściwości:

- powinna przyjmować wartości dodatnie, więc może być nią kwadrat, wartość bezwzględna lub sumy takich wyrażeń,
- najprawdopodobniej jest wielomianem,
- powinna być symetryczna względem zmiennych, a przynajmniej cykliczna (punkty znajdują się w wierzchołkach wielokąta),
- wiedząc, że suma liczb jest stała, nie należy szukać funkcji wśród dużych potęg liczb,
- zakładając, że funkcja jest cykliczna, można próbować pominąć część wyrazów, które nie zmieniają się po operacji.

W ogólności zwykle funkcje te są wielomianami, najczęściej kombinacjami liniowymi liczb.

4.1 Koło podzielono na 6 wycinków, a następnie każdemu wycinkowi przyporządkowano liczby, odpowiednio (zgodnie z ruchem wskazówek zegara) $1, 0, 1, 0, 0, 0$. Możemy powiększyć dwie sąsiadujące liczby o 1. Czy jest możliwe doprowadzenie do sytuacji, gdy wszystkie liczby będą sobie równe?

Rozwiązanie: Niech $x_1, x_2, \ldots, x_6$ będą kolejnymi liczbami przyporządkowanymi wycinkom. Rozpatrzmy kombinację liniową $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_6 x_6$. Spróbujmy znaleźć takie współczynniki, dla których jest ona stała. Po zastosowaniu operacji widzimy, że $\alpha_i = -\alpha_{i+1}$ dla $i = 1, 2, \ldots, 6$, $\alpha_7 = \alpha_1$. Tym samym $I = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6$ jest niezmiennikiem. Na początku $I = 2$, a więc doprowacenie do sytuacji, gdy wszystkie liczby będą sobie równe nie jest możliwe, gdyż wtedy byłoby $I = 0$.

4.2 Na niektórych polach nieskończonego (w obu kierunkach), wyszczególnionego wiersza szachownicy leżą kamienie (jest ich skończona ilość). Jeżeli na pewnym polu znajdują się przynajmniej dwa kamienie, można wziąć dwa takie, a następnie po jednym przełożyć na pole je poprzedzające i następujące zaraz po nim. Czy możliwe jest powrócenie do takiego samego ułożenia po skończonej ilości ruchów?

Rozwiązanie: Wszystkie pola leżą w jednym wierszu, możemy zatem przyporządkować im kolejne liczby całkowite (tak, by sąsiadującym polom odpowiadały liczby różne o jeden). Przez n_i oznaczmy numer pola, na którym leży i-ty kamień. Niech $X = \sum_i n_i^2$. Rozważmy, co dzieje się z X za każdym razem, gdy wykonujemy ruch. Najpierw, gdy usuwamy dwa kamienie z pola o numerze t, X maleje o $2t^2$. Następnie kładziemy kamienie na sąsiadujących z nim polach o numerach $t-1$ i $t+1$: X rośnie o $(t-1)^2 + (t+1)^2 = 2t^2 + 2$. Zatem każdy ruch powoduje, że X wzrasta, więc nie możemy doprowadzić do takiego samego ustawienia z jakim zaczęliśmy.

4.3 (Baltic Way 2002) Z ciągu (a, b, c, d) liczb całkowitych możemy uzyskać w jednym kroku jeden z ciągów:

$$(c, d, a, b), \quad (b, a, d, c), \quad (a + nc, b + nd, c, d), \quad (a + nb, b, c + nd, d)$$

dla dowolnej liczby całkowitej n, przy czym liczba n może być w każdym kroku inna. Rozstrzygnąć, czy przy pomocy pewnej liczby kroków można otrzymać ciąg $(3, 4, 5, 7)$ z ciagu $(1, 2, 3, 4)$.

Rozwiązanie: Ciągowi (a, b, c, d) przypisujemy liczbę $f = f(a, b, c, d) = |ad - bc|$. Zauważmy, że f nie zmienia się podczas wykonywania żadnej z operacji z zadania. $f(1, 2, 3, 4) = 2$, a $f(3, 4, 5, 7) = 1$, więc za pomocą przekształceń opisanych w zadaniu nie można otrzymać takiego ciągu.

