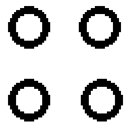
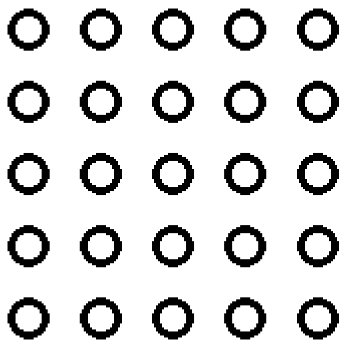
Okręgi na skończonej płaszczyźnie

Mateusz Janus

Skończona płaszczyzna, to płaszczyzna zawierająca skończoną liczbę punktów. Punkty utożsamiamy z parami liczb, które są resztami z dzielenia przez ustaloną liczbę naturalną $n \geq 2$. Na przykład



to płaszczyzna modulo 2 (zawiera 4 punkty), a



to płaszczyzna modulo 5 (zawiera 25 punktów)

Uwaga. Dla ustalonej liczby n, zdefiniowana wyżej płaszczyzna zawiera n^2 punktów.

Naszym pierwszym celem jest wprowadzenie odległości na takiej płaszczyźnie.

Najpierw wypiszemy cechy odległości. Jest to przyporządkowanie parze punktów liczb nieujemnych.

dist : {para punktów} → $\mathbb{R}_0^+$.

Dodatkowo muszą być spełnione pewne warunki (które nazywamy aksjomatami długości)

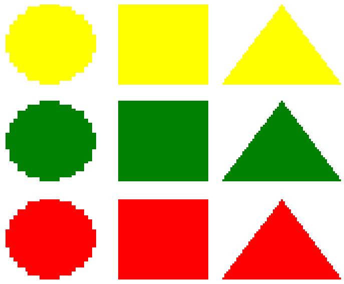
A1. dist (P,Q) = 0 wtedy i tylko wtedy, gdy P =Q

A2. dist (P,Q) = dist (Q,P)

A3. dist (P,Q) ≤ dist (P,R) + dist (R,Q)

Ostatni warunek nosi nazwę nierówność trójkąta. Jest on intuicyjnie oczywisty. Odległość bezpośrednio z punktem P do Q powinna być nie większa niż odległość przy przejściu przez punkt R.

Na zajęciach w szkole rozpatrywaliśmy płaszczyzn dziewięciu punktów. Każdy punkt miał kolor i kształt. Punkty były ułożone jak na rysunku poniżej.



Rozważaliśmy odległość zadaną następująco:

dist (P,Q) = liczba cech, którymi różnią się punkty P i Q.

Na przykładzie

dist ( ,) = 1,

gdyż punkty różnią się tylko kolorem.

Natomiast

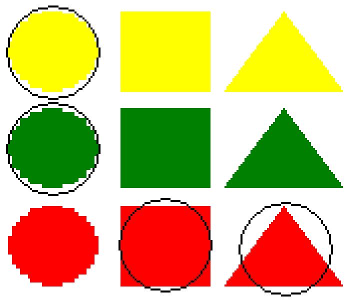
dist ( , ) = 2

gdyż punkty różnią się jedną cechą.

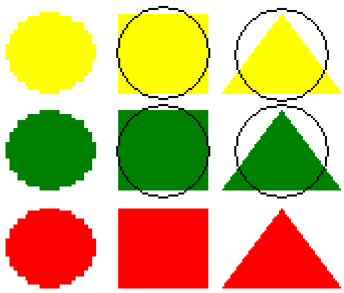
Zauważmy, że w tej sytuacji odległość punktów jest równa, co najwyżej 2.

Można zauważyć, że zachodzi warunek A3.

Na poniższym rysunku zaznaczono okrąg o środku  i o promieniu 1.



Natomiast na następnym rysunku zaznaczono okrąg o tym samym środku i promieniu 2.



Tę samom odległość można wprowadzić na współrzędnych punktów wziętych ze zbioru reszt przy dzieleniu przez 3 {0,1,2}

Można to zrobić na dwa sposoby.

