Gimnazjum nr 17 im. Artura Grottgera w Krakowie

ul. Litewska 34,

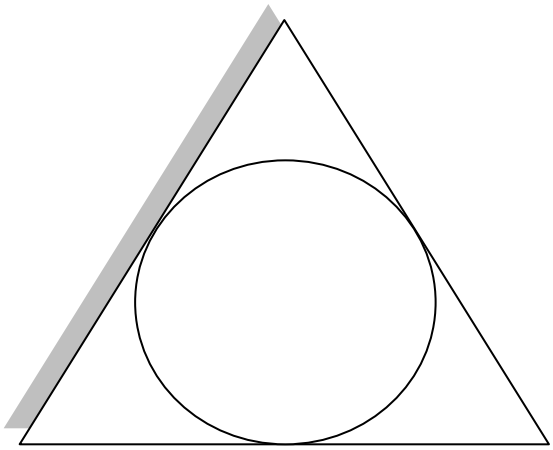
30-014 Kraków,

Tel. (12) 633- 59-12

Justyna Więcek, Artur Leśniak

Znajdowanie analogii w geometrii płaskiej i przestrzennej

opiekun pracy: mgr Dorota Szczepańska



Kraków, marzec 2014

Spis treści:

Twierdzenie o polu trójkąta ……str. 3

Twierdzenie o polu wielokąta ……str. 4

Twierdzenie o objętości czworościanu……str.6

Twierdzenie o objętości wielościanu……str.7

Zależność między promieniem okręgu wpisanego w trójkąt, a promieniami okręgów dopisanych……..str.8

Zależność między promieniem kuli wpisanej w ostrosłup, a promieniami kul dopisanych……str.9

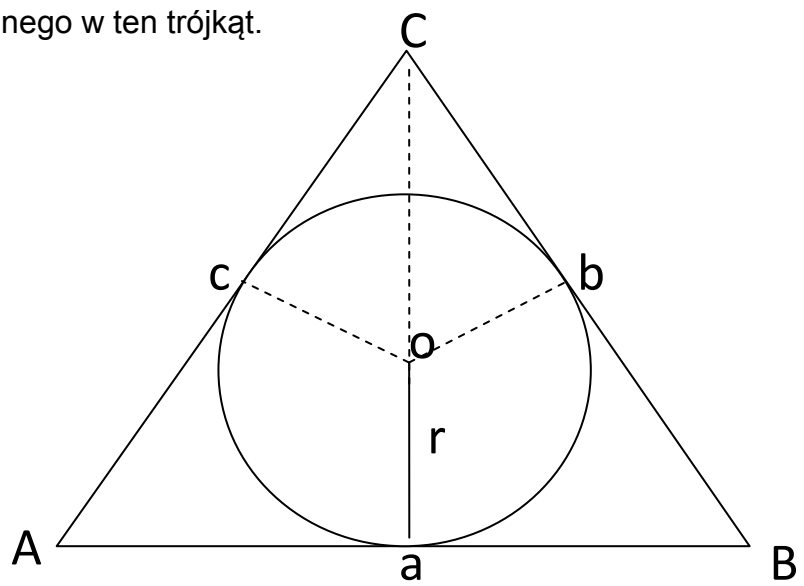
Bibliografia……str.10

W tej pracy przedstawimy niektóre twierdzenia z geometrii płaskiej i poszukamy ich uogólnień w przestrzeni. Najpierw przejrzałam (Justyna Więcek) książkę pt.”Matematyka w zadaniach dla kandydatów na wyższe uczelnie” W. Leksiński, B. Macukow, W. Żakowski i zainteresowało mnie w niej twierdzenie o polu trójkąta zamieszczone w naszej pracy pod numerem 1. Potem moja pani od matematyki podpowiedziała mi, że prawdziwe może być ono także dla dowolnego wielokąta, w który da się wpisać okrąg (twierdzenie 2). Namówiłam kolegę (Artura Leśniaka) i zabraliśmy się do dowodzenia tych twierdzeń. Okazało się to niezbyt trudne. Tę część pracy wykonaliśmy samodzielnie. W innej książce pt.” Program SMART komponent 04 ARKA Matematyka, Figury płaskie i przestrzenne” przeczytaliśmy, że twierdzenie 1 łatwo uogólnia się do twierdzenia z geometrii przestrzeni o czworościanie , w który da się wpisać kulę (twierdzenie 3). W książce tej nie było dowodu, więc wykonaliśmy go sami. Pomyśleliśmy, że może i twierdzenie 2 łatwo się uogólnia i powstało twierdzenie 4. Dowód był zupełnie analogiczny do dowodu twierdzenia 3. W tej samej książce na następnej stronie autorzy podali inne twierdzenie dotyczące trójkąta i zależności między promieniem okręgu wpisanego, a promieniami okręgów dopisanych (twierdzenie 5). Autorzy napisali, że ten fakt również uogólnia się do twierdzenia w przestrzeni (twierdzenie 6), ale nie podali dowodów. My wykonaliśmy je z pomocą pani Doroty Szczepańskiej i wskazówki wziętej z książki H. S. Coxetera „Z geometrii dawnej i nowej”. To już nie było takie proste. Zacznijmy więc:

