Ciągi komplementarne

Autor: Krzysztof Zamarski

Opiekun pracy: dr Jacek Dymel

Spis treści

1 Wprowadzenie

W niniejszej pracy omówię zagadnienie ciągów komplementarnych. Nie jest ono często opisywane w ogólnie dostępnej literaturze, prawdopodobnie ze względu na niewielką liczbę zastosowań w zadaniach olimpijskich. Oznacza to, że w tej dziedzinie może istnieć jeszcze wiele do odkrycia.

Ciągi komplementarne, jak można się domyślić, są ciągami, które uzupełniają się wzajemnie do zbioru liczb naturalnych (formalna definicja na str. 7.). Główne twierdzenie, które ich dotyczy to twierdzenie Lambeka-Mosera, które pozwala w prosty sposób generować pary takich ciągów. Jego dowód oraz szczegółowe zastosowania zaprezentuję w głównej części pracy. Do ich zrozumienia konieczne będzie wprowadzenie pojęcia tzw. ciągu odwrotnego. W ostatnim rozdziale zaproponuję natomiast proste uogólnienie tego twierdzenia oraz samego pojęcia ciągów komplementarnych na liczbę ciągów większą od 2.

Praca ta została napisana na Konkurs Prac Uczniowskich organizowany przez Krakowskie Młodzieżowe Towarzystwo Przyjaciół Nauk i Sztuk. Z tego powodu zaznaczam, że wszystkie zaprezentowane w niej dowody, z wyjątkiem rozdziału 6., który zawiera twierdzenia autora, oraz przykładów 2.4. a, b, c, 5.1. i 5.2., pochodzą z książki Andrzeja Nowickiego pt. "Podróże po Imperium Liczb" (patrz: Źródła).

Mam jednak nadzieję, że praca zainteresuje także szersze grona czytelników i być może w sposób bardziej przystępny niż inne publikacje przybliży im proste w gruncie rzeczy zagadnienie, jakim są ciągi komplementarne.

2 Pojęcia podstawowe

2.1 Oznaczenia

W całej pracy przez $\mathbb{Z}_+$ oznaczać będziemy zbiór liczb całkowitych dodatnich, natomiast przez $\mathbb{N}$ zbiór liczb naturalnych, czyli $\mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$.

Niech $f(n)$ oznacza ciąg liczb całkowitych nieujemnych (gdzie $n \in \mathbb{Z}_+$). Przez zapis:

$$f = (0, 0, 1, 1, 1, 2, 3, ...)$$

rozumiemy, że $f(1) = 0$, $f(2) = 0$, $f(3) = 1$, $f(4) = 1$ itd..

Do zbioru A należeć będą ciągi $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{N}$ niemalejące i nieograniczone. W tym rozdziale każdy ciąg oznaczany przez f należy do A.

2.2 "Ciąg odwrotny"

Dla każdego ciągu f zdefiniujmy ciąg liczb całkowitych f^* taki, że:

$$f(f^*(n)) < n \leq f(f^*(n) + 1).$$

Ponieważ ciąg f jest niemalejący, $f^*(n)$ jest równe liczbie wyrazów ciągu f mniejszych od n, czyli można go zdefiniować w sposób równoważny następująco:

$$f^*(n) = |\{k \in \mathbb{Z}_+; f(k) < n\}|.$$

Zauważmy także, że f^* jest funkcją w zbiór liczb całkowitych najbliższą funkcji odwrotnej. Z tego względu w literaturze zagranicznej nazywa się go czasami "ciągiem odwrotnym" (*ang. inverse sequence*).

2.3 Twierdzenia o ciągach postaci f^*

Udowodnię teraz najważniejsze twierdzenia związane z ciągami postaci f^*, z których będę korzystał w dalszej części pracy:

Twierdzenie 2.1 *f^* jest ciągiem niemalejącym, nieograniczonym.*

Dowód Oczywiste jest, że ciąg f^* jest ciągiem niemalejącym. Załóżmy nie wprost, że jest on ograniczony. Istnieje wówczas taka nieujemna liczba całkowita p, że $f^*(n) = p$ dla wszystkich n większych od pewnej liczby naturalnej n_0. Wtedy zgodnie z definicją ciągu:

$$n \leq f(p+1) \text{ dla } n > n_0,$$

co oznacza, że zbiór liczb całkowitych większych od n_0 jest ograniczony z góry przez liczbę $f(p+1)$ - sprzeczność.

