Zbiór Cantora. Diabelskie schody.

Autor: Norbert Miękina

Zespól Szkół nr 3
im. ks. prof. Józefa Tischnera
ul. Krakowska 20
32-700 Bochnia
tel. 14 612-27-79

Opiekun: mgr Barbara Góra

„W matematyce sztuka stawiania problemów jest ważniejsza od sztuki ich rozwiązywania"

Georg Cantor

Spis treści

Wstęp

Jestem uczniem pierwszej klasy technikum ekonomicznego w Zespole Szkół nr 3 im. ks. prof. Józefa Tischnera w Bochni.

Praca niniejsza dotyczy bardzo ciekawego „tworu matematycznego” pełniącego ważną rolę w wielu dziedzinach matematyki, a mianowicie zbioru Cantora i diabelskich schodów.

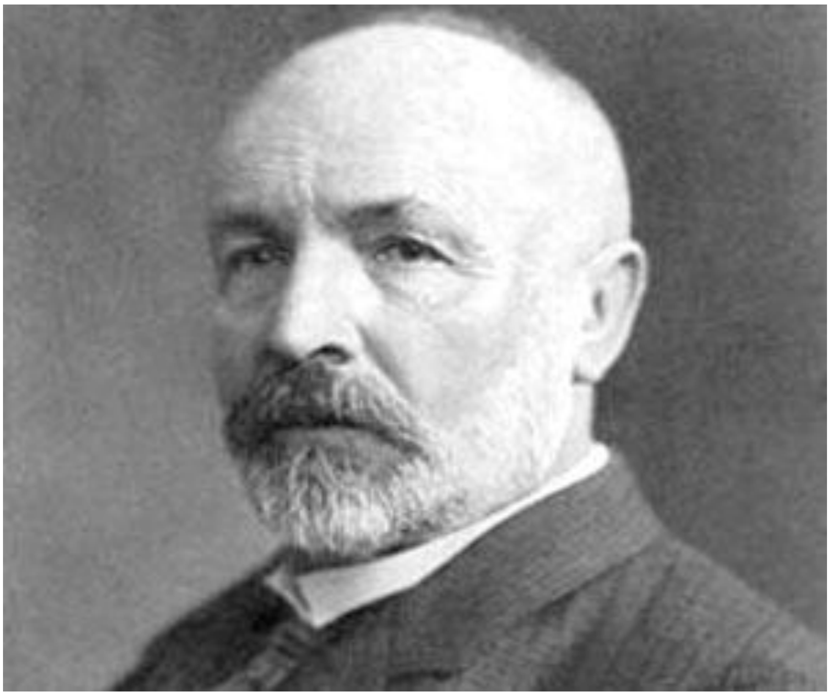
Przedstawiłem w niej konstrukcję zbioru Cantora i wykazałem,

że zbiór ten jest samopodobny. W dalszej części pracy pokazałem konstrukcję diabelskich schodów, które są ściśle związane ze zbiorem Cantora. Udowodniłem w sposób graficzny i algebraiczny, że pole powierzchni diabelskich schodów jest równe 1/2. Wykazałem także, że schody nie są samopodobne i są samoafiniczne.

Wykonałem stronę internetową przedstawiajacą zbiór Cantora oraz diabelskie schody. Przedstawione w niej animacje pomogą w lepszym zrozumieniu omawianych w niej tematów.

Stronę internetową można zobaczyć na przesłanych płytach CD.

Georg Cantor

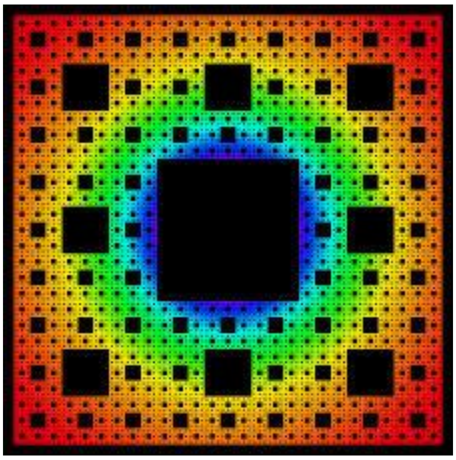


Georg Cantor (1845-1918) niemiecki matematyk, profesor uniwersytetu w Halle. Stworzył teorię mnogości, którą przedstawił w książce „Podstawy ogólnej teorii mnogości”. Pracował także nad zagadnieniem liczb rzeczywistych i w 1874 r. dowiódł że zbiór taki jest nieprzeliczalny. W 1878 sformułował pojęcie mocy zbioru, aksjomat ciągłości i inne. Śmiałe idee Cantora zostały dopiero przyjęte po pewnym czasie przez ogół matematyków, dziś jednak są podstawowym fundamentem matematyki.

