TRÓJKĄTY CIĘCIW

Natalia Ślusarz
V Liceum Ogólnokształcące
im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

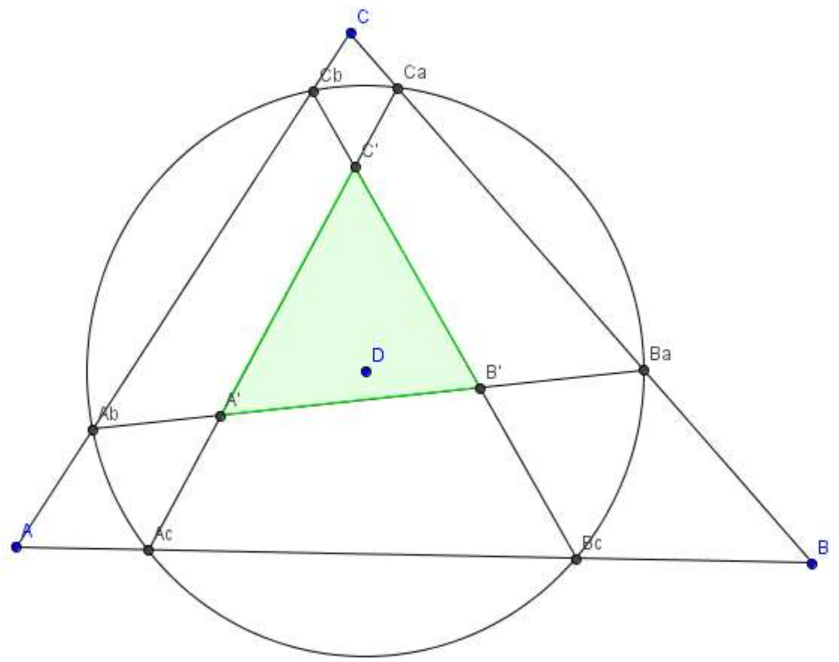
Spis treści

1. Zapoznanie z zagadnieniem.

Praca poświęcona jest omówieniu kilku ciekawych właściwości figury nazywanej "trójkątem cięciw", zainspirowana arytkułem "Equilateral Chordal Triangles" autorstwa Floora van Lamoena.

1.1 Co to jest trójkąt cięciw?

Kiedy okrąg przecina każdy bok trójkąta w dwóch punktach, możliwe jest takie połączenie tych punktów, że cięciwy stworzą mniejszy trójkąt (A'B'C'), nazywany przez nas „trójkątem cięciw” (rys. 1).



Rysunek 1

Oznaczmy prostą zawierającą odcinek BC jako prostą a, a prostą zawierającą odcinek B_cC_b prostą a'.

Analogicznie prosta b zawiera odcinek CA, prosta b' odcinek C_aA_c, prosta c odcinek AB, a prosta c' odcinek A_bB_a.

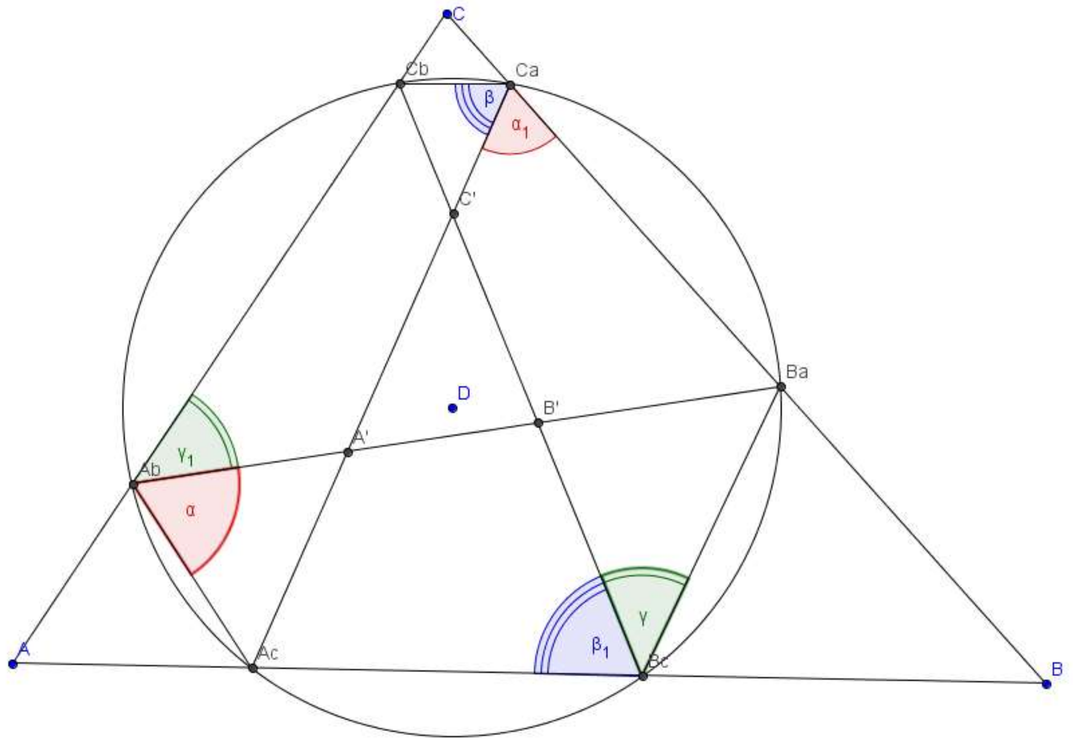
Nazwijmy trójkąt wyjściowy (ABC) trójkątem T, a trójkąt cięciw (A'B'C') trójkątem T' dla uproszczenia zapisu.