□

Twierdzenie 2.2 $f = f^{**}$

Dowód Oznaczmy $f^* = g$. W takiej sytuacji chcemy udowodnić, że $g^* = f$. Niech $g^*(n) = k$. Rozważmy dwa przypadki:

I $k = 0$ Wtedy $g(k+1) = g(1) \geq n$, więc $g(1) \in \mathbb{Z}_+$. Możemy teraz podstawić

$$f(g(1)) = f(f^*(1)) < 1$$

(z definicji f^*), co oznacza, że $f(g(1)) = 0$. Ponieważ f jest ciągiem niemalejącym i $g(1) \geq n$ również $f(n) = 0 = g^*$.

II $k \geq 1$ Wtedy:

$$g(k) < n \leq g(k+1).$$

Ponieważ f jest ciągiem niemalejącym:

$$f(g(k)+1) \leq f(n) \leq f(g(k+1)).$$

Oprócz tego:

$$f(g(k)+1) \geq k \text{ i } f(g(k+1)) < k+1.$$

Z tych nierówności mamy:

$$k \leq f(g(k)+1) \leq f(n) \leq f(g(k+1)) < k+1.$$

Czyli ostatecznie:

$$f(n) = k = g^*(n).$$

□

Twierdzenie 2.3 *Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m, n zachodzi dokładnie jedna z poniższych nierówności:*

$$f(m) < n \quad lub \quad f^*(n) < m.$$

Dowód Jeśli $f(m) < n$, to z nierówności $n \leq f(f^*(n)+1)$ mamy $f(m) < n \leq f(f^*(n)+1)$, a ponieważ f jest ciągiem niemalejącym, $m < f^*(n)+1$, czyli $m \leq f^*(n)$.
Jeśli natomiast $f(m) \geq n$, to z nierówności $f(f^*(n)) < n$ mamy$f(f^*(n)) < n \leq f(m)$, a ponieważ f jest ciągiem niemalejącym $m > f^*(n)$.

□

Uwaga Można również udowodnić twierdzenie odwrotne do powyższego, co czyni z niego trzecią, równoważną definicję ciągu f^*.

2.4 Przykłady ciągów postaci f^*

a) $f(n) = n \Rightarrow f^*(n) = n - 1.$

Uzasadnienie

$$f(f^*(n)) < n \leq f(f^*(n)+1),$$
$$f^*(n) < n \leq f^*(n)+1,$$
$$f^*(n)+1 = n,$$
$$f^*(n) = n-1.$$

b) Niech $a, r \in \mathbb{Z}_+$.
$f(n) = a + (n-1)r$ (ciąg arytmetyczny) $\Rightarrow f^*(n) = [\frac{n-a-1}{r}] + 1.$

Uzasadnienie W tym przypadku definicję f^* zapiszemy nieco inaczej:

$$f(f^*(n)) + 1 \leq n \leq f(f^*(n)+1),$$
$$rf^*(n) - r + a + 1 \leq n \leq rf^*(n) + a,$$
$$rf^*(n) \leq n + r - a - 1 \leq r(f^*(n)+1) - 1 < r(f^*(n)+1),$$
$$f^*(n) \leq \frac{n+r-a-1}{r} < f^*(n)+1,$$
$$f^*(n) = \left[\frac{n+r-a-1}{r}\right] = \left[\frac{n-a-1}{r}\right] + 1.$$

Uwaga Może się zdarzyć, że $[\frac{n-a-1}{r}] + 1 < 0$. Wówczas $f^*(n) = 0$.

c) Niech $a, q \in \mathbb{Z}_+$.
$f(n) = aq^{n-1}$ (ciąg geometryczny) $\Rightarrow f^*(n) = [\log_q \frac{n-1}{a} + 1]$.