Fraktale

Po raz pierwszy pojęcie fraktali zostało wprowadzone do matematyki za sprawą francuskiego matematyka i informatyka polskiego pochodzenia Benoita Mandelbrota w latach 70-tych XX wieku.
Słowo fraktal (ang. fractal) pochodzi z łaciny od słowa fractus - złamany. Nie łatwo jest popularnym językiem określić pojęcie fraktalu i ciągle jeszcze nie istnieje jego ścisła definicja. W uproszczeniu można powiedzieć, że fraktale są figurami, w których część figury jest podobna do całości. Moglibyśmy również podać przybliżoną inną definicję, że fraktal to obiekt samopodobny, o wymiarze ułamkowym lub bardziej poetycko słowami Jamesa Gleicka: Fraktal jest sposobem widzenia nieskończoności okiem duszy.

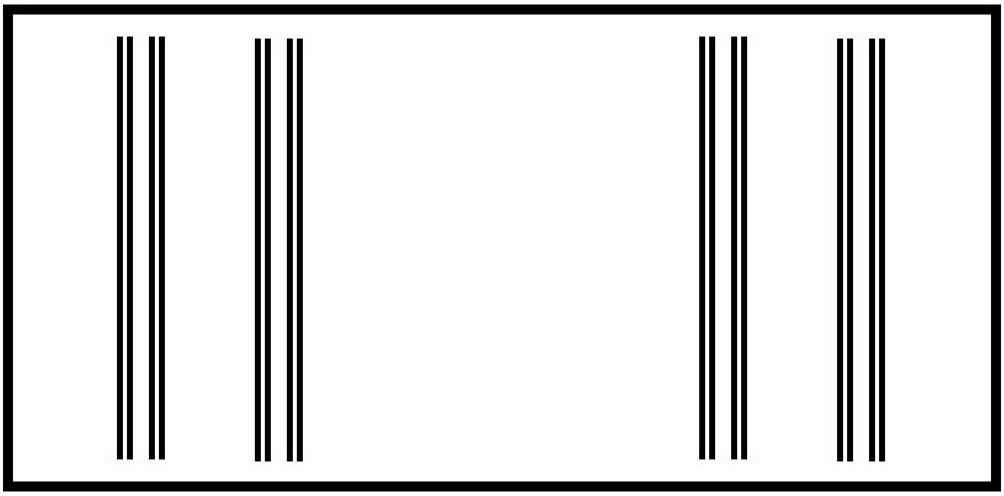
Przykłady fraktali



Zbiór Cantora

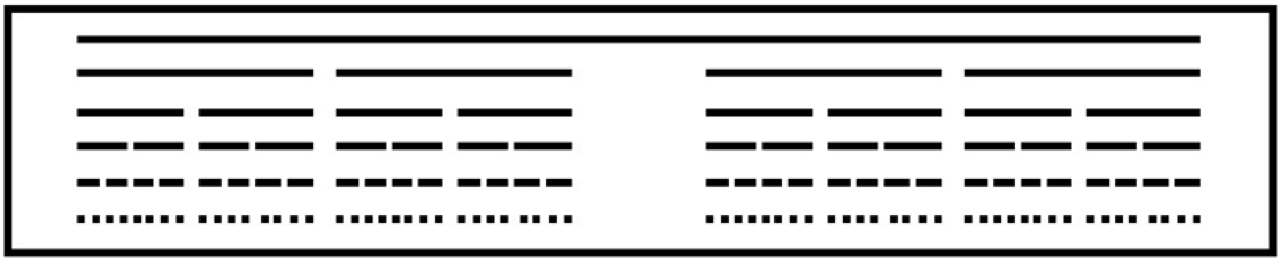
Zbiór Cantora to klasyczny fraktal mimo, że nie jest specjalnie pociągający dla oka. Podstawowy zbiór Cantora jest to nieskończony zbiór punktów odcinka jednostkowego [0,1]. Oznacza to, że możemy interpretować go jako zbiór pewnych liczb, np. 0,1, 1/3, 2/3, 1/9, 2/9, 7/9, 8/9, 1/27, 2/27, …