2. Twierdzenia dotyczące trójkątów cięciw

2.1. Twierdzenie nr 1

(a,a') oznacza kąt skierowany między prostymi a i a'.

T: (c',b) + (b',a) + (a',c) ≡ 0 (mod π)



Rysunek 2

Dowód:

Zauważmy, że:

(c',b) = ∡ ($C_bB_cB_a$) ponieważ są oparte na tym samym łuku

analogicznie

(b',a) = ($B_aA_bA_c$) i (a',c) = ($C_bC_aA_c$)

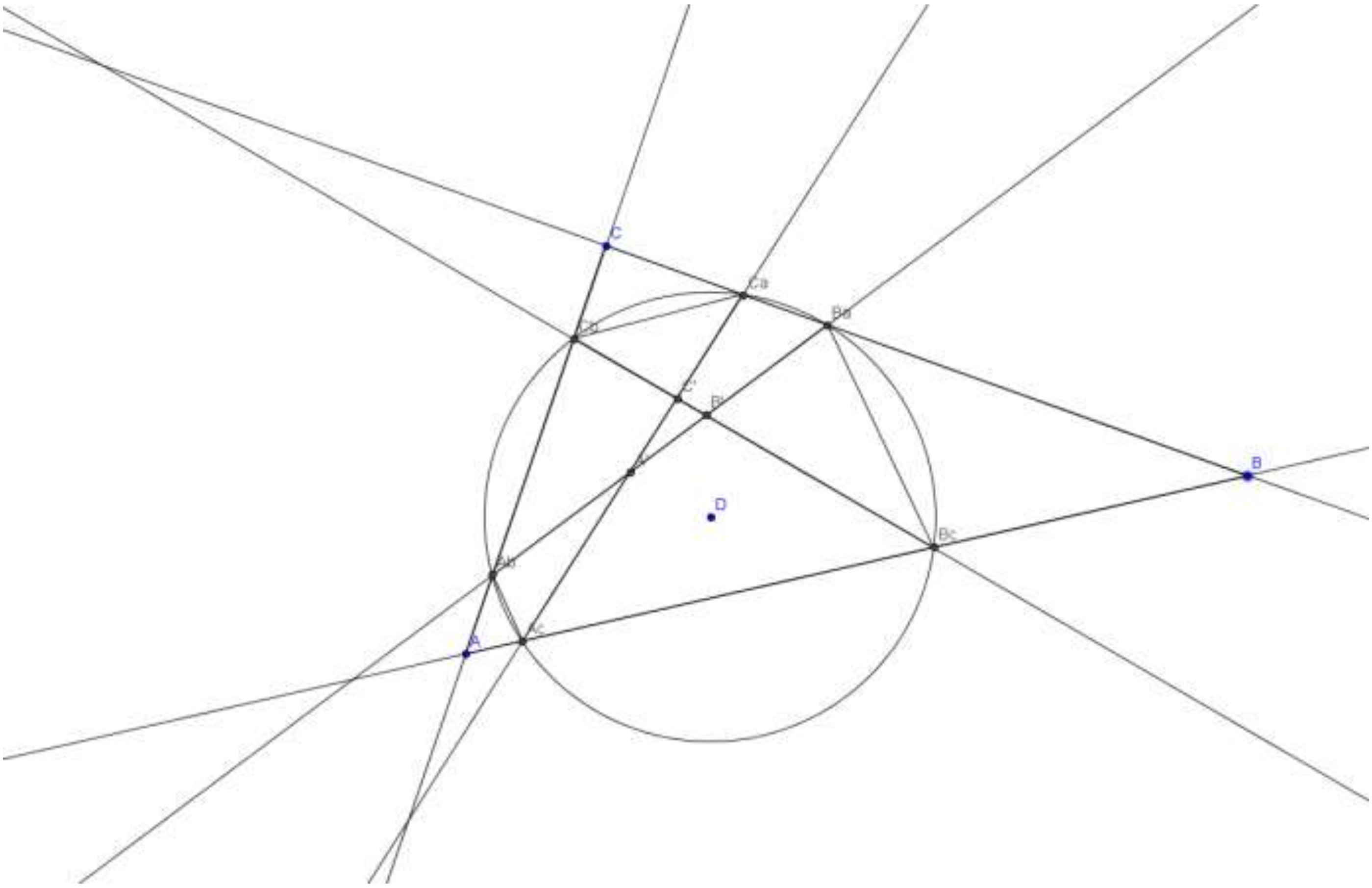
W czworokącie AbAcBcCb, który jest wpisany w okrąg suma naprzeciwległych kątów równa jest równa π.