1 Sposób

$$dist\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \begin{cases} 2\ jeśli\ x_1 \neq x_2\ i\ y_1 \neq y_2 \\ 1\ jeśli (x_1 \neq x_2\ i\ y_1 = y_2) lub\ (x_1 = x_2\ i\ y_1 \neq y_2) \\ 0\ jeśli\ x_1 = x_2\ i\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

2 Sposób

Pomocniczo dla liczby a, ze zbioru reszt reszt $\{0,1, \dots, n-1\}$ przy dzieleniu przez n wprowadzamy nowy symbol

$$< a >_n = \begin{cases} a, jeśli\ a \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ n - a, jeśli\ a \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \end{cases}$$

Gdzie $\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor$oznacza zaokrąglenie dolne ilorazu p przez q, a $\left\lceil \frac{p}{q} \right\rceil$ oznacza zaokrąglenie górne.

Przykład:

1. $\left\lceil \frac{7}{2} \right\rceil = 4$ i $\left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor = 3$

2. Dla n równego 6

$$< 2 >= 2 \qquad \text{i} \qquad < 4 >= 2$$

Korzystając z tego symbolu mamy

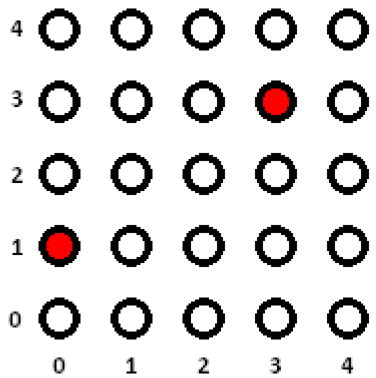
$$dist\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) =< |x_1 - x_2| > +< |y_1 - y_2|$$

Dla większych wartości n, obie te definicje uogólniają w różny sposób.

Przy pierwszej definicji odległość punktów na płaszczyźnie pozostaje nie większa od 2. Przy drugiej definicji odległość przyjmuje wartości od 0 do $2 \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