Uzasadnienie

$$f(f^*(n)) + 1 \le n \le f(f^*(n) + 1),$$

$$aq^{f^*(n)-1} + 1 \le n \le aq^{f^*(n)},$$

$$aq^{f^*(n)-1} \le n - 1 \le aq^{f^*(n)} - 1 < aq^{f^*(n)},$$

$$q^{f^*(n)-1} \le \frac{n-1}{a} < q^{f^*(n)},$$

$$f^*(n) - 1 = \left[\log_q \frac{n-1}{a}\right],$$

$$f^*(n) = \left[\log_q \frac{n-1}{a} + 1\right].$$

d) Niech $s \in \mathbb{Z}_+$. $f(n) = n^s \Rightarrow f^*(n) = [\sqrt[s]{n-1}]$.

Uzasadnienie

$$f(f^*(n)) + 1 \le n \le f(f^*(n) + 1),$$

$$(f^*(n))^s + 1 \le n \le (f^*(n) + 1)^s,$$

$$(f^*(n))^s \le n - 1 \le (f^*(n) + 1)^s - 1 < (f^*(n) + 1)^s,$$

$$f^*(n) \le \sqrt[s]{n-1} < f^*(n) + 1,$$

$$f^*(n) = [\sqrt[s]{n-1}].$$

e) $f(n) = [xn]$ (gdzie x jest liczbą niewymierną) $\Rightarrow f^*(n) = [x^{-1}n]$.

Uzasadnienie

$$f(f^*(n)) < n \le f(f^*(n) + 1),$$

$$[xf^*(n)] < n \le [xf^*(n) + x],$$

$$xf^*(n) < n \le xf^*(n) + x.$$

Ponieważ x jest niewymierna: $n < xf^*(n) + x$ i stąd

$$f^*(n) < \frac{n}{x} < f^*(n) + 1,$$

$$f^*(n) = \left[\frac{n}{x}\right] = [x^{-1}n].$$

3 Ciągi komplementarne

Na tym etapie możemy już poprawnie zdefiniować pojęcie ciągów komplementarnych:

Niech $F, G : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ będą ciągami. Ciągi te są *komplementarne* (*ang. complementary sequences*) wtedy, i tylko wtedy gdy:

(1) są ściśle rosnące,

(2) nie mają wspólnych wyrazów ($F(\mathbb{Z}_+) \cap G(\mathbb{Z}_+) = \emptyset$),

(3) każda liczba całkowita dodatnia jest wyrazem jednego z tych ciągów ($F(\mathbb{Z}_+) \cup G(\mathbb{Z}_+) = \mathbb{Z}_+$).

Oczywistymi przykładami par ciągów komplementarnych są:

a) ciąg liczb parzystych, $F = (2, 4, 6, 8, ...)$ i nieparzystych, $G = (1, 3, 5, 7, ...)$,

b) ciąg liczb kwadratowych, $F = (1, 4, 9, 16, ...)$ i niekwadratowych, $G = (2, 3, 5, 6, ...)$

c) ciąg liczb podzielnych przez 5, $F = (5, 10, 15, 20, ...)$ i niepodzielnych przez 5, $G = (1, 2, 3, 4, 6, ...)$

d) ciąg liczb mających najwyżej dwa dzielniki dodatnie, $F = (1, 2, 3, 5, ...)$ i ciąg liczb złożonych, $G = (4, 6, 8, 9, ...)$ itd...

Widać, że istnieje wiele takich przykładów. Nie wiadomo jednak, czy można w prosty sposób znajdować tego typu pary w nieskończoność. Jak wspomniałem we wprowadzeniu, do tego właśnie służy Twierdzenie Lambeka-Mosera.

4 Twierdzenie Lambeka-Mosera

4.1 Obserwacje początkowe

Lemat 4.1 *Ciąg F postaci $F(n) = n + f(n)$, gdzie $f \in A$, jest ściśle rosnący.*

Dowód

$$F(n) = n + f(n) < (n+1) + h(n) \leq (n+1) + f(n+1) = F(n+1).$$

$\square$

Lemat 4.2 *$H, G : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ będą ciągami komplementarnymi i niech*

$$h(n) = H(n) - n, \;\; g(n) = G(n) - n,$$

dla $n \in \mathbb{Z}_+$. Wtedy ciągi h, g należą do A.