Z tego wynika, że (b,c') + (b',a) + (a',c) ≡ 0 (mod π)

■

2.2. Twierdzenie nr 2

Teza: T: $(a',a) + (b',b) + (c', c) \equiv 0 \pmod{\pi}$



Przez oznaczenie (A) rozumiemy kąt w wierzchołku A trójkąta ABC. Analogicznie w pozostałych przypadkach.

Zauważmy, że:

$(a',a) = \pi - (c',b) - (b',a) - (B)$
$(b',b) = \pi - (c',b) - (a',c) - (C)$

$(c, c') = \pi - (a',c) - \pi + A + (a',c) - (c',b)$
$(c', c) = 2\pi - \pi + \pi - A + (c',b)$
$(c',c) = 2\pi - A + (c',b)$

Z tego wynika, że:
$(a',a) + (b',b) + (c',c) \equiv 4\pi - A - B - C - (c',b) - (b',a) - (a',c) \pmod{\pi}$
$(a',a) + (b',b) + (c',c) = -A - B - C - (c',b) - (b',a) - (a',c) \pmod{\pi}$
$(a',a) + (b',b) + (c',c) = - (c',b) - (b',a) - (a',c) \pmod{\pi}$
$(a',a) + (b',b) + (c',c) = 0 \pmod{\pi}$