Jeśli chcielibyśmy zaznaczyć te, jak również pozostałe punkty tego zbioru niewiele byśmy zobaczyli. Otóż zamiast punktów, rysujmy pionowe odcinki o jednakowej długości, które zaczynać się będą we wszystkich punktach zbioru Cantora. Pozwoli to ujrzeć trochę lepiej rozkład tych punktów na odcinku. Poniższy rysunek może dać nam pewne wyobrażenie o zbiorze Cantora.



Konstrukcja zbioru Cantora

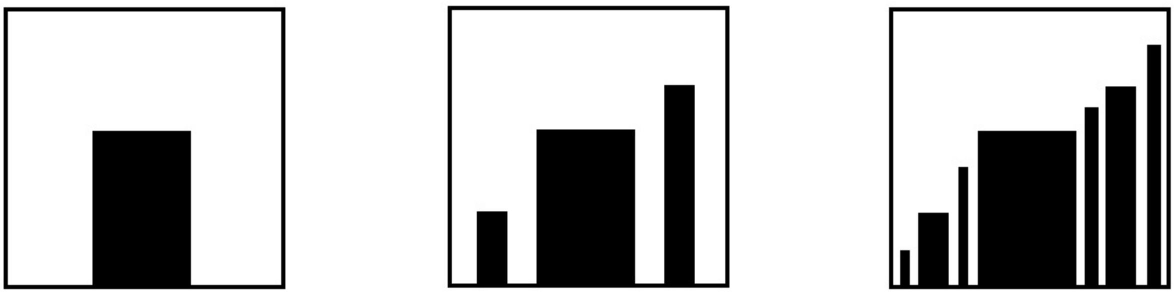
Zaczynamy od przedziału [0,1]. Następnie wyrzucamy otwarty przedział (1/3, 2/3) tzn. usuwamy środkową trzecią część przedziału [0,1] bez liczb1/3 i 2/3. Pozostaną dwa przedziały: [0, 1/3] i [2/3, 1], o długościach 1/3 każdy i kończy to podstawowy krok konstrukcji. Następnie powtarzamy krok konstrukcji w ten sposób, że z przedziałów [0, 1/3] i [2/3, 1] usuwamy środkowe części trzecie, otrzymamy więc cztery przedziały o długości 1/9 każdy. Postępujemy tak dalej. Innymi słowy jest to ciąg domkniętych przedziałów – jeden w kroku zerowym, dwa w pierwszym, cztery w drugim, osiem w trzecim itd. (tzn. 2^n przedziałów o długości $1/3^n$ każdy w n-tym kroku).
Na rysunku przedstawiona jest graficznie ta konstrukcja.



Każdy odcinek, który powstał podczas geometrycznej konstrukcji zbioru Cantora, zawiera cały zbiór Cantora pomniejszony w skali $1/3^k$, dla odpowiedniego k. Możemy zatem rozważyć zbiór Cantora jako rodziny dowolnie małych części z których każda jest pomniejszona całym zbiorem.Tą właśnie własność zbioru Cantora określamy jako samopodobieństwo.

Diabelskie schody

Diabelskie schody to fascynujący fraktal, będący krzywą fraktalną. Są ściśle związane ze zbiorem Cantora i jego konstrukcją. Zaczynamy od kwadratu o boku długości 1. Następnie zaczynamy konstruować zbiór Cantora na dolnym jego brzegu (tzn. kolejno usuwamy środkowe części trzecie, tak jak przedtem). Nad każdą usuwaną środkową częścią trzecią długości $1/3^k$ ustawiamy prostokąt o podstawie $1/3^k$ i odpowiedniej wysokości.