Jednym z faktów z geometrii płaskiej jest dość znane twierdzenie o trójkącie:

Twierdzenie 1

Pole trójkąta jest równe iloczynowi połowy jego obwodu i długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

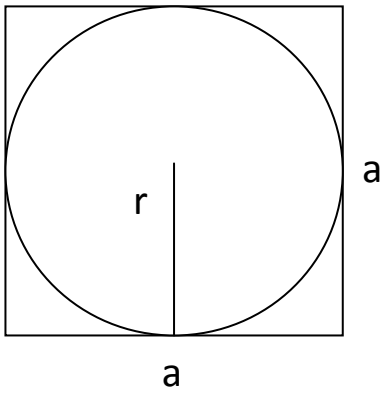


$$P_{\Delta ABC} = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$

Dowód:

$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta ABO} + P_{\Delta BCO} + P_{\Delta CAO} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(a+b+c)r$$

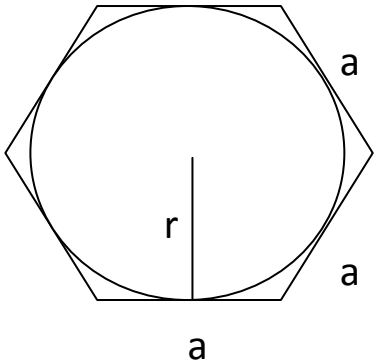
Ten wzór jest też prawdziwy dla wszystkich wielokątów płaskich w które można wpisać okrąg. Pokażemy to najpierw na przykładach kwadratu, sześciokąta foremnego i rombu, a następnie udowodnimy w przypadku ogólnym tzn. dla dowolnego wielokąta, w który daje się wpisać okrąg:



$r = \frac{1}{2}a$

$P = a^2,$ połowa obwodu w tym przypadku to $2a$

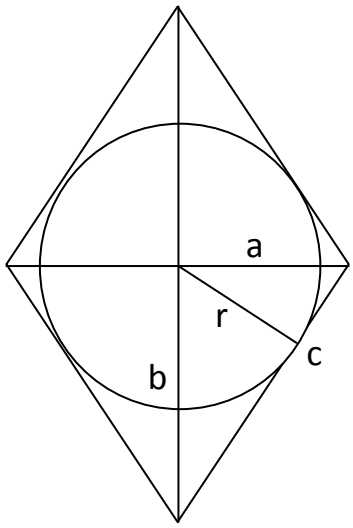
$P = \frac{1}{2}a \cdot 2a = a^2$



$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$P = 6 \cdot a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3 \cdot a^2\sqrt{3}}{2}$

$P = r \cdot 3a = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot 3a = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