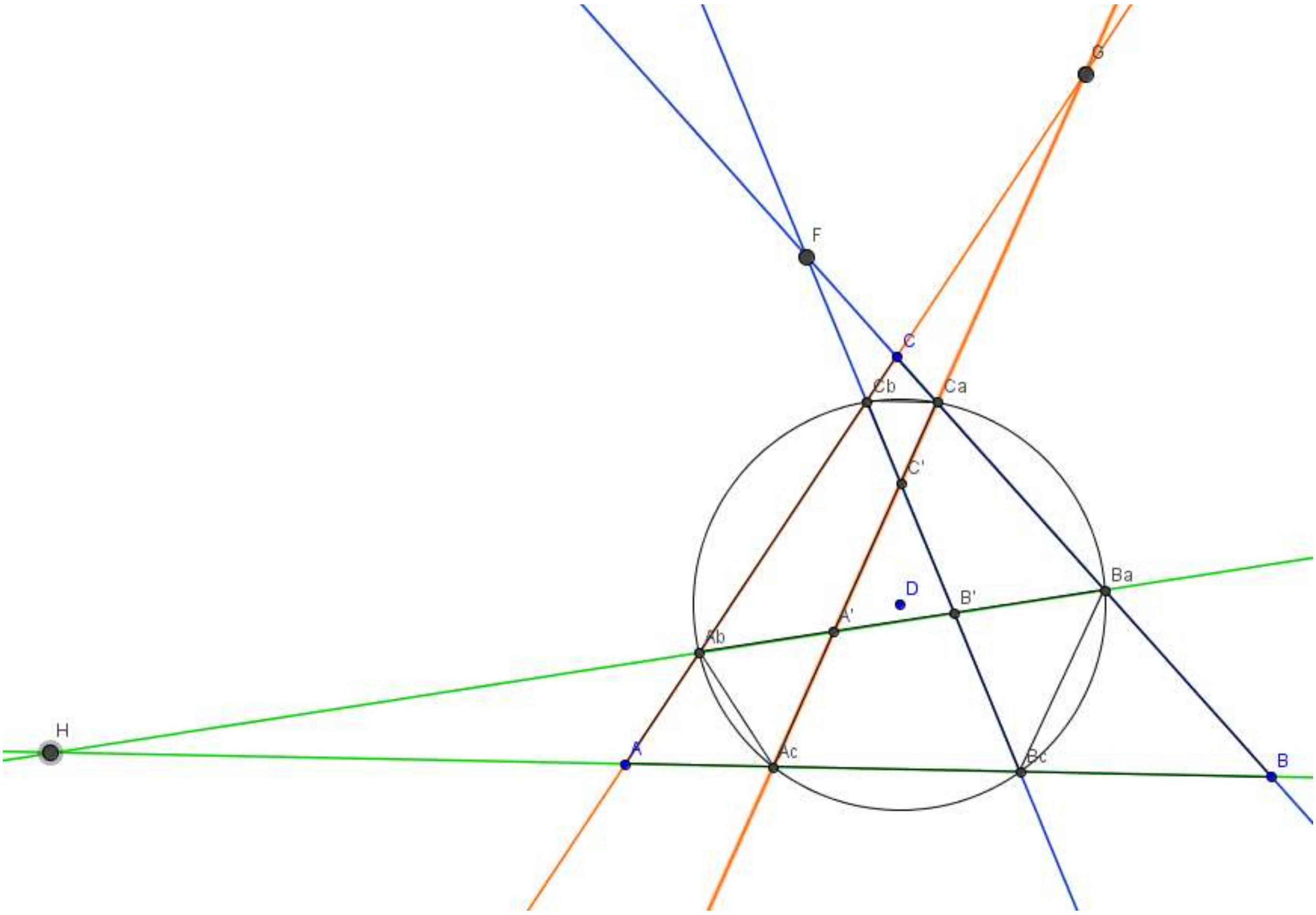
Co stanowi tezę.

■

2.3 Twierdzenie nr 3

Teza: Trójkąt T' jest perspektywiczny z trójkątem T.

Dowód:



Rysunek 3

Dwa trójkąty mają oś perspektywy, gdy punkty przecięcia par boków, które sobie odpowiadają są współliniowe.

Dwa trójkąty mają środek perspektywy, gdy proste łączę pary odpowiadających sobie wierzchołków w dwóch trójkątach przecinają się w jednym punkcie.

Z twierdzenia Pascala dla sześciokąta $A_bA_cB_cB_aC_aC_b$ wynika, że punkty H, F, G są współliniowe - przechodząca przez nie prosta stanowi oś perspektywy trójkątów T i T'.

Skoro H, F, G są współliniowe, to z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Desarguesa wynika, że proste przechodzące przez odpowiednie wierzchołki obu trójkątów (T i T') przecinają się w jednym punkcie - punkt ten jest środkiem perspektywy obu tych trójkątów.