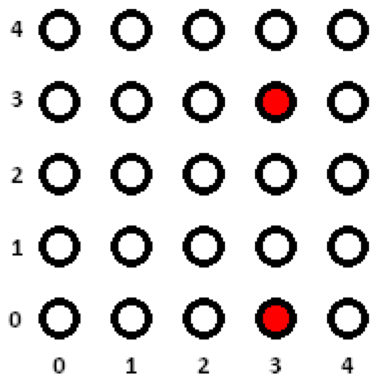
Przykłady dla modulo 5 i modulo 6

1 Sposób



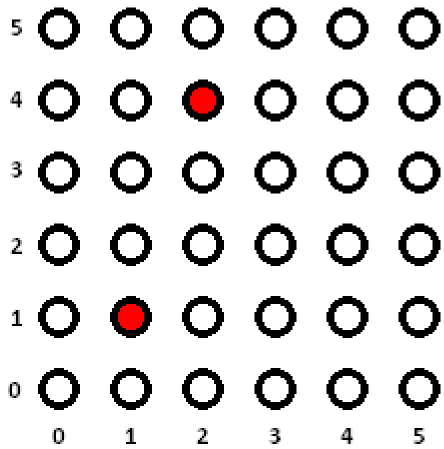
$dist((0,1), (3,3)) = 2$

gdyż 0≠3 i 1≠3



$dist\big((3,0), (3,3)\big) = 1$

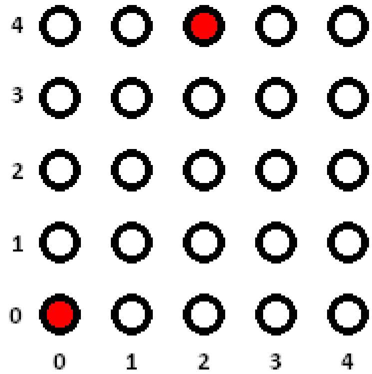
gdyż 3=3 i 0≠3



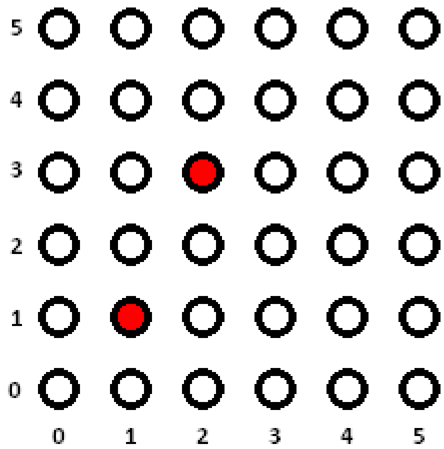
$dist((1,1),(2,4)) = 2$

gdyż $1 \neq 2$ i $1 \neq 4$

2 Sposób



$dist\ ((0,0),(2,4)) = < |0-2| > + < |0-4| > = < 2 > + < 4 > = 2 + 5 - 4 = 3$



$dist((1,1),(2,3)) = < |1-2| > + < |1-3| > = 1 + 2 = 3$

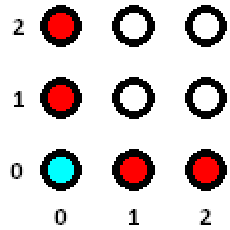
Następnym naszym zadaniem będzie scharakteryzowanie okręgów na skończonej płaszczyźnie używając dwóch wcześniejszych sposobów określania odległości.

Okrąg to zbiór punktów równo odległych od środka okręgu.

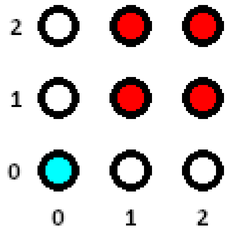
1 Sposób

Modulo 3

Środek okręgu (0,0)



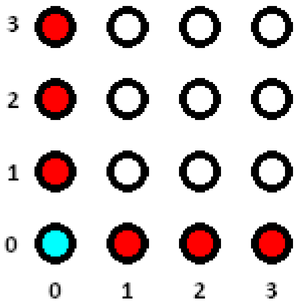
$r = 1$



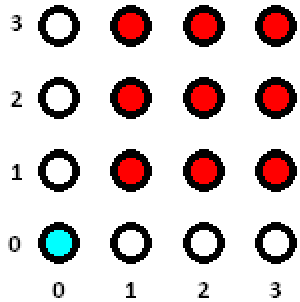
$r = 2$

Modulo 4

Środek okręgu (0,0)



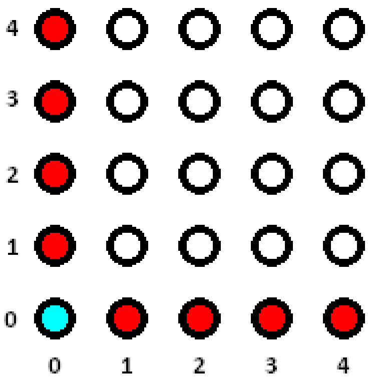
$r = 1$



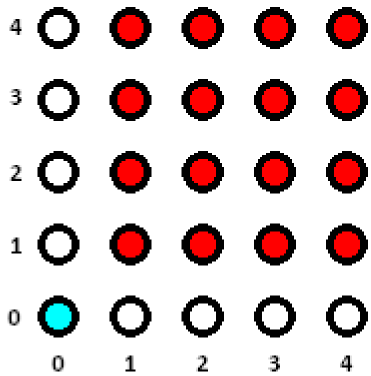
$r = 2$

Modulo 5

Środek okręgu (0,0)



$r = 1$



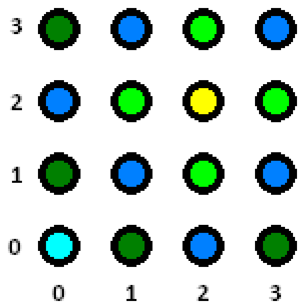
$r = 2$

Można zauważyć regułe, że dla modulo n okrąg o promieniu 1 zawiera $2n - 2$ punktów, a o promieniu 2 zawiera $(n-1)^2$ punktów.

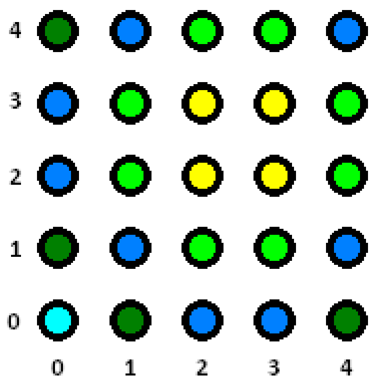
2 Sposób

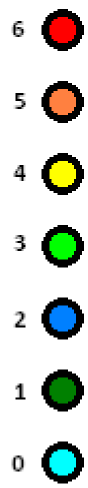
Drugi sposób różni się od pierwszego dopiero gdy używamy modulo 4 lub więcej. Różni się tym, że na nim możemy znaleść większe odległości niż 2.