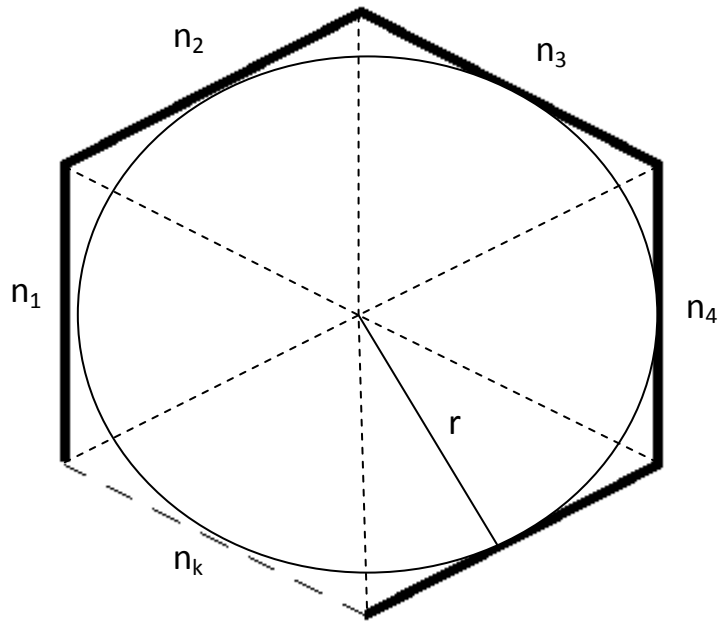


Pole jednego z czterech trójkątów

$P_\Delta = \frac{1}{2}rc$

$P_{rombu} = 2rc,$ gdzie $2c$ jest połową obwodu

Weźmy dowolny wielokąt, w który można wpisać okrąg. Podzielmy go na trójkąty tak jak na rysunku:



Każdy z tych trójkątów ma wysokość r. Pole wielokąta równe jest sumie pól tych trójkątów.

$$P_{wielokąta} = \frac{1}{2}n_1 r + \frac{1}{2}n_2 r + \frac{1}{2}n_3 r + \cdots \frac{1}{2}n_k r = \frac{1}{2}(n_1 + n_2 + \cdots n_k)r$$

Udowodniliśmy:

Twierdzenie 2

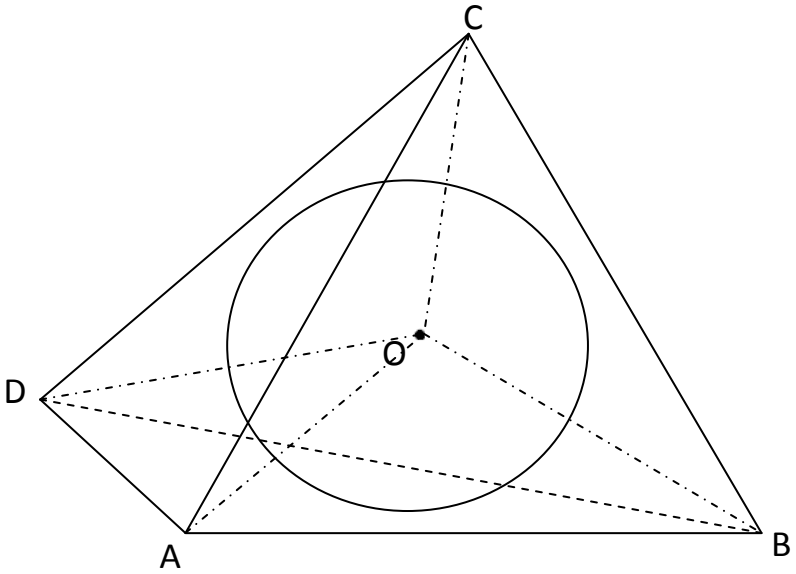
Pole wielokąta, w który da się wpisać okrąg, jest równe iloczynowi połowy jego obwodu i długości promienia tego okręgu.

Zastanówmy się, czy te twierdzenia da się uogólnić do twierdzeń dotyczących geometrii przestrzeni. W twierdzeniu 1 trójkąt można by zastąpić czworościanem, a okrąg sferą (lub kulą).

Twierdzenie 3

Objętość czworościanu, w który da się wpisać kulę jest równa iloczynowi trzeciej części jego pola powierzchni i długości promienia tej kuli.

Dowód:



$S - pole\ powierzchni\ ostrosłupa$

$R - promień\ kuli\ wpisanej\ w\ ostrosłup$

Objętość czworościanu ABCD jest równa sumie objętości czterech ostrosłupów o podstawach będących ścianami czworościanu, o wysokościach równych R i o wspólnym wierzchołku O.