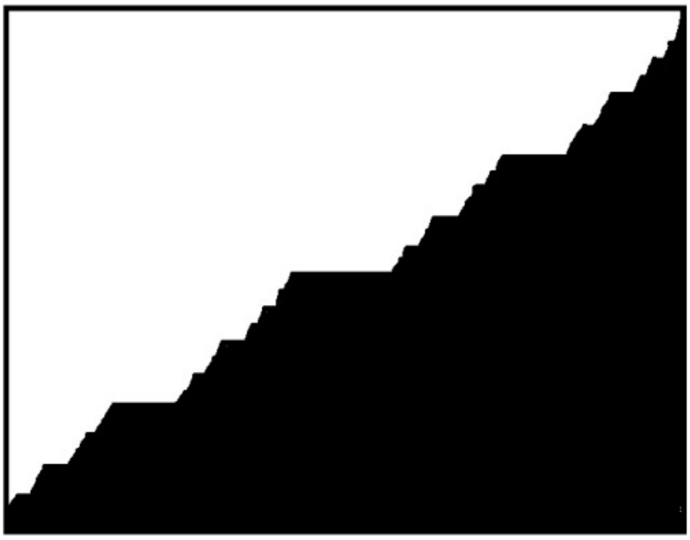


Krok 1 Krok 2 Krok 3

Kolumnowa konstrukcja diabelskich schodów

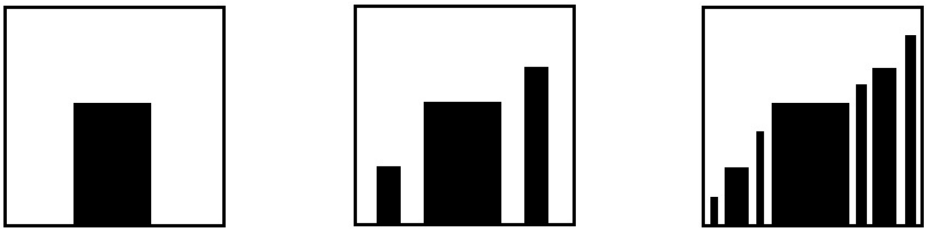
W pierwszym kroku ponad środkową częścią stawiamy prostokąt o podstawie będącej odcinkiem [1/3, 2/3] o wysokości 1/2.
W następnym kroku wznosimy dwie kolumny, jedną o wysokości 1/4 nad odcinkiem [1/9, 2/9], a drugą o wysokości 3/4 nad odcinkiem [7/9, 8/9]. W trzecim kroku stawiamy cztery prostokąty o wysokościach 1/8, 3/8, 5/8, 7/8, a w k- tym kroku stawiamy 2^{k-1} prostokątów o wysokościach odpowiednio $1/2^k$, $3/2^k$, …, $(2k-1)/2^k$. W granicy otrzymamy obiekt zwany diabelskimi schodami.
Na rysunku poniżejwidać jego przybliżony obraz otrzymany przy użyciu komputera. Możemy zobaczyć coś jakby wznoszące się z lewa na prawo schody o nieskończonej liczbie stopni,których wysokość staje się nieskończenie mała.

Kompletne diabelskie schody



W miarę procesu konstrukcji dostajemy dwie części: górną białą i dolną czarną. W granicy będą one symetryczne. Biała część będzie kopią części czarnej obróconej o kąt 180^{o}.

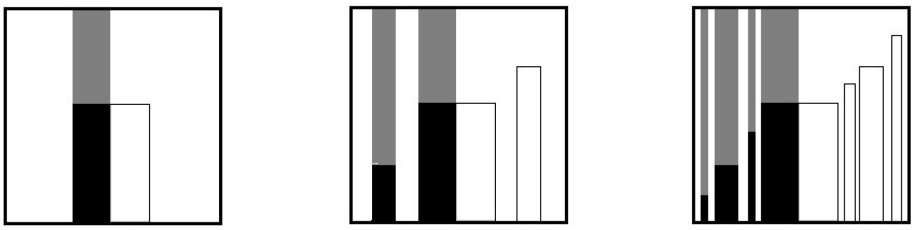
Pole powierzchni diabelskich schodów



Krok 1 Krok 2 Krok 3

Przyjrzyjmy się jeszcze raz konstrukcji diabelskich schodów.

Widzimy, że dwa wąskie prostokąty o szerokości 1/9 w drugim kroku tworzą jeden prostokąt o wysokości 1. Podobnie cztery prostokąty o szerokości 1/27 w kroku trzecim tworzą dwa prostokąty o wysokości 1 itd. Oznacza to, że jeśli przeniesiemy prostokąt z prawej części kwadratu na lewą i podzielimy środkowy prostokąt na dwa oraz ustawimy jego części jedna nad drugą, to otrzymamy figurę, która w granicy wypełni połowę kwadratu.