Kolejne okręgi na modulo 4



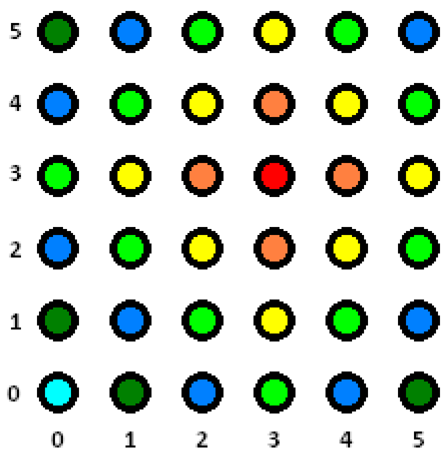
Kolejne okręgi na modulo 5





Oznaczenia kolejnych okręgów według długości promienia

Kolejne okręgi na modulo 6



Ostatnim naszym zadaniem będzie sprawdzenie możliwości przecięć okręgów na skończonej płaszczyźnie. Nie będziemy brali pod uwage dwuch okręgów otym samym promieniu i środku.

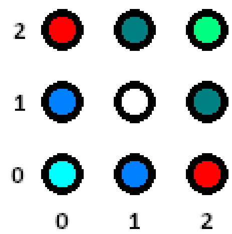
Przecięciem dwóch okręgów jest każdy punkt wspólny danych okręgów.

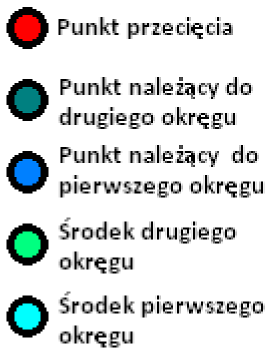
Sposób 1

Okręgi w sposobie pierwszym są mniej ciekawe niż w drugim, ponieważ dla każdego modulo n dostajemy okręgi o promieniu 1 i 2.

Mamy kilka możliwych ułożeń okręgów:

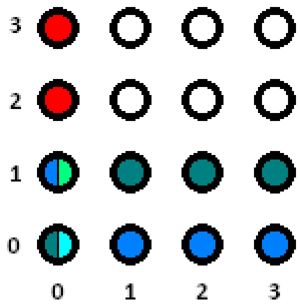
Kiedy odległość między środkami jest równa 2, a promienie obu okręgów są równe 1.





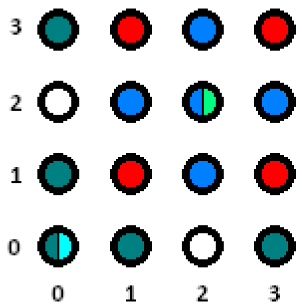
Dla dowolnej liczby n, zawsze otrzymujemy 2 przecięcia.

Kiedy odległość między środkami jest równa 1, a promienie obu okręgów są równe 1.



Dla dowolnej liczby n, zawsze otrzymujemy $n - 2$ przecięć.

Kiedy odległość między środkami jest równa 2, a promienie obu okręgów są równe 2.

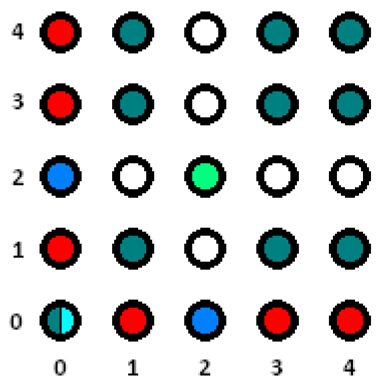


Dla dowolnej liczby n, zawsze otrzymujemy $(n-2)^2$ przecięć.

Kiedy odległość między środkami jest równa 1, a promienie obu okręgów są równe 2.