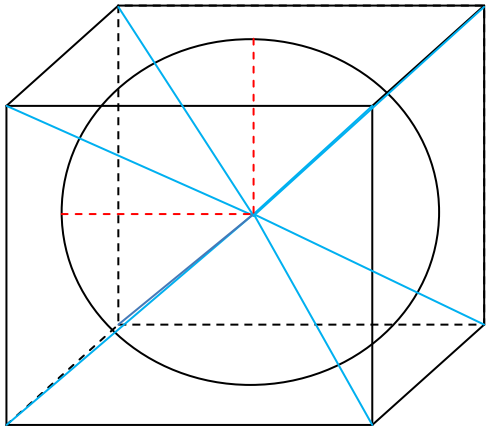
$$V = \frac{1}{3}P_{\Delta ABC}R + \frac{1}{3}P_{\Delta BCD}R + \frac{1}{3}P_{\Delta DCA}R + \frac{1}{3}P_{DAB}R =$$

$$= \frac{1}{3}(P_{\Delta ABC} + P_{\Delta BCD} + P_{\Delta DCA} + P_{DAB}) \cdot R = \frac{1}{3}SR$$

Twierdzenie w przestrzeni, trochę zmodyfikowane okazało się prawdziwe.

Czy tak samo będzie z uogólnieniem twierdzenia dla wielokąta? Idea dowodu wydaje się nie ulegać zmianie także dla wielościanu z wpisaną kulą.

Niech $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ będzie polem powierzchni dowolnego wielościanu, w który da się wpisać kulę, a $S_1, S_2, \ldots S_n$ polami jego poszczególnych ścian. Objętość wielościanu można przedstawić jako sumę objętości ostrosłupów, z których każdy ma podstawę, będącą ścianą wielościanu, wysokość to promień kuli wpisanej w ten wielościan, a wierzchołek to środek tej kuli. Na rysunku jest to pokazane w sześcianie:



$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$, gdzie V jest objętością całej bryły, a $V_1, V_2, \ldots, V_n$ są objętościami poszczególnych ostrosłupów.

$V_i = \frac{1}{3} \cdot S_i \cdot R$ dla każdego ostrosłupa,

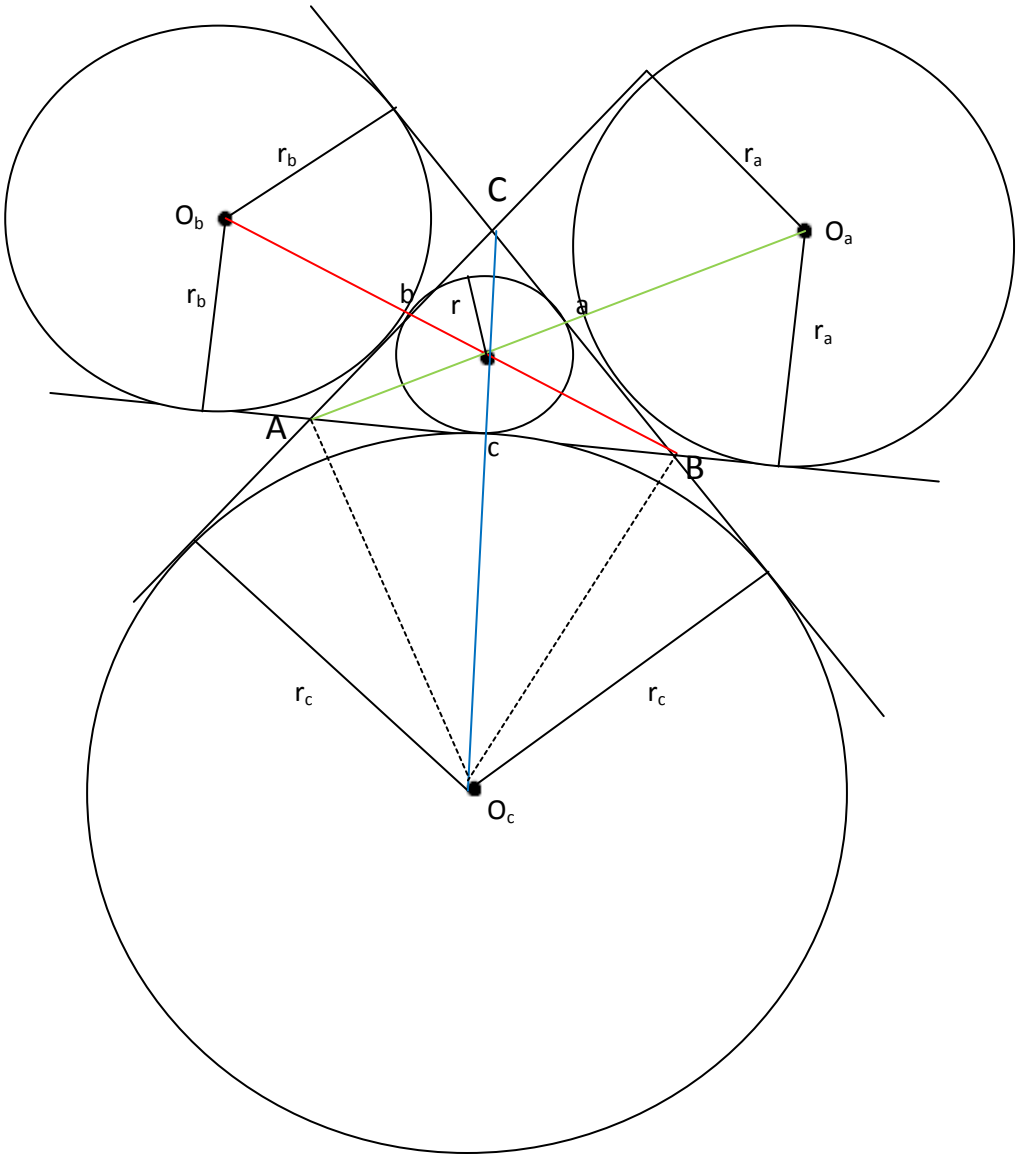
$$V = \frac{1}{3} \cdot S_1 \cdot R + \frac{1}{3} \cdot S_2 \cdot R + \cdots + \frac{1}{3} \cdot S_n \cdot R = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \cdots + S_n) \cdot R = \frac{1}{3} \cdot S \cdot R$$