Krok 1 Krok 2 Krok 3

W przypadku diabelskich schodów możemy sprawdzić powyższe rozumowanie algebraicznie. Jeżeli będziemy łączyć prostokąt tak, jak na rysunku powyżej, to całkowite pole schodów A można wyrazić w następujący sposób przy użyciu szeregu geometrycznego:

$$A = \frac{1}{3} * \frac{1}{2} + \frac{1}{9} * \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{27} * \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{5}{8} + \frac{7}{8}\right) + \ldots$$

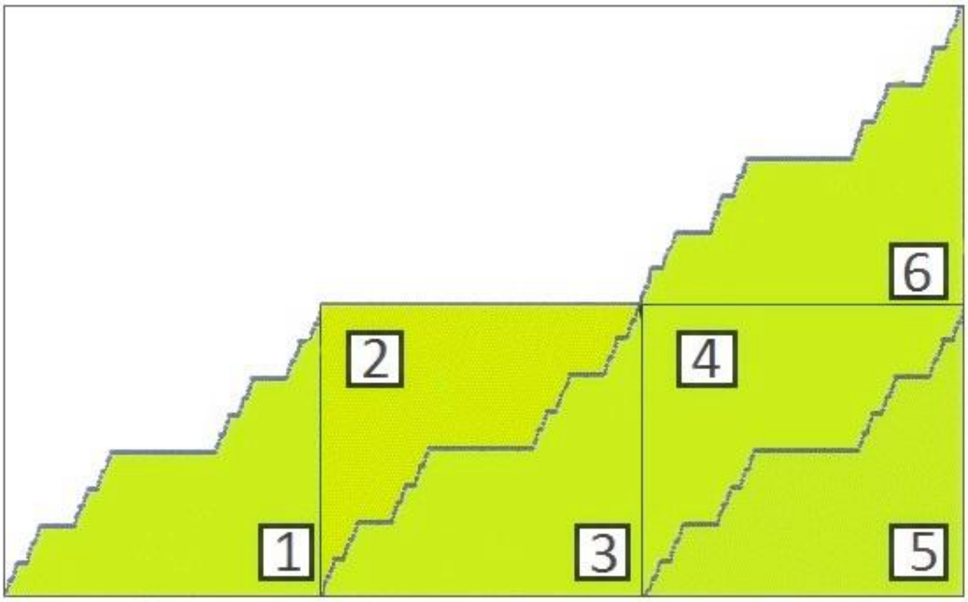
$$A = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} * \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \cdots + \frac{2^k}{3^k} + \cdots\right)$$

Suma szeregu geometrycznego w nawiasie wynosi 3.

Otrzymujemy więc:

$$A = \frac{1}{6} + \frac{3}{9} = \frac{1}{2}$$

Samoafiniczność diabelskich schodów



Diabelskie schody nie są samopodobne. Aby pokazać przyjrzyjmy się rysunkowi powyżej. Diabelskie schody można rozbić na sześć identycznych części. Część 1 otrzymano z całych schodów, pomniejszonych trzykrotnie w kierunku poziomym, a dwukrotnie w kierunku pionowym (a zatem współczynniki zmniejszania w różnych kierunkach nie są takie same). Dlatego też obiekt ten nie jest samopodobny. Część 6 jest dokładnie taka sama jak część 1. Co więcej prostokąt o bokach długości 1/3 i 1/2 mieści w sobie dokładną kopię części 1, również kopię tej części obróconą o 180 stopni. Opisuje to część 2, 3, 4 i 5. Przekształcenie zwężające pomniejszające w różnej skali w kierunku poziomym i pionowym jest szczególnym przypadkiem przekształcenia afinicznego. Obiekty, które są zbudowane z afinicznych kopii całości nazywają się samoafiniczne. Tak więc przykładem takiego obiektu są właśnie diabelskie schody.

Bibliografia

1. H. O. Peintgen, H. Jurgens, D. Saupe: „Granice chaosu.Fraktale.”
   PWN Warszawa 1997
2. Jacek Kudrewicz: „Fraktale i chaos”
   Wydawnictwo WNT 1996