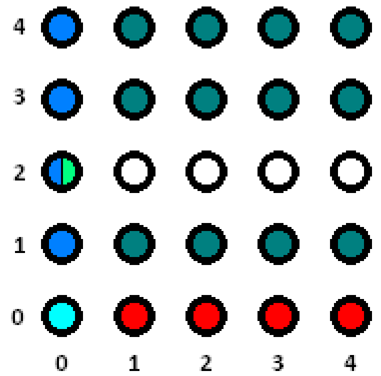
Dla dowolnej liczby n, zawsze otrzymujemy $(n-2)(n-1)$ przecięć.

Kiedy odległość między środkami jest równa 2, a promienie obu okręgów są różne.



Dla dowolnej liczby n, zawsze otrzymujemy $2n-4$ przecięć.

Kiedy odległość między środkami jest równa 1, a promienie obu okręgów są różne.



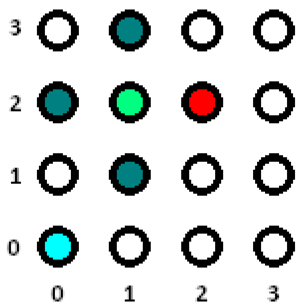
Dla dowolnej liczby n, zawsze otrzymujemy $n-1$ przecięć.

Sposób 2

Przecięcia na modulo 4

Na modulo 4 możliwe są przecięcia maksymalnie w sześciu punktach w przeciwieństwie do okręgów na płaszczyźnie eukledisowej.

Przecięcie w jednym punkcie:

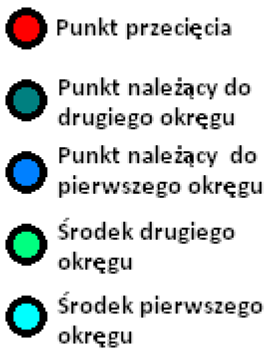


Środek 1: (0,0)

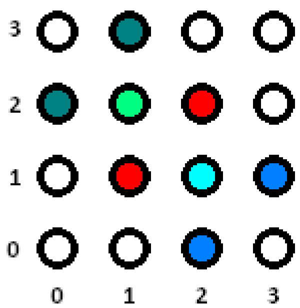
Promień 1: 4

Środek 2: (1,2)

Promień 2: 1



Przecięcia w dwóch punktach:



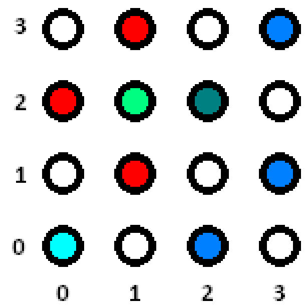
Środek 1: (2,1)

Promień 1: 1

Środek 2: (1,2)

Promień 2: 1

Przecięcia w trzech punktach:



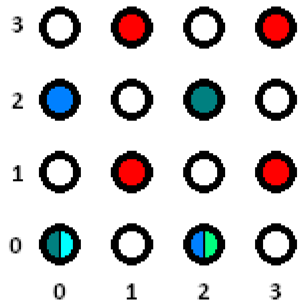
Środek 1: (0,0)

Promień 1: 2

Środek 2: (1,2)

Promień 2: 1

Przecięcia w czterech punktach:



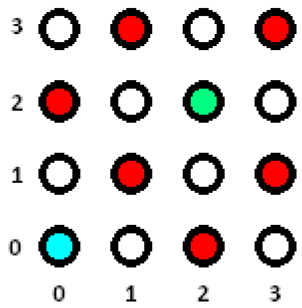
Środek 1: (0,0)

Promień 1: 2

Środek 2: (2,0)

Promień 2: 2

Przecięcia w sześciu punktach:

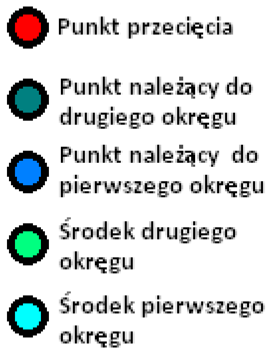


Środek 1: (0,0)

Promień 1: 2

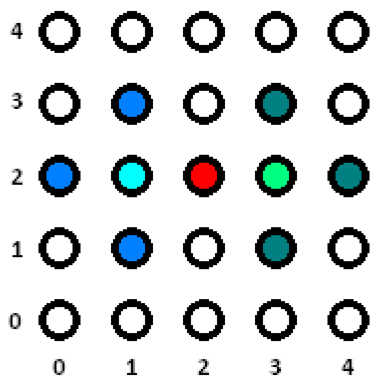
Środek 2: (2,2)

Promień 2: 2



Na modulo 5 możliwe są przecięcia maksymalnie w czterech punktach.