Udowodniliśmy:

Twierdzenie 4

Objętość wielościanu, w który da się wpisać kulę jest równa iloczynowi trzeciej części jego pola powierzchni i długości promienia tej kuli.

W książce „Program SMART komponent 04" znaleźliśmy również inną własność z geometrii płaskiej dotyczącą trójkąta, a właściwie promieni okręgów: wpisanego w ten trójkąt r, i dopisanych do trójkąta: r_a, r_b, r_c . Sytuację ilustruje rysunek:



Sprawdźmy, czy prawdziwe jest:

<u>Twierdzenie 5</u>

Jeśli dany jest trójkąt ABC i wpisany w niego okrąg o promieniu r, i okręgi dopisane do trójkąta (styczne do jednego z boków i przedłużeń pozostałych dwóch) o promieniach r_a, r_b, r_c to prawdziwy jest wzór:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

Dowód:

Przyjrzyjmy się trójkątom BCO_c, ACO_c, ABO_c i ich polom:

$$P_{\Delta BCO_c} = \frac{1}{2} a \cdot r_c$$

$$P_{\Delta ACO_c} = \frac{1}{2} b \cdot r_c$$

$$P_{\Delta ABO_c} = \frac{1}{2} c \cdot r_c$$

$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta BCO_c} + P_{\Delta ACO_c} - P_{\Delta ABO_c} = \frac{1}{2} a \cdot r_c + \frac{1}{2} b \cdot r_c - \frac{1}{2} c \cdot r_c = \frac{1}{2}(a+b-c) \cdot r_c \qquad (1)$$

Ale z twierdzenia 1 wynika, że:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{a+b+c}{2} \cdot r \qquad (2)$$

Porównujemy (1) i (2):

$$\frac{a+b+c}{2} \cdot r = \frac{1}{2}(a+b-c) \cdot r_c$$

po przekształceniach:

$$\frac{1}{r_c} = \frac{a+b-c}{(a+b+c)r}$$

analogicznie: $\frac{1}{r_a} = \frac{b+c-a}{r(a+b+c)}$, $\frac{1}{r_b} = \frac{a+c-b}{r(a+b+c)}$

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{b+c-a}{r(a+b+c)} + \frac{a+c-b}{r(a+b+c)} + \frac{a+b-c}{(a+b+c)r} = \frac{a+b+c}{(a+b+c)r} = \frac{1}{r}$$