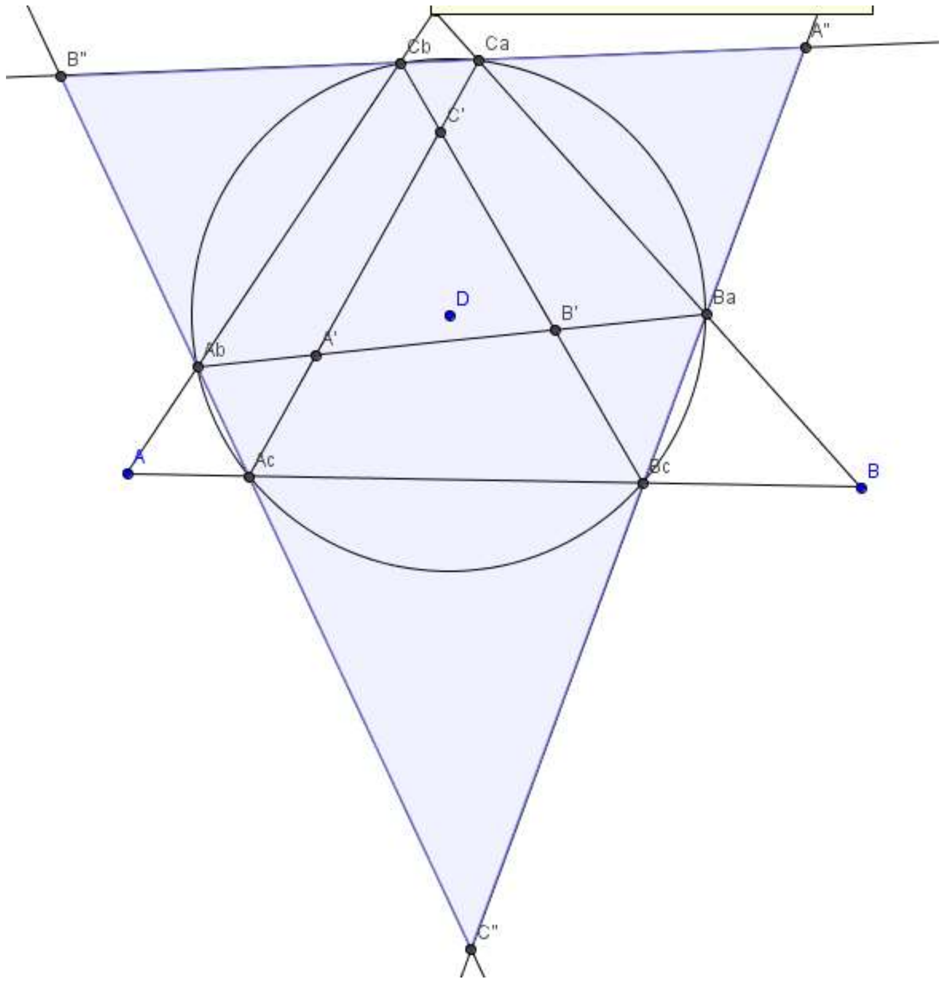
Z tego wynika, że trójkąty T i T' mają zarówno oś jak i środek perspektywy.

■

2.4 Alternatywne trójkąty cięciw.

Przedłużając odcinki C_bC_a, B_aB_c, A_bA_c uzyskamy nowy trójkąt – A’’B’’C’’ (dla wygody nazwijmy go trójkątem T’’).

Jest to **alternatywny trójkąt cięciw** (rys. 4).