Dowód Ponieważ ciąg H jest ściśle rosnący $H(n) \geq n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{Z}_+$. Wobec tego każde $h(n)$ jest nieujemną liczbą całkowitą. Dodatkowo:

$$h(n) = H(n) - n < H(n+1) - n = H(n+1) - (n+1) + 1 = h(n+1) + 1,$$

czyli $h(n) < h(n+1) + 1$ lub inaczej $h(n) \leq h(n+1)$. Ciąg h jest wobec tego niemalejący. Załóżmy nie wprost, że ciąg $h(n)$ jest ograniczony. Istnieje wówczas takie k, że $h(n) = k$ dla wszystkich n większych od pewnej liczby całkowitej dodatniej n_0. Wtedy $H(n) = n + k$ dla wszystkich $n > n_0$. Oznacza to, że wszystkie liczby całkowite większe od $(n_0 + k)$ są wyrazami ciągu H, więc, zgodnie z założeniem o komplementarności, ciąg G musi być skończony lub ograniczony. To jednak jest sprzeczne z założeniami, więc $h(n)$ jest ciągiem nieograniczonym. Analogicznie tezy dowodzimy dla ciągu g.

$\square$

4.2 Twierdzenie właściwe

Twierdzenie 4.1 (Lambek, Moser, 1954). *Niech $f, g : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{N}$ będą ciągami i niech $F(n) = f(n) + n$ oraz $G(n) = g(n) + n$ dla $n \in \mathbb{Z}_+$. Ciągi F, G są komplementarne wtedy, i tylko wtedy gdy $f, g \in A$ i $g = f^*$.*

Dowód
($\Rightarrow$) Załóżmy, że ciągi F, G są komplementarne. Z lematu 4.2. wiemy, że ciągi f, g należą do A. Chcemy udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi równość:

$$g^*(n) = f(n).$$

Niech $n \in \mathbb{Z}_+$ i $G(n) = m$. Ponieważ G jest ciągiem rosnącym, występuje w nim dokładnie n wyrazów mniejszych lub równych m. Z założenia o komplementarności wiemy także, że w ciągu F występuje dokładnie $m-n$ wyrazów mniejszych od m i dodatkowo m nie jest wyrazem tego ciągu. Oznaczmy przez r liczbę $m - s$. Oczywiste, że jeśli $r = 0$, to $f^*(n) = 0 = g(n)$.
Dalej załóżmy, że $r \geq 1$. W tym przypadku liczba naturalna $F(r)$ jest ostro większa od m i stąd wynika, że $f(r) < n$. Istotnie,

$$f(r) = F(r) - r < m - r = n.$$

Mamy ponadto,

$$f(r+1) = F(r+1) - (r+1) > m - (r+1) = m - r - 1 = n - 1,$$

więc $s \leq f(r+1)$. Wykazaliśmy, że

$$f(r) < n \leq f(r+1),$$

a zatem $f^*(n) = r$. Zauważmy, że

$$g(n) = G(n) - n = m = n = r.$$

Mamy więc oczekiwaną równość $g(n) = f^*(n)$. Wykazaliśmy więc, że $g = f^*$.

($\Leftarrow$) Zakładamy teraz, że f, g są ciągami niemalejącymi i nieograniczonymi oraz $g = f^*$. Z lematu 4.1. wiemy, że ciągi F, G są ściśle rosnące. Pokażemy teraz, że zbiory $F(\mathbb{Z}_+)$ i $G(\mathbb{Z}_+)$ są rozłączne. Załóżmy nie wprost, że $F(n) = G(m)$ dla pewnych $m, n \in \mathbb{Z}_+$. Wtedy:

$$f(f^*(m)) < m \leq f(f^*(m) + 1) \text{ oraz } f(n) + n = f^*(m) + m.$$

Zatem

$$f(f^*(m)) + m < m + f^*(m) \leq f(f^*(m) + 1) + f^*(m)),$$

i stąd

$$F(f^*(m)) < F(n) < F(f^*(m) + 1).$$

Ciąg F jest ściśle rosnący, więc $f^*(m) < n < f^*(m)+1$, co daje sprzeczność. Należy jeszcze wykazać, że $F(\mathbb{Z}_+) \cup G(\mathbb{Z}_+) = \mathbb{Z}_+$. W tym celu wprowadźmy nowy ciąg

$$H : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+,$$

składający się tych liczb całkowitych dodatnich, które nie są wyrazami ciągu F. Jest oczywiste, że ciąg H jest ściśle rosnący, oraz ciągi F, H są komplementarne. W szczególności

$$F(\mathbb{Z}_+) \cup H(\mathbb{Z}_+) = \mathbb{Z}_+.$$

Z pierwszej części dowodu wiemy, że istnieje taki ciąg $h \in A$, że $F(n) = n + h(n)$ oraz $H(n) = n + h^*(n)$ dla $n \in \mathbb{Z}_+$. Ale $h(n) = F(n) - n = f(n)$, więc $h = f, h^* = f^*$ i stąd

$$H(n) = n + h^*(n) = n + f^*(n) = G(n).$$

Zatem, $F(\mathbb{Z}_+) \cup G(\mathbb{Z}_+) = F(\mathbb{Z}_+) \cup H(\mathbb{Z}_+) = \mathbb{Z}_+$.

$\square$

4.3 Dowód alternatywny

Twierdzenie Lambeka-Mosera można prawdopodobnie udowodnić na wiele innych sposobów. Jeden z nich zaprezentowany został w pracy Yuvala Ginosara na temat tego twierdzenia (patrz: Źródła). Wykorzystuje on twierdzenia o funkcjach ciągłych. Nie będę go tu jednak przytaczał, gdyż niniejsza praca ma inne priorytety - zainteresowanych odsyłam do źródeł.

5 Przypadki szczególne

5.1 Wyznaczanie $f(n)$

$F(n) = 2n$, $G(n) = 2n - 1$ (ciąg liczb parzystych i nieparzystych).

$$f(n) = F(n) - n = n,$$

$$g(n) = G(n) - n = n - 1.$$

Jak wiemy z 2.4.a $f^*(n) = g(n)$.

5.2 Generowanie ciągów komplementarnych

Do tego problemu można podejść na trzy sposoby, zilustrowane przez poniższe przykłady:

a) $f(n) = 2n$ (jest to ciąg arytmetyczny, w którym a=2 i r=2)

$$f^*(n) = \left[\frac{n-a-1}{r}\right] + 1 = \left[\frac{n-2-1}{2}\right] + 1 = \left[\frac{n-3}{2}\right] + 1 = \left[\frac{n-1}{2}\right]$$

$$F(n) = 2n + n = 3n,$$

$$G(n) = f^*(n) + n = \left[\frac{n-1}{2}\right] + n = \left[\frac{3n-1}{2}\right],$$

$$F(n) = (3, 6, 9, 12, ...),\ G(n) = (1, 2, 4, 5, ...).$$

b) $F(n) = n^2$, $G(n) =?$.

$$f(n) = F(n) - n = n^2 - n,$$

$$f^*(n) = \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right] \text{ (dowód tego faktu analogiczny do przypadku 2.4.d)},$$

$$G(n) = n + f^*(n) = n + \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right] = \left[n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}\right].$$

(jest to wzór na n-tą liczbę niekwadratową)

c) W ciągu liczb całkowitych dodatnich skreślamy co piątą liczbę otrzymując nowy ciąg. Jaki jest wzór na n-ty wyraz tego ciągu?

$$F(n) = 5n,\ G(n) = ?.$$

$$f(n) = F(n) - n = 4n = 4 + 4(n-1),$$

$$f^*(n) = \left\lceil \frac{n-a-1}{r} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{n-4-1}{4} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{n-5}{4} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{n-1}{4} \right\rceil,$$

$$G(n) = n + f^*(n) = n + \left\lceil \frac{n-1}{4} \right\rceil = \left\lceil \frac{5n-1}{4} \right\rceil.$$

5.3 Dowodzenie rozłączności

Twierdzenie *Niech*

$$A = \{n + [e^n]; n \in \mathbb{Z}_+\}\ i\ B = \{n + [\ln n]; n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Wtedy $A \cup B = \mathbb{Z}_+$ *oraz* $A \cap B = \emptyset$.