Czy prawdziwe będzie analogiczne twierdzenie w przestrzeni ? Czy gdyby w dowolny czworościan wpisać kulę i dopisać do ścian, lub płaszczyzn, w które przechodzą ściany kule, prawdziwy byłby podobny wzór ? Okazuje się, że tak. Nie podejmujemy się zrobić odpowiedniego rysunku, ale niech R będzie promieniem kuli wpisanym w czworościan, a R_1, R_2, R_3, R_4 promieniami kul dopisanych do tego czworościanu (do ściany ABC, ABD, BCD i ACD). Rozważając kulę styczną zewnętrznie do ściany ABC (o promieniu R_1). Wysokość R_1 mają również trzy ostrosłupy pochyłe o podstawach w pozostałych ścianach czworościanu. Jeśli od sumy ich objętości odejmiemy objętość ostrosłupa opartego na ABC to otrzymamy objętość czworościanu ABCD. Z twierdzenia 3 jest ona równa:

$$V = \frac{1}{3} SR$$

$$\frac{1}{3} SR = \frac{1}{3} P_{\Delta ABD} \cdot R_1 + \frac{1}{3} P_{\Delta BCD} \cdot R_1 + \frac{1}{3} P_{\Delta ACD} \cdot R_1 - \frac{1}{3} P_{\Delta ABC} \cdot R_1 =$$

$$= \frac{1}{3}(P_{\Delta ABD} + P_{\Delta BCD} + P_{\Delta ACD} - P_{\Delta ABC}) \cdot R_1 \qquad (3)$$

analogicznie będzie:

$$\frac{1}{3}SR = \frac{1}{3}(P_{\Delta ABC} + P_{\Delta BCD} + P_{\Delta ACD} - P_{\Delta ABD}) \cdot R_2 \quad (4)$$

$$\frac{1}{3}SR = \frac{1}{3}(P_{\Delta ABC} + P_{\Delta ABD} + P_{\Delta ACD} - P_{\Delta BCD}) \cdot R_3 \quad (5)$$

$$\frac{1}{3}SR = \frac{1}{3}(P_{\Delta ABC} + P_{\Delta ABD} + P_{\Delta BCD} - P_{\Delta ACD}) \cdot R_4 \quad (6)$$

Przekształcamy (3), (4), (5) i (6):

$$\frac{1}{R_1} = \frac{P_{\Delta ABD}+P_{\Delta BCD}+P_{\Delta ACD}-P_{\Delta ABC}}{SR} \quad (7)$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{P_{\Delta ABC}+P_{\Delta BCD}+P_{\Delta ACD}-P_{\Delta ABD}}{SR} \quad (8)$$

$$\frac{1}{R_3} = \frac{P_{\Delta ABC}+P_{\Delta ABD}+P_{\Delta ACD}-P_{\Delta BCD}}{SR} \quad (9)$$

$$\frac{1}{R_4} = \frac{P_{\Delta ABC}+P_{\Delta ABD}+P_{\Delta BCD}-P_{\Delta ACD}}{SR} \quad (10)$$

Dodajemy cztery ostatnie równości stronami:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{2P_{\Delta ABC} + 2P_{\Delta BCD} + 2P_{\Delta ACD} + 2P_{\Delta ABD}}{SR} = \frac{2S}{SR} = \frac{2}{R}$$

Prawdziwe jest:

Twierdzenie 6

Jeśli dany jest czworościan $ABCD$, w który da się wpisać kulę o promieniu R, i kule dopisane do czworościanu (styczne do jednej ze ścian i płaszczyzn przedłużających pozostałe trzy ściany) o promieniach R_1, R_2, R_3, R_4 to prawdziwy jest wzór:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{2}{R}$$

Pozostaje pytanie, czy w dowolny czworościan zawsze można wpisać kulę (i dopisać cztery inne), tak jak w trójkąt zawsze daje się wpisać okrąg ? Nie wiemy, ale w czworościanie foremnym, czy w ostrosłupie prawidłowym trójkątnym na pewno da się to zrobić. Zastanowimy się nad tym do przyszłego roku i postaramy się napisać o tym pracę matematyczną już jako licealiści.

Bibliografia:

- Program SMART komponent 04 – ARKA Matematyka, Figury płaskie i przestrzenne, Warszawa 1999

- „Wstęp do geometrii dawnej i nowej” H. S. Coxeter PWN, Warszawa 1967

- „Matematyka w zadaniach dla kandydatów na wyższe uczelnie” W. Leksiński, B. Macukow, W. Żakowski – wyd. Naukowo – Techniczne, Warszawa 1981