Przecięcie w jednym punkcie:



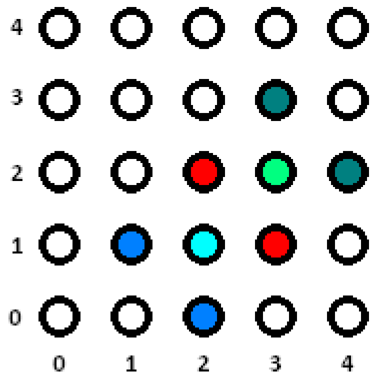
Środek 1: (1,2)

Promień 1: 1

Środek 2: (3,2)

Promień 2: 1

Przecięcia w dwóch punktach:



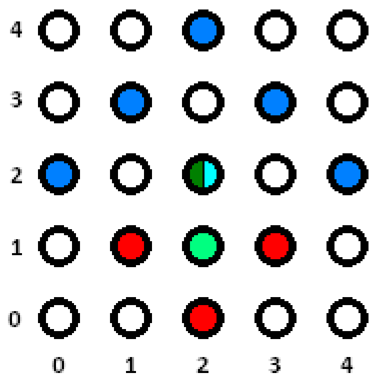
Środek 1: (2,1)

Promień 1: 1

Środek 2: (3,2)

Promień 2: 1

Przecięcia w trzech punktach:

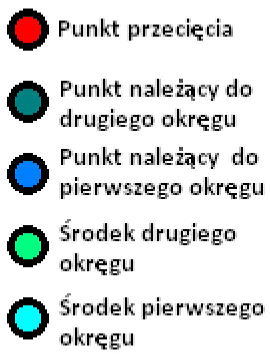


Środek 1: (2,2)

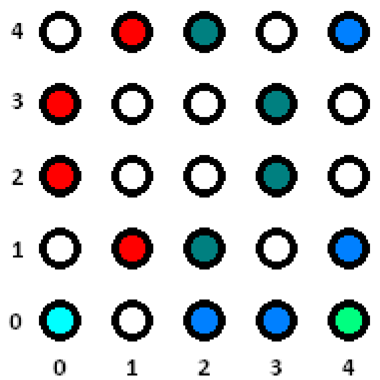
Promień 1: 2

Środek 2: (2,1)

Promień 2: 1



Przecięcia w czterech punktach:



Środek 1: (0,0)

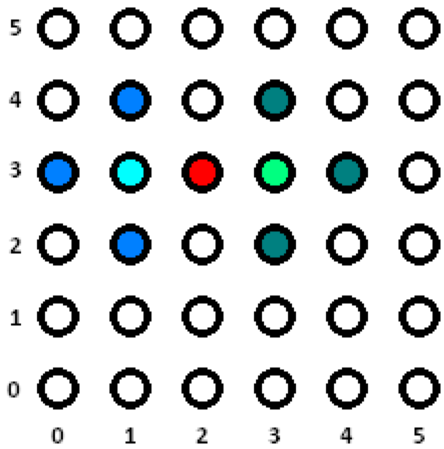
Promień 1: 2

Środek 2: (4,0)

Promień 2: 3

Na modulo 6 możliwe są przecięcia maksymalnie w czterech punktach.

Przecięcie w jednim punkcie:



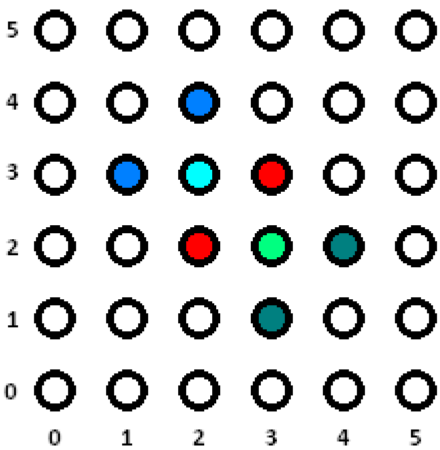
Środek 1: (1,3)