Dowód Oznaczmy dwa ciągi składające się z elementów zbiorów odpowiednio A i B:

$$F(n) = n + [e^n] \text{ i } G(n) = n + [\ln n],$$

$$f(n) = [e^n] \text{ i } g(n) = [\ln n],$$

$$f(f^*(n)) + 1 \leq n \leq f(f^*(n) + 1),$$

$$[e^{f^*(n)}] + 1 \leq n \leq [e^{f^*(n)+1}] \leq e^{f^*(n)+1},$$

$$e^{f^*(n)} < n \leq e^{f^*(n)+1}.$$

Ponieważ $e^{f^*(n)+1}$ nie jest liczbą całkowitą

$$e^{f^*(n)} < n < e^{f^*(n)+1},$$

$$f^*(n) < \ln n < f^*(n) + 1,$$

$$f^*(n) = [\ln n].$$

Wobec tego $g(n) = f^*(n)$, czyli ciągi F, G są komplementarne, z czego wynika teza.

□

5.4 Twierdzenie Beatty

Poniższe twierdzenie nazwane zostało na cześć Samuela Beatty, który w 1926 roku napisał pracę na temat ciągów postaci $B_r(n) = [rn]$, gdzie r jest liczbą niewymierną (nazywanych ciągami Beatty). Twierdzenie Lambeka-Mosera, udowodnione później, stanowi jego uogónienie.

Twierdzenie 5.1 *Dla dowolnej liczby dodatniej p niech*

$$A_p = \{[np]; n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Jeśli $p, q > 1$ są takimi liczbami niewymiernymi, że

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

to $A_p \cap A_q = \emptyset$ oraz $A_p \cup A_q = \mathbb{Z}_+$.

Dowód Załóżmy, że x jest liczbą niewymierną i niech

$$f(n) = [xn],$$

dla $n \in \mathbb{Z}_+$. Wtedy (patrz: 2.4.e)

$$f^*(n) = [x^{-1}n],$$

dla $n \in \mathbb{Z}_+$. Z tw.4.1. wynika, że ciągi

$$F(n) = n + [xn] \text{ i } G(n) = n + [x^{-1}n]$$

są komplementarne. Podstawmy $p = x + 1$ oraz $q = 1 + x^{-1}$. Wtedy

$$F(n) = [pn] \text{ i } G(n) = [qn]$$

oraz

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Ciągi $[pn]$ i $[qn]$ są komplementarne, z czego wynika teza.

$\square$

6 Uogólnienie

6.1 Nowa definicja

Jak łatwo zauważyć, zjawisko komplementarności nie występuje tylko w przypadku par ciągów. Zbiór $\mathbb{Z}_+$ można bowiem podzielić na dowloną ilość części, z których każda, po rosnącym uporządkowaniu jej elementów, stanowić będzie pewien ciąg. Można wobec tego zaproponować ogólniejszą definicję:

Niech $F_1, F_2, ..., F_n : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ będą ciągami. Ciągi te są komplementarne wtedy, i tylko wtedy gdy:

(1) są ściśle rosnące,

(2) nie mają parami wspólnych wyrazów ($F_i(\mathbb{Z}_+) \cap F_j(\mathbb{Z}_+) = \emptyset$, dla dowolnych $i, j \in 1, 2, ..., n$),

(3) każda liczba całkowita dodatnia jest wyrazem jednego z tych ciągów ($F_1(\mathbb{Z}_+) \cup F_2(\mathbb{Z}_+) \cup ... \cup F_n(\mathbb{Z}_+) = \mathbb{Z}_+$).