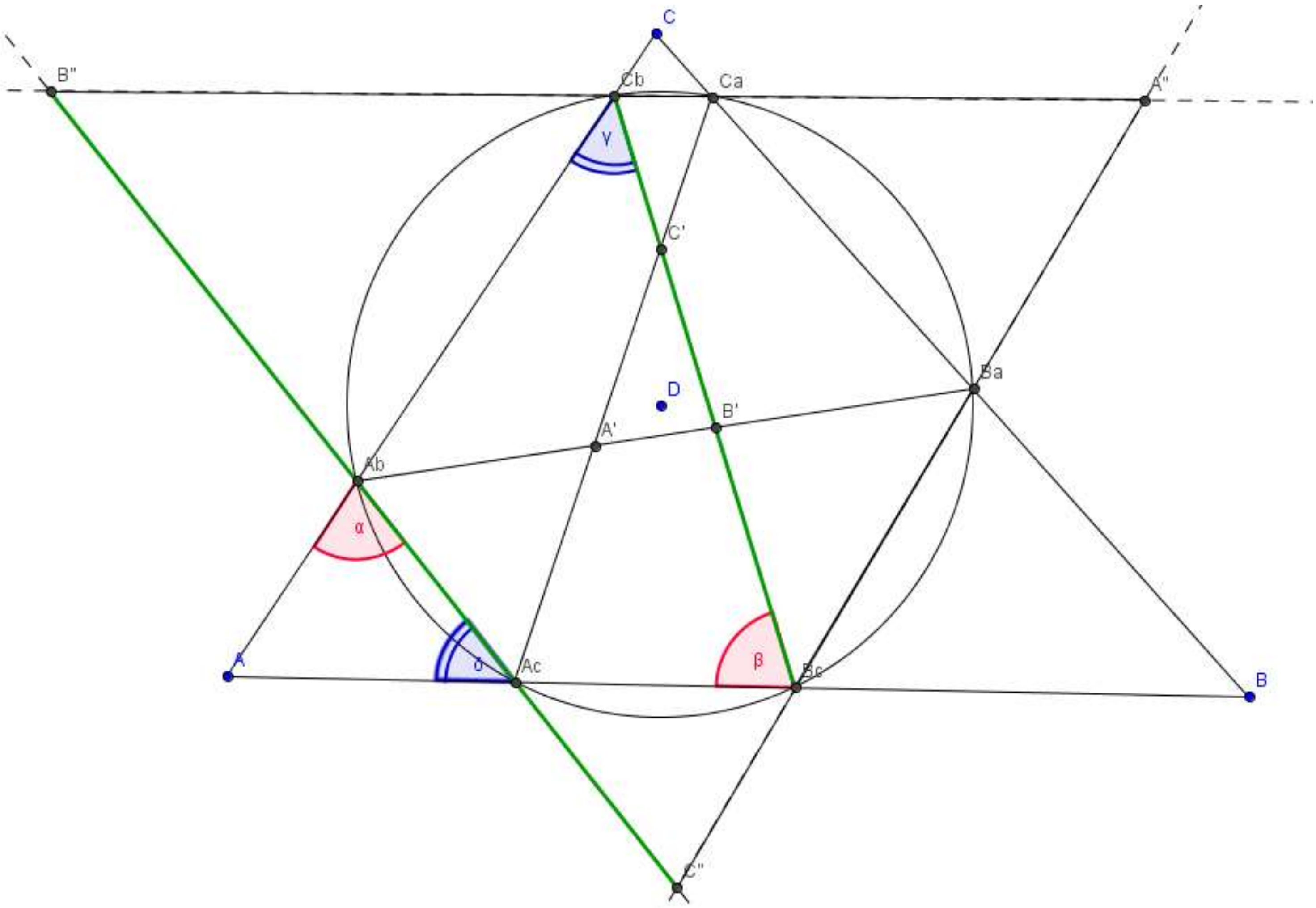


Rysunek 4

2.5 Twierdzenie nr 4

T: Odpowiednie boki dwóch trójkątów cięciw T' i T'' nie są równoległe.

Dowód nie wprost:



Rysunek 5

Jak łatwo zauważyć z Twierdzenia nr 1:

$\measuredangle\ A_cBcC_b = \measuredangle\ A_cA_bA$ i $\measuredangle\ B_cC_bA_b = \measuredangle\ A_bA_cA$

Łatwo też zauważyć, że B"C" || C_bB_c wtedy i tylko wtedy, gdy

$\measuredangle\ A_cBcC_b = \measuredangle\ A_bA_cA$

Co jest prawdziwe jedynie dla trójkątów T' i T" będących trójkątami równoramiennymi, czyli sprzeczność.

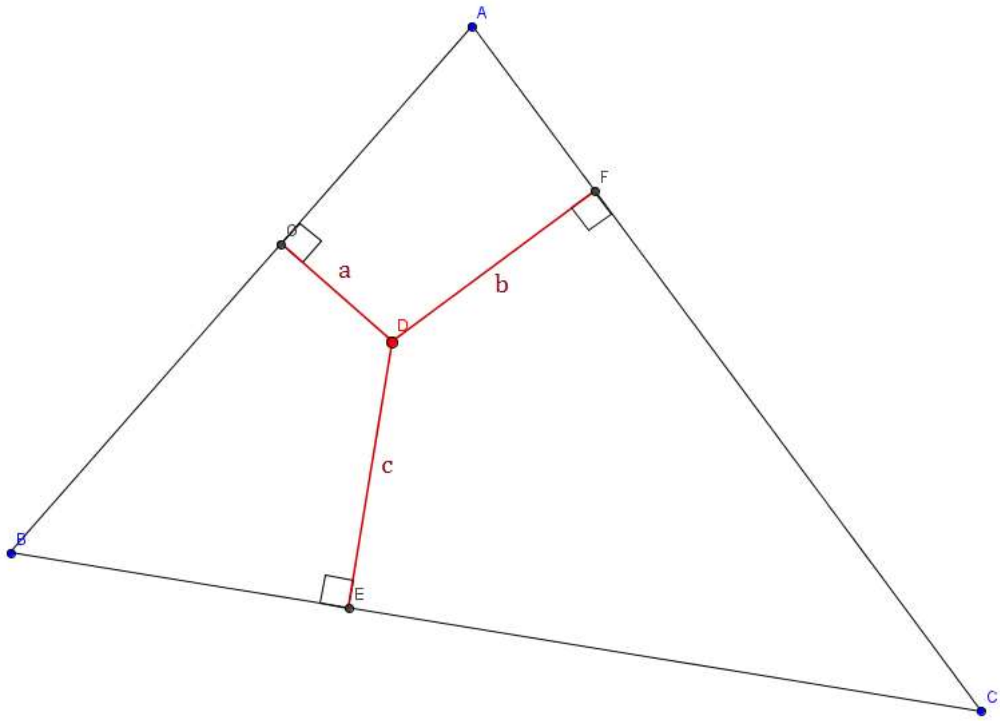
Analogicznie w przypadku pozostałych boków.