Promień 1: 1

Środek 2: (3,3)

Promień 2: 1

Przecięcia w dwóch punktach:

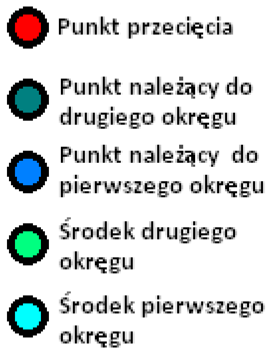


Środek 1: (2,3)

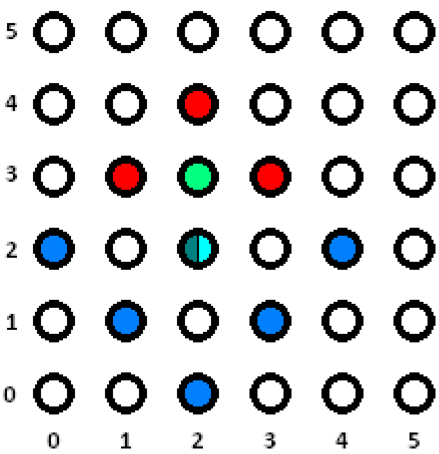
Promień 1: 1

Środek 2: (3,2)

Promień 2: 1



Przecięcia w trzech punktach:



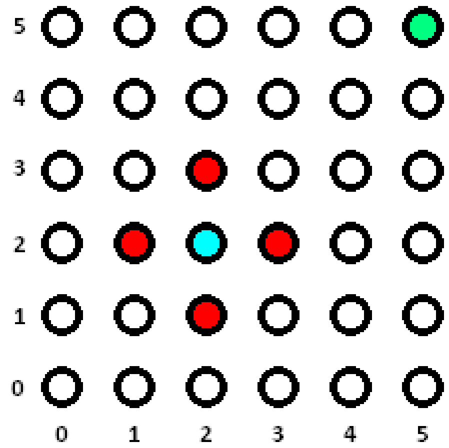
Środek 1: (2,2)

Promień 1: 2

Środek 2: (2,3)

Promień 2: 1

Przecięcia w czterech punktach:



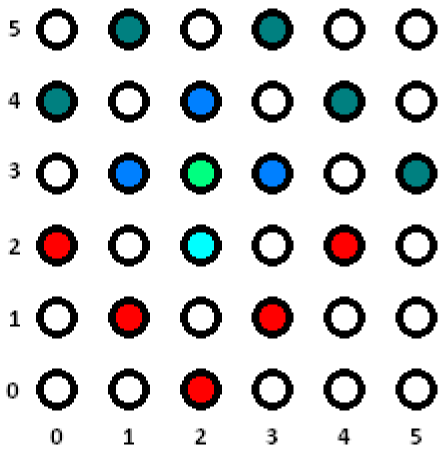
Środek 1: (2,2)

Promień 1: 1

Środek 2: (5,5)

Promień 2: 5

Przecięcia w pięciu punktach:

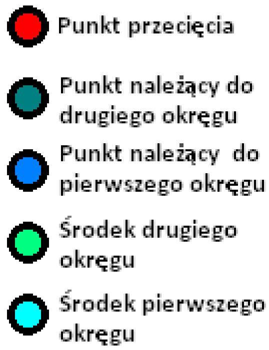


Środek 1: (2,2)

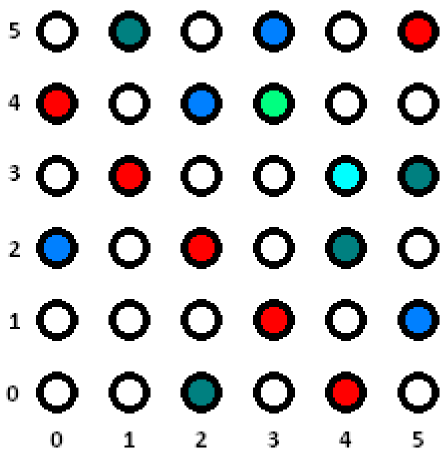
Promień 1: 2

Środek 2: (2,3)

Promień 2: 3



Przecięcia w sześciu punktach:



Środek 1: (4,3)

Promień 1: 3

Środek 2: (3,4)

Promień 2: 3