Oczywistym przykładem grupy k ciągów komplementarnych są takie ciągi $F_1, F_2, ...F_k$, że ciąg F_i stanowi zbiór wszystkich liczb całkowitych dodatnich, które przy dzieleniu przez k dają resztę i, czyli $F_i(n) = nk + i$, gdzie $i \in \{1, 2, ..., k\}$.

6.2 Zastosowanie rekurencyjne

W tym momencie można postawić następujący problem: czy istnieje również uogólnione twierdzenie Lambeka-Mosera, które pozwalałoby generować zbiory n ciągów komplementarnych? Okazuje się, że udowodniona już wersja tego twierdzenia wystarcza do wygenerowania dowolnej ilości ciągów komplementarnych przy użyciu jednego ciągu $f \in A$, a dysponując całym zbiorem A można wygenerować dowolną konkretną grupę n ciągów komplementarnych.

Twierdzenie 6.1 *Niech F, G będą ciągami komplementarnymi. Wówczas ciągi $H(n) = F(F(n))$, $I(n) = F(G(n))$ oraz G też są komplementarne.*

Dowód Oczywiste jest, że ciągi G, H, I są ściśle rosnące.
Od razu wiemy także, że żaden z ciągów H, I nie ma wspólnych wyrazów z ciągiem G (wszystkie wyrazy H, I są wyrazami ciągu F, kopmlementarnego z G). Ponieważ żadna liczba nie występuje w ciągu F dwa razy, również ciągi H i I nie mają wspólnych wyrazów. Pozostaje wykazać, że $G(\mathbb{Z}_+) \cup H(\mathbb{Z}_+) \cup I(\mathbb{Z}_+) = \mathbb{Z}_+$. Z założenia o komplementarności F i G mamy $F(\mathbb{Z}_+) \cup G(\mathbb{Z}_+) = \mathbb{Z}_+$, co oznacza, że każdy wyraz ciągu F jest wyrazem ciągu H albo I, co kończy dowód.

□

Powyższe twierdzenie można uogólnić następująco:

Twierdzenie 6.2 *Niech $F_1, F_2, ..., F_k$ oraz F, G będą dwoma grupami ciągów komplementarnych. Wówczas ciągi $F_1, F_2, ..., F_{k-1}, H, I$, gdzie $H(n) = F_k(F(n))$ oraz $I(n) = F_k(G(n))$ też są komplementarne.*

Dowód Dowód analogiczny jak w przypadku 6.1..

□

Można je również częściowo odwrócić:

Twierdzenie 6.3 *Dla każdej trójki ściśle rosnących ciągów $F, F_1, F_2 : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ takiej, że $F_1(\mathbb{Z}_+) \cup F_2(\mathbb{Z}_+) = F(\mathbb{Z}_+)$ i $F_1(\mathbb{Z}_+) \cap F_2(\mathbb{Z}_+) = \emptyset$ istnieje taka para ciągów komplementarnych G, H, że $F_1(n) = F(G(n))$ i $F_2(n) = F(H(n))$.*

Dowód Ciągi G, H można łatwo skonstruować. Z założenia, dla każdego elementu $F_1(n)$ istnieje dokładnie jedno takie $k \in \mathbb{Z}_+$, że $F(k) = F_1(n)$. Zdefiniujmy ciąg G jako funkcję, która liczbie n przypisuje liczbę k (analogicznie H). Wtedy otrzymamy dwa nieskończone ciągi G, H liczb całkowitych dodatnich ($k \in \mathbb{Z}_+$). Są one ściśle rosnące, gdyż ściśle rosnące są także ciągi F, F_1, F_2. Nie mają wspólnych wyrazów, gdyż $F_1(\mathbb{Z}_+) \cap F_2(\mathbb{Z}_+) = \emptyset$, więc nie istnieją takie $k, n, m \in \mathbb{Z}_+$, dla których $F(k) = F_1(n) = F_2(m)$. Dodatkowo $G(\mathbb{Z}_+) \cup H(\mathbb{Z}_+) = \mathbb{Z}_+$, ponieważ z założenia dla każdego $k \in \mathbb{Z}_+$ istnieje takie $n \in \mathbb{Z}_+$, że $F(k) = F_1(n)$ lub $F(k) = F_2(n)$. Są to więc ciągi komplementarne, co kończy dowód.