5. Niezmienniki ciągów i przekształceń funkcji.

5.1 W ciągu $1, 0, 1, 0, 1, 0, 3, ...$ każdy wyraz, począwszy od siódmego, jest równy ostatniej cyfrze liczby, będącej sumą sześciu poprzednich wyrazów. Udowodnić, że w tym ciągu nie może wystąpić następujący blok liczb: $0, 1, 0, 1, 0, 1$.

Rozwiązanie: Niech (x_n) będzie ciągiem opisanym w zadaniu. Spróbujemy znaleźć niezmiennik mod 10 zależny od sześciu kolejnych wyrazów ciągu. Powinno więc zachodzić:

$$ax_i + bx_{i+1} + cx_{i+2} + dx_{i+3} + ex_{i+4} + fx_{x+5} \equiv ax_{i+1} + bx_{i+2} + cx_{i+3} +$$

$$dx_{i+4} + ex_{i+5} + f(x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3} + x_{i+4} + x_{i+5}) \pmod{10},$$

dla każdego $i \in \mathbb{Z}_+$ i pewnych $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$. Równoważnie:

$$x_i(f-a) + x_{i+1}(f+a-b) + x_{i+2}(f+b-c) + x_{i+3}(f+c-d) +$$

$$x_{i+4}(f+d-e) + x_{i+5}e \equiv 0 \pmod{10}.$$

Oznacza to, że wszystkie współczynniki przy wyrazach ciągu (x_n) muszą przystawać do $0 \pmod{10}$. Dostajemy układ równań. Pamiętając, że wszystkie liczby nie mogą naraz być równe 0 oraz, że $5a \equiv 0 \pmod{10}$ otrzymujemy, że $a \equiv 2, b \equiv 4, c \equiv 6, d \equiv 8, e \equiv 0$ i $f \equiv 2 \pmod{10}$.

$$2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \equiv 8 \pmod{10}, \quad \text{ale}$$

$$2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 0 + 8 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \equiv 4 \pmod{10},$$

więc taki blok liczb nie wystąpi.

5.2 Czy jest możliwe przekształcenie funkcji $f(x) = x^2 + 4x + 3$ w funkcję $g(x) = x^2 + 10x + 9$ za pomocą ciągu przekształceń postaci $f(x) \mapsto x^2 f(\frac{1}{x} + 1)$ lub $f(x) \mapsto (x-1)^2 f(\frac{1}{x-1})$?

Rozwiązanie: Rozważmy funkcję kwadratową $f(x) = ax^2 + bx + c$. Jej wyróżnik jest równy $b^2 - 4ac$. Pierwsze przekształcenie zamienia $f(x)$ w $(a+b+c)x^2 + (b+2a)x + a$ z wyróżnikiem równym $(b+2a)^2 - 4(a+b+c)a = b^2 - 4ac$, natomiast drugie zamienia $f(x)$ w $cx^2 + (b-2c)x + (a-b+c)$, gdzie $\Delta = b^2 - 4ac$. Zatem niezmiennikiem jest wyróżnik trójmianu kwadratowego. Jednakże $x^2 + 4x + 3$ ma wyróżnik równy 4, a $x^2 + 10x + 9$ równy 64, więc takie przekształcenie nie jest możliwe.

Bibliografia

- "Problem-Solving Strategies" A. Engel
  wyd. Springer, Nowy Jork 1998
- "Przygotowanie do olimpiad matematycznych" D. Ch. Musztari
  Oficyna Wydawniczo-Poligraficzna "ADAM", Warszawa 2002
- http://web.mit.edu/yufeiz/www/wc08/invariants.pdf
- www.matematyka.pl
- www.om.edu.pl
- www.artofproblemsolving.com
- www.amc.maa.org/usamo/usamo.shtml