■

2.6. Twierdzenie nr 5

T: Wszystkie trójkąty jednokładne z trójkątem cięciw mają z trójkątem wyjściowym ten sam środek perspektywy.

2.6.1 Współrzędne trójliniowe



Rysunek 6

Współrzędne trójliniowe punktu D to: *(ka;kb;kc)*
gdzie k ∈ R i k≠0

Współrzędne trójliniowe półprostej AD to: *(ka;kb)*
gdzie k ∈ R i k≠0

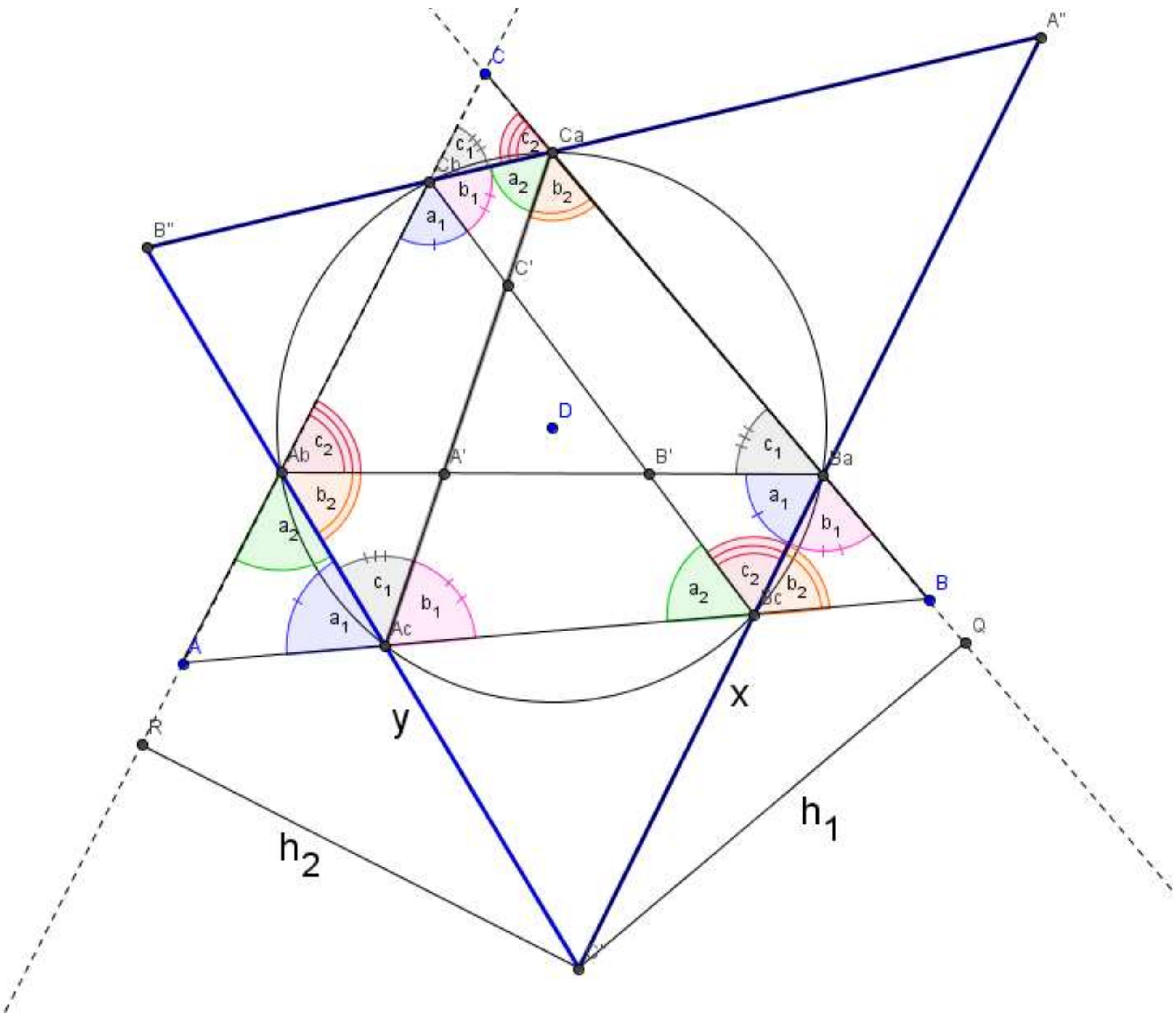
Dowód:

Oznaczmy na rysunku kąty a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2.

Niech x oznacza długość odcinka B_aC'', a y długość odcinka A_bC''.

Niech h_1 oznacza odległość punktu C'' od prostej CB, a h_2 odległość tego punktu od prostej CA.

Niech Q i R to spodki odpowiednio h_1 i h_2.



Z twierdzenia sinusów w trójkącie $C''B_aA_b$:

$x : \sin(b2) = A_bB_a : \sin(C'')$
$y : \sin(a2) = A_bB_a : \sin(C'')$

$x = \sin(b2) \cdot \csc(C'') \cdot A_bB_a$
$y = \sin(a2) \cdot \csc(C'') \cdot A_bB_a$

Z twierdzenia sinusów w trójkącie $C''QB_a$:

$x = h_1 : \sin(b_1)$
$h_1 = \sin(b_1) \cdot \sin(b_2) \cdot \csc(C'') \cdot A_bB_a$

Z twierdzenia sinusów w trójkącie $RC''A_b$:

$y = h_2 : \sin(a_2)$
$h_2 = \sin(a_1) \cdot \sin(a_2) \cdot \csc(C'') \cdot A_bB_a$

Z tego wynika, że dwie z trzech współrzędnych trójliniowych punktu C" (względem trójkąta T) wyglądają tak:

$$C'' = (\sin(b_1)\sin(b_2) ; \sin(a_1)\sin(a_2) ; \ldots)$$

Przy czym pierwsza współrzędna podana jest względem prostej a, druga względem prostej b, trzecia, niewiadoma, względem prostej c.

Analogicznie możemy podać po dwie współrzędne trójliniowe dla punktu A" i B":

$$A'' = (\ldots ; \sin(c_1)\sin(c_2); \sin(b_1)\sin(b_2))$$
$$B'' = (\sin(c_1)\sin(c_2); \ldots ; \sin(a_1)\sin(a_2))$$

Teraz zmieńmy współczynnik k we współrzędnych każdego z punktów. Podzielmy współrzędne

punktu C" przez: $\sin(a_1)\sin(a_2)\sin(b_1)\sin(b_2)$
punktu A" przez $\sin(c_1)\sin(c_2)\sin(b_1)\sin(b_2)$
punktu B" przez $\sin(c_1)\sin(c_2)\sin(a_1)\sin(a_2)$

Otrzymamy wówczas:

$$C'' = (\csc(a_1)\csc(a_2) ; \csc(b_1)\csc(b_2) ; \ldots)$$
$$A'' = (\ldots ; \csc(b_1)\csc(b_2) ; \csc(c_1)\csc(c_2))$$
$$B'' = (\csc(a_1)\csc(a_2); \ldots ; \csc(c_1)\csc(c_2))$$

Gdzie kolejność współrzędnych jest taka sama jak powyżej.

Zauważamy, że współrzędne te w rzeczywistości opisują półproste, o których wiemy, że przecinają się w środku perspektywy. Stąd wnioskujemy, że środek perspektywy ma współrzędne trójliniowe postaci:

$$\boldsymbol{(\csc(a_1)\csc(a_2) ; \csc(b_1)\csc(b_2) ; \csc(c_1)\csc(c_2))}$$

Widać, że jest on niezależny od wyboru trójkąta (T', T") i zależy jedynie od kątów a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 oraz c_2.

∎

3. Bibliografia:

- „Equilateral Chordal Triangles” Floor van Lamoen, „FORUM GEOMETRICUM Volume 2 (2002), str. 33 - 37”
- „Planimetria”, Beata Bogdańska, Adam Neugebauer