□

Pokażę teraz, że stosując rekurencyjnie udowodnione wyżej twierdzenia, z jednego ciągu $f(n) \in A$ na pewno da się otrzymać dowolną ilość ciągów komplemntarnych, przy czym odpowiedni wzór będzie prawdopodobnie bardzo skomplikowany.

Twierdzenie 6.4 *Dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}_+$ i $k \geq 2$ dowolny ciąg $f(n) \in A$ wystarcza do skonstruowania grupy k ciągów koplementarnych.*

Dowód Przeprowadzę dowód indukcyjny - dla $k = 2$ teza wynika z twierdzenia Lambeka-Mosera.
Załóżmy teraz, że przy pomocy ciągu $f(n)$ skonstruowaliśmy grupę k ciągów komplementarnych. Niech będą to $F_1, F_2, ..., F_k$. Oznaczmy teraz $F(n) = n + f(n)$ oraz $G(n) = n + f^*(n)$, a następnie $F_{k+1}(n) = F_k(F(n))$ i $F_{k+2}(n) = F_k(G(n))$. Z tw. Lambeka-Mosera wiemy, że ciągi F, G są komplementarne, a więc, z tw. 6.2., komplementarne są także ciągi $F_1, F_2, ...,$ F_{k-1}, F_{k+1}, F_{k+2}, których jest $k + 1$.
Na mocy zasady indukcji otrzymujemy tezę.

□

Stosując tylko jeden ciąg $f(n)$ nie da się jednak skonstruować każdej możliwej grupy ciągów komplementarnych. Do tego potrzebna jest ich większa liczba, o czym mówi następujące

Twierdzenie 6.5 *Dla każdej grupy k ciągów komplementarnych $F_1, F_2, ...,$ F_k, gdzie $k \in \mathbb{Z}_+$ i $k \geq 2$ istnieją takie ciągi $f_1, f_2, ..., f_{k-1} \in A$, które wystarczają do konstrukcji tej grupy.*

Dowód Również w tym przypadku dowód opierać się będzie na zasadzie indukcji. Dla $k = 2$ i ciągów F_1, F_2 ciągiem koniecznym do ich konstrukcji jest $f(n) = F_1(n) - n$ (z tw. Lambeka Mosera). Załóżmy, że teza zachodzi dla dowolnej grupy k ciągów komplementarnych. Niech $F_1, F_2, ..., F_k, F_{k+1}$ będzie dowolną grupą $k + 1$ takich ciągów. Oznaczmy przez H ściśle rosnący ciąg, którego elemetami są wyrazy ciągów F_{k+1} i F_k. Wówczas $F_1, F_2, ..., F_{k-1}, H$ jest grupą k ciągów komplementarnych, którą zgodnie z założeniem indukcyjnym da się skonstruować przy pomocy pewnych ciągów $f_1, f_2, ..., f_{k-1}$. Z tw. 6.3. wiemy także, że istnieje taka para ciągów komplementarnych H_1, H_2, że $F_k(n) = H(H_1(n))$ oraz $F_{k+1}(n) = H(H_2(n))$. Z tw. Lambeka-Mosera do konstrukcji ciągów H_1, H_2 wystarczy ciąg $h_1(n) = H_1(n) - n$, $h \in A$. Ostatecznie do skonstruowania ciągów $F_1, F_2, ..., F_k, F_{k+1}$ wystarczą ciągi $f_1, f_2, ..., f_{k-1}, h_1$, których jest k. Na mocy zasady indukcji otrzymujemy tezę.

□

Źródła:

[1] Andrzej Nowicki, "Podróże po imperium liczb, Część 15.: Liczby, Funkcje, Ciągi, Zbiory, Geometria", http://www.mat.uni.torun.pl/ anow, 2013

[2] Yuval Ginosar, "On the Lambek-Moser Theorem", http://arxiv.org/pdf/-1207.5633.pdf, 2012

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Lambek

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Beatty_sequence